ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

$$\frac{du}{dx} = y \ (= MP),$$

W. A. GRANVILLE

EX-PRESIDENTE DO COLÉGIO GETTYSBURG (U.S.A.)

$$dy = f'(x)\,dx = \text{tg}\,\tau \,.\, PQ = \frac{QT}{PQ} \quad PQ = QT.$$

P. F. SMITH, W. R. LONGLEY

PROFESSOR DE MATEMÁTICA DA UNIV. YALE (U.S.A.)

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,d\theta,$$

$$\int \Phi(x)\,dx = f(x) + C,$$

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \Big[f(x) + C\Big]_a^b = [f(b) + C] - [f(a) + C],$$

TRADUZIDO DO INGLÊS POR **J. ABDELHAY**

PROFESSOR DA UNIV. DO BRASIL

ÍNDICE

(das matérias)

CALCULO DIFERENCIAL

CALCULO INTEGRAL

CÁLCULO DIFRERENCIAL E INTEGRAL

CÁLCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO I

FORMULÁRIO

1. — Fórmulas da álgebra elementar e da geometria. Para a comodidade do leitor, daremos nos §§ 1-4 as seguintes listas de fórmulas. Começaremos pela álgebra.

(1) EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU $Ax^2 + Bx + C = 0$.

SOLUÇÃO:

1. — Por fatoração: Fatora-se o primeiro membro e cada fator igualado a zero fornece uma raiz.

2. — Completando o quadrado: Passa-se C para o segundo membro, divide-se pelo coeficiente de x^2, acrescenta-se a ambos os membros o quadrado da metade do coeficiente de x e extrai-se a raiz.

3. — Pela fórmula $x = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

Natureza das raizes. O binômio $B^2 - 4AC$ sob o radical da fórmula chama-se *descriminante.* As duas raízes são reais e desiguais, reais e iguais ou imaginárias, segundo o descriminante seja positivo, zero ou negativo, respectivamente.

(2) LOGARITMOS

$$\log ab = \log a + \log b. \qquad \log a^n = n \log a. \qquad \log 1 = 0.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a. \qquad \log_a a = 1.$$

(3) Fórmula do binomio (sendo n um inteiro positivo)

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} a^{n-3}b^3 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{\underline{|r-1}} a^{n-r+1}b^{r-1} + \ldots$$

(4) Números fatoriais. $n! = \underline{|n} = 1.2.3.4\ldots(n-1)\,n.$

Nas fórmulas seguintes, da geometria elementar, r ou R indica raio, a, altura, B, área da báse e s, geratriz.

(5) Círculo. Comprimento da circunferência $= 2\pi r$. Área $= \pi r^2$.

(6) Setor circular. Área $\frac{1}{2} r^2\alpha$, onde α = ângulo cêntrico do setor medido em radianos.

(7) Prisma. Volume $= Ba$.

(8) Pirâmide. Volume $= \frac{1}{3} Ba$.

(9) Cilindro circular reto. Volume $= \pi r^2 a$. Área lateral $= 2\pi ra$. Área total $= 2\pi r(r+a)$.

(10) Cone circular reto. Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$. Área lateral $= \pi rs$. Área total $= \pi r(r+s)$.

(11) Esfera. Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Área da superfície $= 4\pi r^2$.

(12) Tronco de cone circular reto. Volume $= \frac{1}{3}\pi a(R^2 + r^2 + Rr)$. Área lateral $= \pi s(R+r)$.

2. — Fórmulas da trigonometria. Muitas das seguintes serão usadas.

(1) Medida de ângulos. Há duas unidades muito usadas.

Grau. É a medida de um ângulo que subtende um arco igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Radiano. É a medida de um ângulo que subtende um arco cujo comprimento é igual ao do raio do arco.

A relação entre essas unidades é dada pela equação

$$180 \text{ graus} = \pi \text{ radianos } (\pi = 3{,}14159\ldots),$$

que, resolvida, fornece

$$1 \text{ grau} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174\ldots \text{ radiano; } 1 \text{ radiano} = \frac{180}{\pi} = 57{,}29\ldots \text{ graus.}$$

Da definição acima resulta

$$\textit{Número de radianos num ângulo} = \frac{\textit{arco subtendido}}{\textit{raio}}.$$

Estas relações nos permitem mudar de uma unidade para outra.

(2) RELAÇÕES

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}; \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x.$$

(3) FÓRMULAS DE REDUÇÃO AO PRIMEIRO QUADRANTE.

Angulo	Seno	Cosseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cossecante
$-x$	$-\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$-\operatorname{cossec} x$
$90^\circ - x$	$\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cossec} x$	$\sec x$
$90^\circ + x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{cossec} x$	$\sec x$
$180^\circ - x$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\sec x$	$\operatorname{cossec} x$
$180^\circ + x$	$-\operatorname{sen} x$	$-\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\sec x$	$-\operatorname{cossec} x$
$270^\circ - x$	$-\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{cossec} x$	$-\sec x$
$270^\circ + x$	$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cossec} x$	$-\sec x$
$360^\circ - x$	$-\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$\sec x$	$-\operatorname{cossec} x$

(4) FUNÇÕES DE $(x + y)$ e $(x - y)$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y.$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}; \quad \operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

(5) Funções de $2x$ e $\frac{1}{2}x$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x;\ \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x;\ \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};\ \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x;\ \cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

(6) Teoremas de adição

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y),$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y).$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y).$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y).$$

(7) Relações num triângulo

Lei dos senos $\qquad \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}.$

Lei dos cossenos $\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$

Fórmulas para área: $\qquad K = \tfrac{1}{2} bc \operatorname{sen} A.$

$$K = \frac{\tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B+C)}.$$

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \text{onde } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

3. Fórmulas da geometria analítica plana. As mais importantes são as seguintes.

(1) Distância entre dois pontos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Coeficiente angular de $P_1 P_2$ $\quad m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Ponto médio $\quad x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

(2) Ângulo de duas retas

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Para retas paralelas, $m_1 = m_2$; para retas perpendiculares $(m_1 m_2 = -1)$

(3) Equações da reta:

Normal. $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$
$\quad y = mx + b.$

Por dois pontos. $\quad \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Segmentária. $\quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

(4) Distância da reta $Ax + By + C = 0$ a $P_1(x_1, y_1)$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(5) Relações entre coordenadas retangulares e polare

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

(6) Equação da circunferência

Centro (h, k). $\quad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$

(7) Equações da parábola

Vértice na origem. $\quad y^2 = 2px, \quad$ foco $(\frac{1}{2}p, 0)$.
$x^2 = 2py, \quad$ foco $(0, \frac{1}{2}p)$.

Vértice (h, k). $\quad (y - k)^2 = 2p(x - h)$, eixo $y = k$.
$(x - h)^2 = 2p(y - k)$, eixo $x = h$.

Eixo, eixo dos yy. $\quad y = Ax^2 + C.$

(8) EQUAÇÕES DE OUTRAS CURVAS

Elipse com centro na origem e focos no eixo dos xx $(a > b)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hipérbole com centro na origem e focos no eixo dos xx.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hipérbole equilátera com centro na origem e com os eixos coordenados por assíntotas.

$$xy = C.$$

Veja também o Capítulo XXVI.

4. Fórmulas da geometria analítica do espaço. Serão dadas algumas das mais importantes.

(1) DISTÂNCIA DE $P_1(x_1, y_1, z_1)$ A $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(2) LINHA RETA

Cossenos diretores: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Parâmetros diretores: a, b, c.

Então

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Se a reta passa por (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{\cos\alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos\beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos\gamma}{z_2 - z_1}.$$

(3) DUAS RETAS

Cossenos diretores: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$

Parâmetros diretores: a, b, c; a', b', c'.

Se θ = ângulo das duas retas,

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma',$$

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Retas paralelas. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Retas perpendiculares. $aa' + bb' + cc' = 0$.

(4) EQUAÇÕES DA RETA COM PARÂMETROS DIRETORES, a, b, c, PASSANDO POR (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

(6) PLANO. Dado o plano $Ax + By + Cz + D = 0$, os coeficientes A, B, C, são os parâmetros diretores de uma reta perpendicular ao plano.

Equação de um plano passando por (x_1, y_1, z_1) e perpendicular à reta de parâmetros diretores A, B, C.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

(6) DOIS PLANOS

Equações:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Parâmetros diretores da reta interseção:

$$BC' - CB',\ CA' - AC',\ AB' - BA'.$$

Se θ = ângulo entre os planos, então

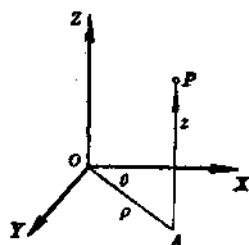
$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}\cdot$$

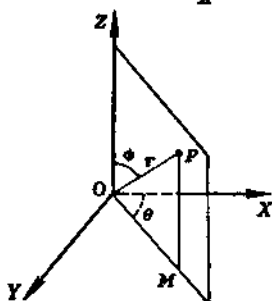
(7) Coordenadas cilíndricas*. A distância z de um ponto $P(x, y, z)$ ao plano XY e as coordenadas polares (ρ, θ) da sua projeção $(x, y, 0)$ sôbre o plano XY são chamadas *coordenadas cilíndricas* de P. As coordenadas cilíndricas de P são indicadas por (ρ, θ, z).

Se as coordenadas retangulares de P são x, y, z, tem-se, pelas definições e pela figura

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\theta, \quad z = z;$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}\cdot$$

Z P z O θ X ρ Y A

(8) Coordenadas esféricas*. O raio vetor r de um ponto P, o ângulo ϕ entre OP e o eixo OZ e o ângulo θ entre a projeção de OP sôbre o plano XY e o eixo OX são as chamadas *coordenadas esféricas de P*. ϕ diz-se *colatitude* e θ, *longitude*. Escreve-se (r, ϕ, θ) para indicar as coordenadas esféricas de P.

Z φ r P O X θ Y M

Se x, y, z são as coordenadas retangulares de P, tem-se:

$$x = r\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \quad z = r\cos\phi;$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \qquad \phi = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\,.$$

5. — Alfabeto grego.

Letras		Nomes	Letras		Nomes	Letras		Nomes
Α	α	Alfa	Ι	ι	Iota	Ρ	ρ	Rô
Β	β	Beta	Κ	κ	Kapa	Σ	σ ς	Sigma
Γ	γ	Gama	Λ	λ	Lambda	Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta	Μ	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
Ε	ε	Epsilon	Ν	ν	Nu	Φ	φ ϕ	Fi
Ζ	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Csi	Χ	χ	Qui
Η	η	Eta	Ο	ο	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Teta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

7 Para um estudo das coordenadas cilíndricas e esféricas, consultar Smith, Gale, Neelley, "New Analytic Geometry, Revised Edition" (Ginn and Company), pp. 320-322.

CAPÍTULO II

VARIÁVEIS, FUNÇÕES E LIMITES

6. — Variáveis e constantes. Quando numa investigação figura uma grandeza à qual se pode dar um número ilimitado de valores, diz-se que a grandeza é uma *variável*. Se figura uma grandeza com valor fixo, diz-se que ela é uma *constante*. Uma constante em todos os problemas, como 2, 5, $\sqrt{7}$, etc., diz-se *absoluta*.

As variáveis são indicadas usualmente pelas últimas letras do alfabeto, as constantes pelas primeiras.

Assim, na equação da reta

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

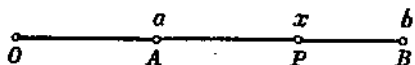
x e y são variáveis (coordenadas de um ponto móvel sobre a reta), enquanto a e b são constantes e representam, respectivamente, os segmentos determinados pela reta sobre os eixos dos xx e dos yy. No caso, dizemos que a e b são *constantes arbitrárias* porque no estudo da reta podemos fixar valores quaisquer para a e b.

O *valor absoluto* de uma constante a será indicado por $|a|$. Assim, $|-2| = 2 = |2|$. O símbolo $|a|$ lê-se "valor absoluto de a".

7. — Intervalo de uma variável. Muitas vezes nos limitamos apenas a uma parte do sistema de números. Podemos, por exemplo, fazer a variável tomar apenas os valores compreendidos entre a e b, incluindo ou não um ou ambos os números a e b. Empregaremos o símbolo $[a, b]$, sendo a menor do que b, para representar todos os números compreendidos entre a e b, eles inclusive, a menos que o contrário seja estabelecido. O símbolo $[a, b]$ lê-se "intervalo de a para b", ou simplesmente, "intervalo a b".

8. — Variação contínua. Diz-se que uma variável **x** varia continuamente num intervalo $[a, b]$ quando x *cresce* do valor a para o valor b de tal modo a tomar todos os valores compreendidos entre a e b na ordem de suas grandezas, ou quando x *decresce* de $x = b$ para $x = a$ tomando sucessivamente todos os valores intermediários. Isto pode ser ilustrado geomètricamente pelo diagrama abaixo.

Sôbre a reta em que se fixou uma origem O, marquemos os pontos A e B correspondentes respectivamente aos números a e b. Marquemos também o ponto P correspondente a um valor da variável x. Evidentemente o intervalor $[a, b]$ é representado pelo segmento AB. Quando x varia continuamente no intervalo $[a, b]$, o ponto P descreve o segmento AB se x cresce, ou o segmento BA se x decresce.

a x b
O A P B

9. — Funções. Quando duas variáveis estão relacionadas de modo tal que o valor da primeira é conhecido quando se dá o valor da segunda diz-se que a primeira variável é uma *função* da segunda.

Pràticamente em todos os problemas científicos intervêm grandezas e relações desta espécie e na nossa experiência diária continuamente encontramos situações ilustrando a dependência de uma grandeza da de outra. Por exemplo o peso que um homem pode levantar depende da sua força, a distância que um garoto percorre depende do tempo gasto no percurso. A área de um quadrado é função do comprimento do lado, o volume de uma esfera é função do seu diâmetro.

10. — Variáveis independentes e dependentes. A segunda variável, à qual se podem atribuir valores arbitràriamente escolhidos dentre os limites impostos pela natureza particular do problema, diz-se *variável independente* ou *argumento*. A primeira variável, aquela cujo valor é determinado quando se dá o valor da variável independente, diz-se variável *dependente* ou *função*.

Freqüentemente, quando se consideram duas variáveis interrelacionadas, é-nos permitido fixar qual delas é a variável independente; feita a escolha, a troca de variável independente sem outras precauções não é permitida. Por exemplo, a área de um quadrado é função do lado, e reciprocamente, o lado é função da área.

11. — Notação das funções. O símbolo f (x) é usado para indicar uma função de x e lê-se "f de x". Para indicar diferentes funções, muda-se a primeira letra como em $F(x)$, $\phi(x)$, $f'(x)$, etc.

No curso de um problema, um símbolo funcional indica a mesma lei de dependência entre a função e a variável. Nos casos mais simples esta lei toma a forma de uma série de operações analíticas sobre a variável. Neste caso, o símbolo funcional indicará as mesmas operações ou séries de operações aplicadas aos diferentes valores da variável. Assim, se

$$f(x) = x^2 - 9x + 14,$$

tem-se

$$f(y) = y^2 - 9y + 14.$$

Tem-se também

$$f(b+1) = (b+1)^2 - 9(b+1) + 14 = b^2 - 7b + 6.$$
$$f(0) = 0^2 - 9 \cdot 0 + 14 = 14,$$
$$f(-1) = (-1)^2 - 9(-1) + 14 = 24,$$
$$f(3) = 3^2 - 9 \cdot 3 + 14 = -4.$$

12. — Impossibilidade da divisão por zero. O quociente de dois números a e b é um número x tal que $a = bx$. Desta definição resulta que a divisão por zero é impossível, pois se $b = 0$, o produto de b por um número qualquer é zero e portanto não existe x, se $a \neq 0$ e x pode ser um número qualquer se $a = 0$. As operações

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{0}{0},$$

são, pois, impossíveis.

Deve-se ter cuidado nas divisões. Dividir por zero inadvertidamente conduz a absurdos, como o seguinte:

Suponhamos	$a = b$.
Então	$ab = a^2$.
Subtraindo b^2,	$ab - b^2 = a^2 - b^2$.
Fatorando	$b(a-b) = (a+b)(a-b)$.
Dividindo por $a - b$,	$b = a + b$.
Mas,	$a = b$;
logo	$b = 2b$.
ou seja	$1 = 2$.

O absurdo proveio da divisão por $a - b = 0$.

PROBLEMAS

1. Sendo $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, mostre que
$f(1) = 12$, $f(5) = 0$, $f(0) = -2f(3)$, $f(7) = 5f(-1)$.

2. Sendo $f(x) = 4 - 2x^2 + x^4$ ache $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.

3. Sendo $F(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta$, ache $F(0)$, $F(\frac{1}{2}\pi)$, $f(\pi)$.

4. Sendo $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ mostre que
$$f(t+1) = t^3 - 2t^2 - 11t + 12.$$

5. Sendo $f(y) = y^2 - 2y + 6$, mostre que
$f(y+h) = y^2 - 2y + 6 + 2(y-1)h + h^2$.

6. Sendo $f(x) = x^3 + 3x$, mostre que
$f(x+h) - f(x) = 3(x^2+1)h + 3xh^2 + h^3$.

7. Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$, mostre que $f(x+h) - f(x) = -\dfrac{h}{x^2+xh}$.

8. Sendo $\phi(z) = 4^z$, mostre que $\phi(z+1) - \phi(z) = 3\phi(z)$.

9. Se $\phi(x) = a^x$, mostre que $\phi(y) \cdot \phi(z) = \phi(y+z)$.

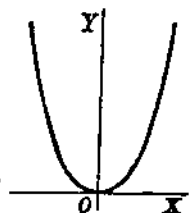
10. Sendo $\phi(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$, mostre que
$$\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\frac{y+z}{1+yz}\right).$$

11. Sendo $f(x) = \operatorname{sen} x$, mostre que
$$f(x+2h) - f(x) = 2\cos(x+h)\operatorname{sen} h.$$

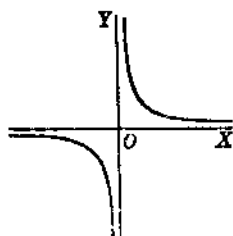
SUGESTÃO. Use (6), p 3.

13. — Gráfico de uma função. Consideremos a função x^2 e ponhamos

$$(1) \qquad y = x^2$$

Esta relação dá um valor de y para cada valor de x, isto é, y é *definida* para todos os valores da variável independente. O conjunto de todos os pontos que satisfazem (1), uma parábola (v. figura), é chamado o *gráfico* da função x^2. Se x variar continuamente (§ 8) de $x = a$ a $x = b$, y variará continuamente de $y = a^2$ a $y = b^2$ e o ponto $P(x, y)$ descreverá, com movimento contínuo a porção do gráfico que vai do ponto (a, a^2) a

(b, b^2). Dizemos, então que "a função x^2 é contínua no intervalo $[a, b]$". Como a e b podem tomar valores quaisquer, então "x^2 é contínua para todo o valor de x".

Consideremos a função $\frac{1}{x}$ e ponhamos

$$(2) \qquad y = \frac{1}{x} \, .$$

Esta equação dá um valor de y para cada valor de x, exceto $x = 0$ (§ 12). Para $x = 0$ a função *não é definida*. O gráfico, o conjunto de todos os pontos que satisfazem (2), é uma hipérbole equilátera (v. figura). Se x crescer continuamente num intervalo $[a, b]$ que não contenha $x = 0$, y decrescerá continuamente de $\frac{1}{a}$ a $\frac{1}{b}$ e o ponto $P(x, y)$ descreverá a porção do gráfico que vai do ponto $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ a $\left(b, \frac{1}{b}\right)$. Então, "a função $\frac{1}{x}$ é contínua para todo valor de x, exceto $x = 0$".

Estes exemplos ilustram o conceito de continuidade de uma função. Uma definição é dada no § 17.

14. — Limite de uma variável. A idéia de uma variável aproximando-se de um valor limite é dada em geometria elementar quando se estabelece a fórmula para a área do círculo. Considera-se a área de um polígono regular de n lados inscrito no círculo, e a seguir faz-se n crescer indefinidamente. A área variável tende então a um limite e êste limite é definido como a área do círculo. Neste caso a variável v (a área) cresce constantemente e a diferença $a - v$ onde onde a é a área do círculo, decresce tornando-se menor que um número prefixado a partir de um certo valor de n, qualquer que seja o número prefixado ainda que muito pequeno.

Definição. Diz-se que a variável v tende a uma constante l, ou que o limite de v é l, se, dado um número positivo qualquer ϵ, ainda que muito pequeno, os valores sucessivos de v se aproximam de l de modo tal que a diferença $v - l$ seja, em valor absoluto, menor do que ϵ. Escreve-se $\lim v = l$. Usa-se, também, por comodidade, a notação $v \to l$, que se lê "v tende a l" (alguns autores usam a notação $v \cong l$).

Exemplo ilustrativo. Sejam os seguintes os valores de v:

$$2 + 1,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \frac{1}{4}, \ldots, 2 + \frac{1}{2^n}, \ldots;$$

tem-se, òbviamente, $\lim v = 2$, ou $v \to 2$.

Se marcarmos sobre uma reta, como no § 8, o ponto L, correspondente ao limite l, e a seguir o segmento de centro L e comprimento $2\,e$, então os valores sucessivos tomados por v representam, a partir de um certo momento, pontos do segmento.

15. — Limite de uma função. Nas aplicações, o que usualmente aparece é isto. Temos uma variável v e uma dada função z de v. A variável independente v toma valores tendendo a l e temos que examinar os valores da variável dependente z, em particular, determinar se z tende a um limite. Se existe uma constante a tal que $\lim z = a$, então se escreve

$$\lim_{v \to l} z = a,$$

que se lê "limite de z, quando v tende a l, é igual a a".

16. — Teoremas sobre limites. No cálculo do limite de uma função, podem-se aplicar os seguintes teoremas, cujas demonstrações serão dadas no § 20.

Suponhamos que u, v e w são funções de uma variável x e que

$$\lim_{x \to a} u = A, \quad \lim_{x \to a} v = B, \quad \lim_{x \to a} w = C.$$

Tem-se, então:

$$(1) \qquad \lim_{x \to a} (u + v - w) = A + B - C.$$

$$(2) \qquad \lim_{x \to a} (uvw) = ABC.$$

$$(3) \qquad \lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B}, \text{ se } B \text{ não é zero.}$$

Em palavras: *O limite de uma soma algébrica, de um produto, ou de um quociente é igual, respectivamente, à soma algébrica, produto ou quociente dos respectivos limites, feita a ressalva, no último caso, de ser não nulo o denominador.*

Se c é uma constante e B não é zero, então, do que ficou dito acima, resulta:

$$(4) \quad \lim_{x \to a} (u + c) = A + c, \quad \lim_{x \to a} cu = cA, \quad \lim_{x \to a} \frac{c}{v} = \frac{c}{B}.$$

Consideremos alguns exemplos:

1. Provar que $\lim_{x \to 2} (x^2 + 4x) = 12.$

SOLUÇÃO. A dada função é a soma de x^2 e $4x$; primeiro achamos, então, os limites destas funções. Por (2),

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4, \text{ pois } \quad n^2 = x\,x$$

Por (4),
$$\lim_{x \to 2} 4x = 4 \lim_{x \to 2} x = 8.$$

Logo; por (1), a resposta é $4 + 8 = 12$.

2. Prove que $\lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 9}{z + 2} = -\frac{5}{4}$.

SOLUÇÃO. Considerando o numerador, $\lim_{z \to 2} (z^2 - 9) = -5$, por (2) e (4). Para o denominador, $\lim_{z \to 2} (z + 2) + 4$. Logo, por (3), obtém-se o resultado.

17. — Funções contínuas e descontínuas. No Exemplo 1 do § precedente, onde se mostrou que

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 4x) = 12,$$

observamos que a resposta é o valor da função para $x = 2$, isto é, o limite da função quando x tende a 2 é igual ao valor da função para $x = 2$. Diz-se que a função é *contínua* para $x = 2$. A definição geral é a seguinte.

DEFINIÇÃO. Uma função $f(x)$ diz-se *contínua* para $x = a$ se o limite da função quando x tende a a é igual ao valor da função para $x = a$. Em símbolos, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

então $f(x)$ é contínua para $x = a$.

A função diz-se *descontínua* para $x = a$ se esta condição não é satisfeita

Pede-se a atenção para o seguinte.

A definição de função contínua num ponto a supõe que a função está definida para $x = a$. Se isto não se dá, é possível, contudo, em alguns casos, atribuir um valor à função no ponto a tal que ela resulte contínua nesse ponto. O teorema sèguinte diz respeito a isto.

TEOREMA. *Se $f(x)$ não é definida para $x = a$ e se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = B,$$

então $f(x)$ será contínua para $x = a$ se o valor B for atribuído a $f(x)$ para $x = a$.

Assim, a função

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

não é definida para $x = 2$ (pois não é possível a divisão por zero) Mas para todo outro valor de x,

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2;$$

ora,
$$\lim_{x \to 2} (x + 2) = 4;$$

logo
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Embora a função não seja definida para $x = 2$, se lhe atribuirmos o valor 4 para $x = 2$, ela tornar-se-á contínua para este valor.

*Uma função $f(x)$ diz-se contínua num intervalo quando é contínua para todos os valores de x deste intervalo.**

Freqüentemente devemos calcular o limite de uma função de uma variável v quando v tende a um valor a de um intervalo em que a função é contínua. O limite é o valor da função para $v = a$.

18. — Infinito (∞). Se v é uma variável tal que, dado um número qualquer, existe um valor de v maior que o número dado, dizemos que *v tende a $+\infty$*. Se existe um valor de v menor que o

---

* Neste livro consideraremos apenas as funções que são contínuas em geral, isto é, contínuas para todos os valores de x, com a possível exceção de certos valores isolados, ficando, pois, entendido que os nossos resultados são válidos em geral para os valores de x nos quais a função em estudo é contínua.

número dado, dizemos que v *tende a* $-\infty$. Dizemos que v *tende ao infinito* quando $|v|$ tende $a + \infty$. A notação usada para os três casos é

$$\lim v = +\infty, \quad \lim v = -\infty, \quad \lim v = \infty.$$

Nêstes casos, v não tende a um limite como foi definido no § 14. A notação $\lim v = \infty$, ou $v \to \infty$ lê-se "v tende ao infinito". *

Tem-se, por exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

ou seja $\frac{1}{x}$ tende ao infinito quando x tende a zero.**

Do § 17 resulta que se

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty,$$

então $f(x)$ é descontínua para $x = a$.

Uma função pode tender a um limite quando a variável independente tende ao infinito. Por exemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Se a função $f(x)$ tende a um limite A quando $x \to \infty$, usaremos a notação do § 17 e escreveremos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Alguns limites especiais ocorrem freqüentemente. São os dados abaixo. A constante c não é zero.

	Limites	*Formas abreviadas (de muito uso)*
(1)	$\lim_{x \to 0} \frac{c}{v} = \infty.$	$\frac{c}{0} = \infty.$
(2)	$\lim_{v \to \infty} cv = \infty.$	$c.\ \infty = \infty.$
(3)	$\lim_{v \to \infty} \frac{v}{c} = \infty.$	$\frac{\infty}{c} = \infty.$

---

* Semelhantemente, $v \to +\infty$ lê-se "v tende a mais infinito", $v \to -\infty$ lê-se "v tende a menos infinito".

Esta nomenclatura é cômoda; contudo, o leitor não deve esquecer que o infinito não é, absoutamente, um número.

** Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, se dado um número k qualquer, pode-se determinar um número positivo δ tal que $|f(x)| > k$ para todo x do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ (N.T.).

(4) $$\lim_{v\to\infty} \frac{c}{v} = 0. \qquad \frac{c}{\infty} = 0.$$

Estes limites especiais são úteis para achar o limite do quociente de dois polinômios quando a variável tende ao infinito. O exemplo seguinte ilustrara o método.

Exemplo ilustrativo. Prove que $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = -\frac{2}{7}$.

SOLUÇÃO. Dividamos o numerador e denominador por x^3, a mais alta potência de x. Temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} - 7}.$$

O limite de cada termo do numerador ou denominador contendo x é zero, por (4). Logo, por (1) e (3) do § 16, obtemos a resposta. Em todo caso semelhante, o primeiro passo é, portanto, o seguinte.

Dividir o numerador e denominador pela mais alta potência da variável, quer ela figure no numerador ou no denominador.

Se u e v são funções de x, se

$$\lim_{x\to a} u = A, \qquad \lim_{x\to a} v = 0,$$

e se A não é zero, então

$$\lim_{x\to a} \frac{u}{v} = \infty.$$

Com a convenção $\frac{A}{0} = \infty$, vê-se que (3), § 16, vale para todo B quando A não é zero. Confronte também os § § 18 e 20.

Prove cada uma das igualdades abaixo.

1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - 2x^2}{3x + 5x^2} = -\frac{2}{5}.$$

DEMONSTRAÇÃO. $$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - 2x^2}{3x + 5x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2} - 2}{\frac{3}{x} + 5}.$$

[Dividindo o numerador e denominador por x^2].

O limite de cada termo do numerador e denominador contendo x é zero, por (4). Logo, por (1) e (3), § 16, obtemos a resposta.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x + 5}{2x + 3} = 2.$

3. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{4t^2 + 3t + 2}{t^3 + 2t - 6} = -\frac{1}{3}.$

4. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 h + 3xh^2 + h^3}{2xh + 5h^2} = \dfrac{x}{2}.$

5. $\lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{3h + 2xh^2 + x^2h^3}{4 - 3xh - 2x^3h^3} = -\dfrac{1}{2x}.$

6. $\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{(2z + 3k)^3 - 4k^2z}{2z(2z - k)^2} = 1.$

7. $\lim\limits_{y \to \infty} \dfrac{4y^2 - 3}{2y^3 + 3y^2} = 0.$

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3 - 5x^2 + 3}{2x^3 + 4x - 7} = 3.$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \dfrac{a_0}{b_0}.$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \dfrac{a_n}{b_n}.$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^4 + bx^2 + c}{dx^5 + ex^3 + fx} = 0.$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^4 + bx^2 + c}{dx^3 + ex^2 + fx + g} = \infty.$

13. $\lim\limits_{s \to a} \dfrac{s^4 - a^4}{s^2 - a^2} = 2a^2.$

14. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$ (n — inteiro positivo)

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \dfrac{5}{4}.$

16. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Demonstração. A substituição $h = 0$ não dá o limite, pois que conduz à forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (§ 12). Deve-se, pois, transformar a expressão de modo conveniente, precisamente, racionalizar o numerador. como se fez abaixo.

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

Logo $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

17. Sendo $f(x) = x^2$, mostre que

18. Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$, mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b.$$

19. Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, mostre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}.$$

20. Se $f(x) = x^3$, ache $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

19. — Infinitésimo. Uma variável v que tende a zero diz-se um *infinitésimo*, ou um infinitamente pequeno. Escreve-se (§ 14)

$$\lim v = 0 \quad \text{ou} \quad v \to 0,$$

e significa que os valores sucessivos de v se aproximam de zero de modo tal que a partir de dado momento o valor absoluto de v torna-se e permanece menor do que um número qualquer prefixado ainda que muito pequeno.

Se $\lim v = l$, então $\lim (v - l) = 0$, isto é, *a diferença entre a variável e o seu limite é um infinitésimo.* Reciprocamente, *se a diferença entre uma variável e uma constante é um infinitésimo, então a variável tende à constante.*

20. — Teoremas relativos aos infinitésimos e limites. Nas considerações a seguir, supõe-se que todas as variáveis sejam funções de uma mesma variável independente e que tendem aos respectivos limites, quando esta variável tende a um valor fixo a. A constante ϵ é um número positivo prefixado, tão pequeno quanto se queira, mas não zero.

Demonstraremos primeiro quatro teoremas sobre infinitésimos.

I. *Uma soma algébrica de n infinitésimos é um infinitésimo, sendo n um número fixo.*

Realmente, o valor absoluto da soma fica e permanece menor do que ϵ quando o valor absoluto de cada infinitésimo fica e permanece menor do que $\frac{\epsilon}{n}$.

II. *O produto de uma constante c por um infinitésimo é um infinitésimo.*

Realmente, o valor absoluto do produto ficará e permanecerá menor que ϵ, quando o valor absoluto do infinitésimo fôr menor que $\frac{\epsilon}{|c|}$.

III. *O produto de n infinitésimos é um infinitésimo, sendo n um número fixo.*

Realmente, o valor absoluto do produto ficará e permanecerá menor que ϵ, quando o valor absoluto de cada infinitésimo fôr e permanecer menor que a raiz n-egésima de ϵ.

IV. *Se* $\lim v = l$ *e* l *é diferente de zero, então o quociente de um infinitésimo* i *por* v *é também um infinitésimo.*

De fato, podemos escolher um número positivo c, menor que $|l|$, tal que $|v|$ se torne e permaneça maior que c e tal que $|i|$ se torne e permaneça menor que $c\epsilon$. Então o valor absoluto do quociente se tornará e permanecerá menor que ϵ.

Demonstrações dos teoremas do § 16. Seja

$$(1) \qquad u - A = i, \; v - B = j, \; w - C = k.$$

Então i, j, k são funções de x e cada uma delas tende a zero quando $x \to a$, isto é, elas são infinitésimos (§ 19). Das equações (1) obtemos

$$(2) \qquad u + v - w - (A + B - C) = i + j - k.$$

O segundo membro é um infinitésimo pelo teorema I acima, logo, pelo § 19,

$$(3) \qquad \lim_{x \to a} (u + v - w) = A + B - C.$$

De (1) deduzimos $u = A + i$, $v = B + j$. Multiplicando e mudando AB de membro, obtemos

$$(4) \qquad uv - AB = Aj + Bi + ij.$$

Pelos teoremas I-III acima, o segundo membro é um infinitésimo; logo

$$(5) \qquad \lim_{x \to a} uv = AB.$$

A demonstração se estende fàcilmente ao produto uvw.

Finalmente, podemos escrever

$$\frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A+i}{B+j} - \frac{A}{B} = \frac{Bi - Aj}{B(B+j)} \cdot \tag{6}$$

O numerador $Bi - Aj$ é um infinitésimo, pelos teoremas I e II. Por (3) e (4), $\lim B(B+j) = B^2$; logo, pelo teorema IV, o segundo membro de (6) é um infinitésimo, e portanto

$$\lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B} \cdot \tag{7}$$

Conseqüentemente as afirmações do § 16 estão demonstradas.

CAPÍTULO III

DERIVAÇÃO

21. — Introdução. Vamos agora investigar o modo como uma função muda de valor quando a variável independente varia. O problema fundamental do Cálculo Diferencial é estabelecer uma medida para a variação da função com precisão matemática. Foi investigando problemas desta natureza, lidando com grandezas que variam com continuidade, que Newton* foi conduzido à descoberta dos princípios fundamentais do Cálculo, o mais científico e poderoso instrumento do técnico moderno.

22. — Acréscimos. Acréscimo de uma variável que muda de um valor numérico para outro é a diferença entre este segundo valor e o primeiro. Um acréscimo de x é indicado pelo símbolo Δx, que se lê "delta x". Observe o leitor que o símbolo Δx não representa um produto e portanto não é "delta vezes x".

Um acréscimo pode, evidentemente, ser positivo ou negativo**; é positivo se a variável cresce, negativo se decresce. Semelhantemente,

Δy indica um acréscimo de y,
$\Delta \phi$ indica um acréscimo de ϕ,
$\Delta f(x)$ indica um acréscimo de $f(x)$, etc.

Se em $y = f(x)$ a variável independente x toma um acréscimo Δx, então Δy indicará o correspondente acréscimo da função $f(x)$ (ou da variável dependente y).

O acréscimo Δy é, pois, a diferença entre o valor que a função toma em $x + \Delta x$ e o valor da função em x. Por exemplo, consi-

* Isaac Newton (1642-1727) nasceu na Inglaterra. Foi um homem de extraordinário talento. Desenvolveu a ciência do cálculo sob o nome de Fluxions. Embora tenha descoberto e feito uso da nova ciência por volta de 1670, seu primeiro trabalho sobre o assunto foi publicado em 1687, com o título de "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Este foi o principal trabalho de Newton. Dêle disse Laplace: "será sempre uma obra proeminente entre todas as que produzir o engenho humano". V. frontespício.

** Alguns autores chamam um acréscimo negativo de um decréscimo.

deremos a função

$$y = x^2.$$

Tomemos $x = 10$ para valor inicial de x, portanto $y = 100$ para valor inicial de y.

Supondo que x cresça para $x = 12$, isto é, $\Delta x = 2$,

então $\qquad y$ cresce para $y = 144$, e $\Delta y = 44$.

Supondo que x decresça para $x = 9$, isto é, $\Delta x = -1$,

então $\qquad y$ decresce para $y = 81$, e $\Delta y = -19$.

Nêste exemplo, y cresce quando x cresce e y decresce quando x decresce. Os correspondentes valores de Δx e Δy tem o mesmo sinal. Pode acontecer também que y decresça quando x cresce, ou o contrário; em ambos os casos Δx e Δy terão sinais contrários.

23. — Comparação de acréscimos. Consideremos a função

$$y = x^2. \tag{1}$$

Tomemos um valor inicial para x e demos a este valor um acréscimo Δx. Então y receberá um acréscimo correspondente Δy, e temos

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

ou

$$y + \Delta y = x^2 + 2x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Subtraindo (1), $\quad y = x^2$

$$\Delta y = 2x \,.\, \Delta x + (\Delta x)^2. \tag{2}$$

obtemos o acréscimo Δy em termos de x e Δx.

Para achar a razão entre os acréscimos, dividamos ambos os membros de (2) por Δx; temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Se o valor inicial de x é 4, é evidente (§ 16) que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

Observemos o comportamento da razão entre os acréscimos de x e y quando o acréscimo de x decresce.

Valor inicial de x	Novo valor de x	Acréscimo Δx	Valor inicial de y	Novo valor de y	Acréscimo Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	5,0	1,0	16	25,	9,	9,
4	4,8	0,8	16	23,04	7,04	8,8
4	4,6	0,6	16	21,16	5,16	8,6
4	4,4	0,4	16	19,36	3,36	8,4
4	4,2	0,2	16	17,64	1,64	8,2
4	4,1	0,1	16	16,81	0,81	8,1
4	4,01	0,01	16	16,0801	0,0801	8,01

Vê-se logo que Δy decresce quando Δx decresce e que a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ toma os valores sucessivos 9; 8,8; 8,6; 8,4; 8,2; 8,1; 8,01, mostrando que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aproxima de 8 tanto quanto se queira quando se toma Δx suficientemente pequeno. Logo

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

24. — Derivada de uma função de uma variável. A definição de derivada, fundamental no Cálculo Diferencial, é a seguinte.

Derivada de uma função é o limite da razão do acréscimo da função para o acréscimo da variável independente, quando este último tende a zero.

Quando existe o limite mencionado, diz-se que a função é *derivável* ou que *possui uma derivada*.

Derivada de uma função

$$(1) \qquad y = f(x)$$

é, pois, o seguinte.

Supondo que x tenha um valor fixo, dá-se a x um acréscimo Δx; então a função y recebe um acréscimo Δy, e se tem

$$(2) \qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

ou seja, tendo (1) presente,

$$3) \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Dividindo ambos os membros pelo acréscimo da variável, Δx, tem-se

$$(4) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

que é a razão entre os acréscimos Δy e Δx. O limite desta razão quando $\Delta x \to 0$ é, por definição, a *derivada* de $f(x)$, ou, por (1), de y, e se indica pelo símbolo $\frac{dy}{dx}$. Portanto

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

define a *derivada de* y (ou $f(x)$) *em relação a* x.

De (4) obtemos também

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Semelhantemente, se u é uma função de t, então

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{derivada de } u \text{ em relação a } t.$$

O processo para se achar a derivada de uma função chama-se *derivação* ou *diferenciação*.

25. — Símbolos para as derivadas. Como Δy e Δx são números, a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

é o quociente de Δy por Δx. O símbolo

$$\frac{dy}{dx},$$

contudo, *não representa um quociente*; ele é o valor do limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero. Em muitos casos o símbolo se comporta como se fosse um quociente e a razão disto será vista mais tarde; tenha-se presente, porém, que, por ora, $\frac{dy}{dx}$ não é um quociente e deve ser tomado como um todo.

Como a derivada de uma função de x é também uma função de x, o símbolo $f'(x)$ é também usado para indicar a derivada de $f(x)$. Logo, se

$$y = f(x),$$

podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

que se lê "derivada de y em relação a x igual a f linha de x". O símbolo

$$\frac{d}{dx}$$

considerado como um todo, chama-se *operador de derivação* e indica que uma função escrita à sua direita deve ser derivada em relação a x. Assim,

$\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}\,y$ indica a derivada de y em relação a x;

$\frac{d}{dx}\,f(x)$ indica a derivada de $f(x)$ em relação a x;

$\frac{d}{dx}\,(2\,x^2 + 5)$ indica a derivada de $2\,x^2 + 5$ em relação a x.

y' é uma forma abreviada para $\frac{dy}{dx}$.

O símbolo D é usado por alguns autores ao invés de $\frac{d}{dx}$. Portanto, se

$$y = f(x).$$

podemos escrever

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,y = \frac{d}{dx}\,f(x) = D\,f(x) = f'(x).$$

Deve-se observar que quando se faz Δx tender a zero, é Δx, e não x, a variável. O valor de x foi fixado de início. Para pôr em destaque o valor de x fixado de início — digamos $x = x_0$, escreve-se

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

26. — Funções deriváveis. Da teoria dos limites resulta que se a derivada de uma função existe e é finita para um certo valor da variável independente, então a função é contínua para esse valor da variável. A recíproca, contudo, não é sempre verdadeira, pois existem funções que são contínuas para um certo valor da variável e no entanto não são deriváveis para esse valor. Tais funções, contudo, não aparecem muito na matemática aplicada e neste livro serão consideradas *somente as funções que possuem derivadas para todos os valores da variável independente salvo, eventualmente, valores isolados da variável.*

27. — Regra geral de derivação. Da definição de derivada, vê-se que o processo para a derivação de uma função $y = f(x)$ consiste em tomar os seguintes *quatro passos* distintos.

Regra Geral de Derivação*

Primeiro Passo. *Substitui-se x por $x + \Delta x$ e calcula-se o novo valor da função, $y + \Delta y$.*

Segundo Passo. *Subtrai-se o dado valor da função do novo valor, achando-se, assim, Δy (o acréscimo da função).*

Terceiro Passo. *Divide-se Δy (acréscimo da função) por Δx (acréscimo da variável independente).*

Quarto Passo. *Acha-se o limite do quociente quando Δx (acréscimo da variável independente) tende a zero. Este limite é a derivada.*

O leitor familiarizar-se-á com esta regra aplicando-a a um grande número de exemplos. Vamos aplicá-la agora a três, com todos os detalhes.

Observe-se que os teoremas do § 16 são usados no Quarto Passo, tendo-se fixado o valor de x.

Exemplo ilustrativo 1. Derivar $3x^2 + 5$.

Solução. Aplicando os sucessivos passos da Regra Geral, obtemos, depois de pôr

$$y = 3x^2 + 5,$$

Primeiro passo.

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$$

$$= 3x^2 + 6x.\Delta x + 3.(\Delta x)^2 + 5$$

* Também chamada a regra dos quatro passos.

Segundo passo.
$$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= 3\,x^2 + 6\,x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ y &= 3\,x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 5 \\ \hline \Delta y &= \qquad 6\,x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{array}$$

Terceiro passo. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6\,x + 3 \cdot \Delta x.$

Quarto passo. Façamos, no segundo membro, $\Delta x \to 0$. Vem, por (A),

$$\frac{dy}{dx} = 6\,x. \ \textit{Resp.}$$

Portanto $y' = \dfrac{d}{dx}(3\,x^2 + 5) = 6\,x.$

Exemplo ilustrativo 2. Derivar $x^3 - 2\,x + 7$.

Solução. Ponhamos $y = x^3 - 2\,x + 7$.

Primeiro passo.
$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^3 - 2\,(x + \Delta x) + 7 \\ &= x^3 + 3\,x^2 . \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\,x - 2 \cdot \Delta x + 7. \end{aligned}$$

Segundo passo.
$$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= x^3 + 3\,x^2 \cdot \Delta x + 3\,x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\,x - 2 . \Delta x + 7 \\ y &= x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2\,x \qquad + 7 \\ \hline \Delta y &= \qquad 3\,x^2 \cdot \Delta x + 3\,x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \qquad - 2 \cdot \Delta x \end{array}$$

Terceiro passo. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3\,x^2 + 3\,x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2.$

Quarto passo. Façamos, no segundo membro, $\Delta x \to 0$. Vem, por (A),

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x^2 - 2. \ \textit{Resp.}$$

Portanto $y' = \dfrac{d}{dx}(x^3 - 2\,x + 7) = 3\,x^2 - 2.$

Exemplo ilustrativo 3. Derivar $\dfrac{c}{x^2}$.

Solução. Ponhamos $y = \dfrac{c}{x^2}$.

Primeiro passo. $y + \Delta y = \dfrac{c}{(x + \Delta x)^2}$.

Segundo passo.
$$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= \dfrac{c}{(x + \Delta x)^2} \\ y &= \dfrac{c}{x^2} \\ \hline \Delta y &= \dfrac{c}{(x + \Delta x)^2} - \dfrac{c}{x^2} = \dfrac{-\,c \cdot \Delta x(2\,x + \Delta x)}{x^2(x + \Delta x)^2}. \end{array}$$

Terceiro passo. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \cdot \frac{2x + \Delta x}{x^2 (x + \Delta x)^2}$.

Quarto passo. Façamos no segundo membro, $\Delta x \to 0$. Vem, por (A).

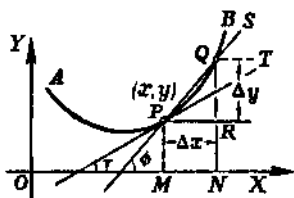
$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2x}{x^2 (x)^2} = -\frac{2c}{x^3}. \quad \textit{Resp.} \quad \left(y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2c}{x^3}\right).$$

PROBLEMAS

Use a Regra Geral para derivar as funções abaixo.

		Resp.			*Resp.*
1.	$y = 2 - 3x$.	$y' = -3$.	12.	$y = \frac{1}{1 - 2x}$.	$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(1-2x)^2}$.
2.	$y = mx + b$.	$y' = m$.			
3.	$y = ax^2$.	$y' = 2ax$.	13.	$\rho = \frac{\theta}{\theta + 2}$.	$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2}{(\theta + 2)^2}$.
4.	$s = 2t - t^2$.	$s' = 2 - 2t$.			
5.	$y = cx^3$.	$y' = 3cx^2$.	14.	$s = \frac{At + B}{Ct + D}$.	$\frac{ds}{dt} = \frac{AD - BC}{(Ct + D)^2}$.
6.	$y = 3x - x^3$.	$y' = 3 - 3x^2$.			
7.	$u = 4v^2 + 2v^3$.	$u' = 8v + 6v^2$.	15.	$y = \frac{x^3 + 1}{x}$.	$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{1}{x^2}$.
8.	$y = x^4$.	$y' = 4x^3$.			
9.	$\rho = \frac{2}{\theta + 1}$.	$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2}{(\theta+1)^2}$.	16.	$y = \frac{1}{x^2 + a^2}$.	$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2+a^2)^2}$.
10.	$y = \frac{3}{x^2+2}$.	$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x}{(x^2+2)^2}$.	17.	$y = \frac{x}{x^2 + 1}$.	$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$.
11.	$s = \frac{t + 4}{t}$.	$\frac{ds}{dt} = -\frac{4}{t^2}$.	18.	$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$.	$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{(4 - x^2)^2}$.

19. $y = 3x^2 - 4x - 5$.
20. $s = at^2 + bt + c$.
21. $u = 2v^3 - 3v^2$.
22. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
23. $\rho = (a - b\theta)^2$.
24. $y = (2 - x)(1 - 2x)$.
25. $y = (Ax + B)(Cx + D)$.
26. $s = (a + bt)^3$.
27. $y = \frac{x}{a + bx^2}$.
28. $y = \frac{a + bx^2}{x^2}$.
29. $y = \frac{x^2}{a + bx^2}$.

28. — Interpretação geométrica da derivada. Nas aplicações do Cálculo Diferencial à Geometria é fundamental o teorema que damos abaixo. Para estabelecê-lo, é mister, primeiro, recordar a definição de reta tangente a uma curva num ponto P da curva. Por P e por um outro ponto Q da curva (V. figura) tracemos uma reta PQ. Fazendo Q tender a P, movendo-se sobre a curva, a reta PQ girará em torno de P e a sua posição limite é a tangente em P.

Seja

$$(1) \qquad y = f(x)$$

a equação da curva AB. (V. figura).

Derivemos (1) pela Regra Geral e interpretemos cada passo geomètricamente pela figura. Escolhamos um ponto $P(x, y)$ sobre a curva e um segundo ponto $Q(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ próximo a P, também sobre a curva.

Primeiro Passo. $\qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad = NQ$

Segundo Passo. $\qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad = NQ$

$$\underline{y \qquad\quad = f(x)} \qquad = MP = NR$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad = RQ$$

Terceiro Passo. $\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{RQ}{MN} \quad = \dfrac{RQ}{PR}$

$$= \text{tg âng. } RPQ = \text{tg } \phi$$

$$= \text{coeficiente angular da reta } PQ.$$

Vemos, pois, que a razão entre os acréscimos Δy e Δx é igual ao coeficiente angular da reta que passa por $P(x, y)$ e $Q(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$, situados sobre o gráfico de $f(x)$.

Examinemos o significado geométrico do Quarto Passo. O valor de x está fixado, logo P é um ponto fixo sobre a curva. Quando Δx varia tendendo a zero, o ponto Q também varia. Varia *sobre a curva* e tende a P. Conseqüentemente, a reta PQ varia, rodando

em tôrno de P e aproximando-se cada vez mais da tangente à curva no ponto P, com a qual, por fim, coincide. Na figura,

$$\phi = \text{inclinação da reta } PQ$$
$$\tau = \text{inclinação da reta tangente } PT;$$

logo, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \phi = \tau$. Supondo que $\operatorname{tg} \phi$ seja uma função contínua (v. § 70), temos pois,

Quarto Passo. $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \tau,$

$= \text{coeficiente angular da reta tangente em } P.$

Obtivemos, assim, o importante

Teorema. *O valor da derivada na abscissa de um ponto de uma curva é igual ao coeficiente angular da tangente à curva nesse ponto.*

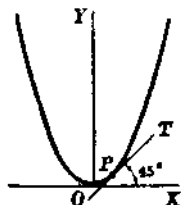
Foi este problema da tangente que conduziu Leibnitz* à descoberta do Cálculo Diferencial.

Exemplo ilustrativo. Achar os coeficientes angulares das tangentes à parábola $y = x^2$ no vértice e no ponto onde $x = \frac{1}{2}$.

Solução. Derivando pela Regra Geral (§ 27), obtemos

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ = coeficiente angular da tangente à curva num ponto (x, y) qualquer.

Para achar o coeficiente angular da tangente no vértice, faz-se $x = 0$, o que dá

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Conseqüentemente, a tangente no vértice tem o coeficiente angular igual a zero, isto é, é paralela ao eixo dos xx e, nêste caso, coincide com ele.

Para achar o coeficiente angular da tangente no ponto P, onde $x = \frac{1}{2}$, substituamos em (2), x pelo valor $\frac{1}{2}$; virá

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

isto é, a tangente no ponto P faz um ângulo de 45° com o eixo dos xx.

* Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) nasceu em Leipzig. Contribuiu notàvelmente para o desenvolvimento de diversos ramos do saber. Suas descobertas no Cálculo foram publicadas pela revista *Acta Eruditorum*, de Leipzig, em 1684. Sabe-se, contudo, que na época já existiam manuscritos sobre os "Fluxions" de Newton e alguns acham que deles Leibnitz tirara as novas idéias. Considera-se atualmente, ao que parece, que Newton e Leibnitz inventaram o Cálculo independentemente um do outro.

PROBLEMAS

Achar por derivação o coeficiente angular e a inclinação da tangente a cada uma das curvas abaixo, no ponto indicado. Verificar o resultado traçando a curva e a tangente.

1. $y = x^2 - 2$, onde $x = 1$. *Resp.*: 2; 63° 26′.

2. $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$, onde $x = 3$.

3. $y = \frac{4}{x-1}$, onde $x = 2$.

4. $y = 3 + 3x - x^3$, onde $x = -1$.

5. $y = x^3 - 3x^2$, onde $x = 1$.

6. Ache o ponto sobre a curva $y = 5x - x^2$ onde a inclinação da tangente é 45°. *Resp.*: (2, 6).

7. Ache os pontos sobre a curva $y = x^3 + x$ onde a tangente é paralela à reta $y = 4x$. *Resp.*: (1, 2), (−1, −2).

Em cada um dos três problemas seguintes achar (*a*) os pontos de interseção do dado par de curvas; (*b*) o coeficiente angular e a inclinação da tangente a cada curva; (*c*) o ângulo entre as tangentes em cada ponto de interseção (v. (2), p. 3).

8. $y = 1 - x^2$. *Resp.*: Ângulo de interseção
$y = x^2 - 1$. $= \text{arc tg } \frac{4}{3} = 53° 8'$.

9. $y = x^2$,
$x - y + 2 = 0$.

10. $y = x^3 - 3x$,
$2x + y = 0$.

11. Ache o ângulo de interseção entre as curvas $9y = x^3$ e $y = 6 + 8x - x^3$ no ponto (3, 3). *Resp.*: 21° 27′.

CAPÍTULO IV

REGRAS DE DERIVAÇÃO

29. — Importância da regra geral. A Regra Geral de derivação, dada no último capítulo (§ 27), é fundamental. É muito importante que o leitor esteja bem familiarizado com ela. Contudo, a sua aplicação é em geral, monótona ou difícil; daí, o fato de se deduzir regras particulares de derivação, aplicáveis a dados tipos de funções, de uso freqüente no Cálculo.

É conveniente exprimir estas regras particulares por meio de fórmulas, o que faremos, dando a seguir uma primeira lista delas. O leitor deve não somente decorar cada uma das fórmulas, como também ser capaz de estabelecer a correspondente regra em palavras.

FÓRMULAS DE DERIVAÇÃO*

I $$\frac{dc}{dx} = 0.$$

II $$\frac{dx}{dx} = 1.$$

III $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx} \cdot$$

IV $$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx} \cdot$$

V $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \cdot$$

VI $$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx} \cdot$$

* Nestas fórmulas, u, v e w são funções deriváveis de x.

VI a $\quad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$

VII. $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$

VII a $\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$

VIII $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$, sendo y uma função de v.

IX $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, sendo y uma função de x.

30. Derivação de uma constante. Uma função que toma o mesmo valor para cada valor da variável independente é constante e podemos indicá-la por

$$y = c$$

A função não muda de valor quando se dá a x um acréscimo Δx, isto é, $\Delta y = 0$, qualquer que seja Δx; logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

ou seja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 0.$$

I $$\therefore \frac{dc}{dx} = 0.$$

A derivada de uma constante é zero.

O resultado era fácil de imaginar, pois a equação $y = c$ representa uma reta paralela a OX e, portanto, de coeficiente angular igual a zero. Ora, o coeficiente angular é o valor da derivada (§ 28); logo, esta é nula.

31. — Derivação de uma variável em relação a si própria.

Seja $$y = x.$$

Seguindo a Regra Geral (§ 27), temos

PRIMEIRO PASSO. $y + \Delta y = x + \Delta x.$

SEGUNDO PASSO. $\Delta y = \Delta x.$

TERCEIRO PASSO. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$

QUARTO PASSO. $\frac{dy}{dx} = 1.$

II $\therefore \frac{dx}{dx} = 1.$

A derivada de uma variável em relação a si própria é um.

Este resultado podia ser previsto fàcilmente, pois o coeficiente angular da reta $y = x$ é um.

32. — Derivação de uma soma.

Seja $y = u + v - w.$

Pela Regra Geral,

PRIMEIRO PASSO. $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w.$

SEGUNDO PASSO. $\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$

TERCEIRO PASSO. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$

Ora (§ 24),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx}.$$

Logo, por (1), § 16.

QUARTO PASSO. $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$

III $\therefore \frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$

A demonstração para a soma algébrica de um número finito qualquer de funções é análoga.

A derivada da soma algébrica de n funções é igual à soma algébrica das derivadas das parcelas, sendo n um inteiro positivo fixo.

33. — Derivada do produto de uma constante por uma função.

Seja $$y = cv.$$

Pela Regra Geral,

PRIMEIRO PASSO. $y + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c\Delta v.$

SEGUNDO PASSO. $\Delta y = c\Delta v.$

TERCEIRO PASSO. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = c\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot$

Logo, por (4), § 16,

QUARTO PASSO. $\dfrac{dy}{dx} = c\dfrac{dv}{dx}\cdot$

IV $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}\cdot$$

A derivada do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela derivada da função.

34. — Derivação do produto de duas funções.

Seja $$y = uv.$$

Pela Regra Geral,

PRIMEIRO PASSO. $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$

Feita a multiplicação, tem-se

$$y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

SEGUNDO PASSO. $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$

TERCEIRO PASSO. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot$

Aplicando (2) e (4), § 16, notando que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, e que, portanto, o limite do produto $\Delta u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ é zero, vem

QUARTO PASSO. $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}\cdot$

$$\text{V} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

A derivada do produto de duas funções é igual à primeira função vêzes a derivada da segunda, mais a segunda função vezes a derivada da primeira.

35. — Derivada do produto de n funções, sendo n um inteiro positivo fixo. Dividindo-se ambos os membros de V por uv, tem-se

$$\frac{\frac{d}{dx}(uv)}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

Por isto, para um produto de n funções

$$y = v_1 v_2 \ldots v_n,$$

pode-se pôr

$$\frac{\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \ldots v_n)}{v_1 v_2 \ldots v_n} = \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{d}{dx}(v_2 v_3 \ldots v_n)}{v_2 v_3 \ldots v_n}$$

$$= \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\frac{d}{dx}(v_3 v_4 \ldots v_n)}{v_3 v_4 \ldots v_n}$$

$$= \frac{\frac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\frac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\frac{dv_3}{dx}}{v_3} + \ldots + \frac{\frac{dv_n}{dx}}{v_n}.$$

Multiplicando ambos os membros por $v_1 v_2 \ldots v_n$, obtemos

$$\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \ldots v_n) = (v_2 v_3 \ldots v_n)\frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \ldots v_n)\frac{dv_2}{dx} + \ldots +$$

$$+ (v_1 v_2 \ldots v_{n-1})\frac{dv}{dx}.$$

A derivada do produto de n funções, sendo n fixo, é igual à soma dos n produtos que podem ser formados multiplicando a derivada de cada função por todas as outras funções.

36. — Derivação de uma função com expoente constante. A Regra da Potência. Se os n fatores no resultado acima são todos iguais a v, obtemos

$$\frac{\frac{d}{dx}(v^n)}{v^n} = n\frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

VI $$\therefore \frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

Se $v = x$, tem-se:

VI *a* $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Até agora, VI foi demonstrada somente para o caso de ser n um inteiro positivo. No § 65, contudo, mostraremos que a fórmula é também válida para n qualquer. Este resultado será usado agora.

A derivada de uma função com expoente constante é igual ao expoente vezes a função com o expoente diminuído de um, vezes a derivada da função.

Esta é a chamada *Regra da Potência.*

37. — Derivação de um quociente.

Seja $$y = \frac{u}{v}. \qquad (v \neq 0)$$

Pela Regra Geral,

PRIMEIRO PASSO. $$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

SEGUNDO PASSO. $\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v\,(v + \Delta v)}.$

TERCEIRO PASSO. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(v + \Delta v)}.$

Aplicando (1)-(4), § 16,

QUARTO PASSO. $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$

$$\text{VII} \qquad \therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

A derivada de uma fração é igual ao denominador vezes a derivada do numerador, menos o numerador vezes a derivada do denominador, tudo dividido pelo quadrado do denominador.

Quando o denominador é constante, $v = c$, a VII fornece

$$\text{VII}\,a \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

$$\left[\text{pois } \frac{dv}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0.\right]$$

Podemos também obter VII a de IV, como segue:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

A derivada do quociente de uma função por uma constante é igual à derivada da função dividida pela constante.

PROBLEMAS*

Derive as seguintes funções.

1. $y = x^3$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. *Resp.* por VI a

$[n = 3]$

2. $y = ax^4 - bx^2$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = \dfrac{d}{dx}(ax^4) - \dfrac{d}{dx}(bx^2)$ por III

$= a\dfrac{d}{dx}(x^4) - b\dfrac{d}{dx}(x^2)$ por IV

$= 4ax^3 - 2bx$.
Resp. por VI a

3. $y = x^{\frac{4}{3}} + 5$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^{\frac{4}{3}}) + \dfrac{d}{dx}(5)$ por III

$= \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. *Resp.* por VI a e I

4. $y = \dfrac{3x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{7x}{\sqrt[3]{x^4}} + 8\sqrt[7]{x^3}$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x^{\frac{13}{5}}) - \dfrac{d}{dx}(7x^{-\frac{1}{3}}) + \dfrac{d}{dx}(8x^{\frac{3}{7}})$ por III

$= \frac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} + \frac{7}{3}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{24}{7}x^{-\frac{4}{7}}$. *Resp.* por IV e VI a

5. $y = (x^2 - 3)^5$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = 5(x^2 - 3)^4\dfrac{d}{dx}(x^2 - 3)$ por VI

$[v = x^2 - 3, \text{ e } n = 5.]$

$= 5(x^2 - 3)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 - 3)^4$. *Resp.*

Podiamos ter desenvolvido a função com a fórmula do binômio ((3), p. 1), e depois aplicado III, etc., mas o processo acima é preferível.

6. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(a^2 - x^2)$ por VI

* Quando aprendendo a derivar, o estudante deve fazer exercícios orais de derivação de funções simples.

$$[v = a^2 - x^2, \text{ e } n = \tfrac{1}{2}.]$$

$$= \tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\cdot \quad \textit{Resp.}$$

7. $y = (3x^2 + 2)\sqrt{1 + 5x^2}$.

Solução. $\dfrac{dy}{dx} = (3x^2 + 2)\dfrac{d}{dx}(1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(3x^2 + 2)$ por V

$$[u = 3x^2 + 2, \text{ e } v = (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}.]$$

$$= (3x^2 + 2)\tfrac{1}{2}(1 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1 + 5x^2) + (1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}\,6x \text{ por VI, etc.}$$

$$= (3x^2 + 2)(1 + 5x^2)^{-\frac{1}{2}}\,5x + 6x(1 + 5x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5x(3x^2 + 2)}{\sqrt{1 + 5x^2}} + 6x\sqrt{1 + 5x^2} = \frac{45x^3 + 16x}{\sqrt{1 + 5x^2}}\cdot \quad \textit{Resp.}$$

8. $y = \dfrac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Solução. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\dfrac{d}{dx}(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)\dfrac{d}{dx}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2 - x^2}$ por VII

$$= \frac{2x(a^2 - x^2) + x(a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

[Multiplicando o numerador e denominador por $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$]

$$= \frac{3a^2x - x^3}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot \quad \textit{Resp.}$$

Prove que:

9. $\dfrac{d}{dx}(3x^4 - 2x^2 + 8) = 12x^3 - 4x$.

10. $\dfrac{d}{dx}(4 + 3x - 2x^3) = 3 - 6x^2$

11. $\dfrac{d}{dt}(at^5 - 5bt^3) = 5at^4 - 15bt^2$.

12. $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^7}{7}\right) = z - z^6$.

13. $\dfrac{d}{dx}\sqrt{v} = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}\dfrac{dv}{dx}\cdot$

14. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}\cdot$

15. $\dfrac{d}{dt}(2t^{\frac{4}{3}} - 3t^{\frac{2}{3}}) = \frac{8}{3}t^{\frac{1}{3}} - 2t^{-\frac{1}{3}}.$

16. $\dfrac{d}{dx}(2x^{\frac{3}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}.$

17. $\dfrac{d}{dx}(x^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}.$

18. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{a + bx + cx^2}{x}\right) = c - \dfrac{a}{x^2}\cdot$

19. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\cdot \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\cdot$

20. $s = \dfrac{a + bt + ct^2}{\sqrt{t}}\cdot \qquad \dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{a}{2t\sqrt{t}} + \dfrac{b}{2\sqrt{t}} + \dfrac{3c\sqrt{t}}{2}\cdot$

21. $y = \sqrt{ax} + \dfrac{a}{\sqrt{ax}}\cdot \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{2\sqrt{ax}} - \dfrac{a}{2x\sqrt{ax}}\cdot$

22. $r = \sqrt{1 - 2\theta}. \qquad \dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\theta}}\cdot$

23. $f(t) = (2 - 3t^2)^3. \qquad f'(t) = -18t(2 - 3t^2)^2.$

24. $F(x) = \sqrt[3]{4 - 9x}. \qquad F'(x) = -\dfrac{3}{(4 - 9x)^{\frac{2}{3}}}\cdot$

25. $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\cdot \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot$

26. $f(\theta) = (2 - 5\theta)^{\frac{3}{5}}. \qquad f'(\theta) = -\dfrac{3}{(2 - 5\theta)^{\frac{2}{5}}}\cdot$

27. $y = \left(a - \dfrac{b}{x}\right)^2. \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2b}{x^2}\left(a - \dfrac{b}{x}\right).$

28. $y = \left(a + \dfrac{b}{x^2}\right)^3. \qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{6b}{x^3}\left(a + \dfrac{b}{x^2}\right)^2.$

29. $y = x\sqrt{a + bx}. \qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a + 3bx}{2\sqrt{a + bx}}\cdot$

30. $s = t\sqrt{a^2 + t^2}. \qquad \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{a^2 + 2t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}\cdot$

31. $y = \frac{a - x}{a + x}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{(a + x)^2}$.

32. $y = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x}{(a^2 - x^2)^2}$.

33. $y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$.

34. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

35. $r = \theta^2\sqrt{3 - 4\theta}$. $\frac{dr}{d\theta} = \frac{6\theta - 10\theta^2}{\sqrt{3 - 4\theta}}$.

36. $y = \sqrt{\frac{1 - cx}{1 + cx}}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{(1 + cx)\sqrt{1 - c^2x^2}}$.

37. $y = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{2a^2x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^4 - x^4}}$.

38. $s = \sqrt[3]{\frac{2 + 3t}{2 - 3t}}$. $\frac{ds}{dt} = \frac{4}{(2 + 3t)^{\frac{2}{3}}(2 - 3t)^{\frac{4}{3}}}$.

39. $y = \sqrt{2px}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$.

40. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

41. $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$.

Derivar as funções

42. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{3x}$.

43. $y = \frac{2 - x}{1 + 2x^2}$.

44. $y = \frac{x}{\sqrt{a - bx}}$.

45. $s = \frac{\sqrt{a + bt}}{t}$.

46. $r = \frac{\sqrt[3]{a + b\theta}}{\theta}$.

47. $y = x^2\sqrt{5 - 2x}$.

48. $y = x\sqrt[3]{2 + 3x}$.

49. $s = \sqrt{2t - \frac{1}{t^2}}$.

50. $y = (x + 2)^2\sqrt{x^2 + 2}$.

51. $y = \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt[3]{1 + 3x}}$.

Em cada um dos exercícios seguintes achar o valor de $\frac{dy}{dx}$ para o dado valor de x.

52. $y = (x^2 - x)^3$; $x = 3$. *Resp.* 540.

53. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$; $x = 64$. *Resp.* $\frac{1}{12}$.

54. $y = (2x)^{\frac{1}{3}} + (2x)^{\frac{2}{3}}$; $x = 4$. $\frac{5}{6}$.

55. $y = \sqrt{9 + 4x^2}$; $x = 2$. $\frac{8}{5}$.

56. $y = \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2}}$; $x = 3$. $\frac{3}{64}$.

57. $y = \dfrac{\sqrt{16 + 3x}}{x}$; $x = 3$. $-\frac{41}{90}$.

58. $y = x\sqrt{8 - x^2}$; $x = 2$. 0

59. $y = x^2\sqrt{1 + x^3}$; $x = 2$. 20.

60. $y = (4 - x^2)^3$; $x = 3$.

61. $y = \dfrac{x^2 + 2}{2 - x^2}$; $x = 2$.

62. $y = \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{2x + 1}$; $x = \frac{1}{2}$.

63. $y = x\sqrt{3 + 2x}$; $x = 3$.

64. $y = \sqrt{\dfrac{4x + 1}{5x - 1}}$; $x = 2$.

65. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 5}{10 - x^2}}$; $x = 3$.

38. — Derivação de uma função de função. Acontece muitas vezes que y, ao invés de ser definida diretamente como função de x, é dada como função de outra variável v, a qual é definida como função de x. Neste caso, y é uma função de x através de v e é chamada uma *função de função*.

Por exemplo, se
$$y = \frac{2v}{1 - v^2}$$
e
$$v = 1 - x^2,$$
então y é uma função de função. Eliminando v, podemos exprimir y diretamente como função de x, mas, em geral, quando se quer achar $\frac{dy}{dx}$, a eliminação não é o melhor caminho.

Se $y = f(v)$ e $v = \phi(x)$, então y é função de x através de v. Por isto, dado um acréscimo Δx a x, v será acrescida de um certo Δv e também y de um certo acréscimo Δy. Tendo isto presente

apliquemos a Regra Geral simultâneamente às duas funções

$$y = f(v) \quad \text{e} \quad v = \phi(x).$$

PRIMEIRO PASSO. $y + \Delta y = f(v + \Delta v) \qquad v + \Delta v = \phi(x + \Delta x)$

SEGUNDO PASSO. $y + \Delta y = f(v + \Delta v) \qquad v + \Delta v = \phi(x + \Delta x)$

$$\frac{\begin{array}{l} y \qquad = f(v) \end{array}}{\Delta y = f(v + \Delta v) - f(v)} \qquad \frac{\begin{array}{l} v \qquad = \phi(x) \end{array}}{\Delta v = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)}.$$

TERCEIRO PASSO. $\dfrac{\Delta y}{\Delta v} = \dfrac{f(v + \Delta v) - f(v)^*}{\Delta v}, \quad \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x}.$

Os primeiros membros mostram uma forma da razão entre o acréscimo de cada função e o acréscimo da correspondente variável e os segundos membros fornecem as mesmas razões em outra forma. Antes de passar ao limite façamos o produto destas duas razões, escolhendo, para isto, as formas dos primeiros membros. Virá

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

QUARTO PASSO. Façamos $\Delta x \rightarrow 0$; então $\Delta v \rightarrow 0$ e a igualdade acima fornece

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \text{por (2), § 16}$$

Isto pode ser escrito também sob a forma

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} = f'(v)\,\phi'(x)$$

Se $y = f(x)$ e $v = \phi(x)$, a derivada de y em relação a x é igual ao produto da derivada de y em relação a v pela derivada de v em relação a x.

39. — Derivação das funções inversas. Seja dada a função

$$y = f(x)$$

e suponhamos, o que sucederá com muitas das funções consideradas neste livro, que a equação $y = f(x)$ permita exprimir x em termos de y.

$$x = \phi(y);$$

* Supondo $\Delta v \neq 0$ (N. T.).

dizemos, nêste caso, que

$$f(x) \quad \text{e} \quad \phi(x)$$

são *funções inversas* uma da outra. Como $f(x)$ foi dada inicialmente e a partir dela construímos $\phi(y)$, costuma-se também dizer que $f(x)$ é a *função direta* e $\phi(y)$ a *função inversa*. Esta nomenclatura é usada somente quando há interesse em distinguir qual das funções foi dada a princípio. Assim, nos exemplos que seguem, dando-se inicialmente as funções da primeira coluna, as correspondentes da segunda são as funções inversas.

$$y = x^2 + 1, \qquad x = \pm\sqrt{y-1}.$$

$$y = a^x, \qquad x = \log_a y.$$

$$y = \text{sen}\, x, \qquad x = \text{arc sen}\, y.$$

Pela Regra Geral derivemos, simultâneamente, as funções inversas

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad x = \phi(y).$$

Temos, sendo Δx arbitrário,

PRIMEIRO PASSO. $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad x + \Delta x = \phi(y + \Delta y).$

SEGUNDO PASSO. $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad x + \Delta x = \phi(y + \Delta y)$

$$\frac{y \qquad = f(x)}{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)} \quad \frac{x \qquad = \phi(y)}{\Delta x = \phi(y+\Delta y) - \phi(y)}.$$

TERCEIRO PASSO. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{\phi(y+\Delta y) - \phi(y)^*}{\Delta y}.$

Tem-se, pois, multiplicando membro a membro:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\phi(y+\Delta y) - \phi(y)}{\Delta y} = 1.$$

QUARTO PASSO. Façamos $\Delta x \to 0$. Então $\Delta y \to 0$ porque $f(x)$ é derivável, e se tem:

* Supondo $\Delta y \neq 0$ (N. T.).

$$(C) \qquad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \qquad \text{por (2), § 16}$$

ou

$$(D) \qquad f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}.$$

A derivada da função inversa de uma função $f(x)$ é igual ao inverso da derivada de $f(x)$.

40. — Funções implícitas. Quando uma relação entre x e y é dada por uma equação da forma $f(x, y) = 0$, diz-se que y é uma *função implícita* de x. Por exemplo, a equação

$$(1) \qquad x^2 - 4y = 0$$

define y como função implícita de x. Evidentemente, a equação define também x como função implícita de y.

Algumas vezes é possível exprimir uma das variáveis por intermédio da outra, obtendo-se, assim, uma *função explícita*. Por exemplo, a equação (1) fornece

$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

ou seja, y como função explícita de x. Em geral, porém, tal fato ou é impossível ou então muito complicado para uso conveniente.

41. Derivação das funções implícitas. Quando y é definida como função implícita de x, pode não ser oportuno, como foi explicado no último parágrafo, achar y em termos de x ou x em termos de y (isto é, exprimir y como função explícita de x, ou x como função explícita de y). Nêste caso, aplicamos a regra:

Derivamos os membros da equação dada, considerando y como função de x e depois achamos o valor de $\frac{dy}{dx}$.

Esta regra será justificada no § 231. Só valores correspondentes de x e y que satisfazem a dada equação podem ser substituídos na derivada.

Apliquemos a regra acima para achar $\frac{dy}{dx}$ de

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10.$$

Temos $\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10);$

$$6ax^5 + 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(2x^3 - 7xy^6)\frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7xy^6}. \quad \textit{Resp.}$$

O leitor deve observar que, em geral, o resultado contém x e y.

PROBLEMAS

Obter $\frac{dy}{dx}$ de cada uma das seguintes funções

1. $y = u^6,\ u = 1 + 2\sqrt{x}.$ *Resp.* $\frac{dy}{dx} = \frac{6u^5}{\sqrt{x}}.$

2. $y = \sqrt{2u} - u^2,\ u = x^3 - x.$ $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{2u}} - 2u\right)(3x^2 - 1).$

3. $y = \frac{a-u}{a+u},\ u = \frac{b-x}{b+x}.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{4ab}{(a+u)^2(b+x)^2}.$

4. $y = u\sqrt{a^2-u^2},\ u = \sqrt{1-x^2}.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2u^2-a^2)}{\sqrt{(a^2-u^2)(1-x^2)}}.$

5. $15x = 15y + 5y^3 + 3y^5.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+y^2+y^4}.$

6. $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{6y^{\frac{2}{3}}}{3y^{\frac{1}{6}} + 2}.$

7. $y^2 = 2px.$
8. $x^2 + y^2 = r^2.$
9. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$
10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$
11. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$
12. $x^3 - 3axy + y^3 = 0.$
13. $x^3 + 3x^2y + y^3 = c^3.$
14. $x + 2\sqrt{xy} + y = a.$
15. $x^2 + a\sqrt{xy} + y^2 = b^2.$
16. $x^4 + 4x^3y + y^4 = 20.$
17. $ax^3 - 3b^2xy + cy^3 = 1.$
18. $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 6.$

Achar o coeficiente angular de cada uma das curvas abaixo, no ponto dado.

19. $x^2 + xy + 2y^2 = 28$; $(2, 3)$. *Resp.* $-\frac{1}{2}$.

20. $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$; $(2, -1)$. $-\frac{3}{5}$.

21. $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5$; $(2, 3)$.

22. $x^2 - 2\sqrt{xy} - y^2 = 52$; $(8, 2)$.

23. $x^3 - axy + 3ay^2 = 3a^3$; (a, a).

24. $x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 = 6$; $(4, 1)$.

25. Mostrar que as parábolas $y^2 = 2px + p^2$ e $y^2 = p^2 - 2px$ cortam-se ortogonalmente.

26. Mostrar que a circunferência $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0$ é tangente à circunferência $x^2 + y^2 + 2x + y = 10$ no ponto $(2, 1)$.

27. Sob que ângulo a reta $y = 2x$ corta a curva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$?

28. Se $f(x)$ e $\phi(y)$ são funções inversas uma da outra, mostre que o gráfico de $\phi(x)$ pode ser obtido como segue: construindo-se o gráfico de $-f(x)$ e fazendo-o girar em volta da origem, no sentido ante-horário, de um ângulo de 90°.

OUTROS PROBLEMAS

1. O vértice da parábola $y^2 = 2px$ é o centro de uma elipse. O foco da parábola é um extremo de um dos eixos principais da elipse. A parábola e a elipse cortam-se ortogonalmente. Achar a equação da elipse. *Resp.* $4x^2 + 2y^2 = p^2$.

2. Uma circunferência de centro em $(2a, 0)$ corta ortogonalmente a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Achar o raio da circunferência.

Resp. $r^2 = \frac{3}{4}(3a^2 + b^2)$.

3. De um ponto P de uma elipse traçam-se retas passando pelos focos. Prove que estas retas fazem ângulos agudos iguais com a normal à elipse no ponto P.

4. Prove que a reta $Bx + Ay = AB$ é tangente à elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ se, e somente se, $B^2a^2 + A^2b^2 = A^2B^2$.

5. Ache a equação da tangente à curva $x^my^n = a^{m+n}$ num ponto qualquer. Prove que a parte dela compreendida entre os eixos é dividida pelo ponto de contato na razão m/n.

Resp. $my_1(x - x_1) + nx_1(y - y_1) = 0$.

6. Se k é o coeficiente angular de uma tangente à hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, provar que $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$ é a equação dela e que o lugar dos pontos de interseção das tangentes perpendiculares é $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

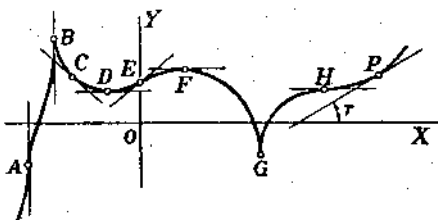
CAPÍTULO V

VÁRIAS APLICAÇÕES DA DERIVADA

42. — Direção de uma curva. Viu-se no § 28 que se

$$y = f(x)$$

é a equação de uma curva (ver figura), então

$$\frac{dy}{dx} = \textit{coeficiente angular da tangente à curva no ponto } P(x, y).$$

A direção de uma curva em um ponto qualquer é, por definição, a direção da tangente à curva nesse ponto. Seja τ = inclinação da tangente. Então, *coeficiente angular* = $\operatorname{tg} \tau$, e portanto

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau = \textit{coeficiente angular da curva no ponto } P(x, y).$$

Em pontos como D, F, H, onde a direção da curva é paralela ao eixo dos xx, ou seja, *a tangente é horizontal*,

$$\tau = 0; \text{ portanto } \frac{dy}{dx} = 0.$$

Em pontos como A, B, G, onde a direção da curva é perpendicular ao eixo dos xx, ou seja, *a tangente é vertical*,

$$\tau = 90°; \text{ portanto } \frac{dy}{dx} \text{ é infinita.}$$

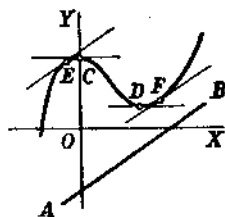
Exemplo ilustrativo 1. Dada a curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ (ver figura):

(a) Achar a inclinação τ quando $x = 1$;

(b) Achar τ quando $x = 3$;

(c) Achar os pontos onde a direção da curva é paralela a OX;

(d) Achar os pontos onde $\tau = 45°$;

(e) Achar os pontos onde a direção da curva é paralela à reta $2x - 3y = 6$ (reta AB).

Solução. Derivando, $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x = \text{tg}\, \tau$.

(a) Para $x = 1$, $\text{tg}\, \tau = 1 - 2 = -1$; logo $\tau = 135°$. *Resp.*

(b) Para $x = 3$, $\text{tg}\, \tau = 9 - 6 = 3$; logo $\tau = 71°34'$. *Resp.*

(c) Para $\tau = 0$, $\text{tg}\, \tau = 0$; logo $x^2 - 2x = 0$. Resolvendo esta equação, obtemos $x = 0$ ou 2. Substituindo na equação da curva, achamos $y = 2$ quando $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$ quando $x = 2$. Logo, as tangentes em $C\,(0, 2)$ e $D\left(2, \frac{2}{3}\right)$ são horizontais. *Resp.*

(d) Quando $\tau = 45°$, $\text{tg}\, \tau = 1$; logo $x^2 - 2x = 1$. Resolvendo esta equação, obtemos $x = 1 \pm \sqrt{2} = 2{,}41$ e $-0{,}41$, abscissas de dois pontos onde o coeficiente angular da curva (ou tangente) é a unidade.

(e) Coeficiente angular da dada reta $= \frac{2}{3}$; logo, $x^2 - 2x = \frac{2}{3}$. Resolvendo, obtemos $x = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = 2{,}29$ e $-0{,}29$, abscissas dos pontos F e E onde a direção da dada curva (ou tangente) é paralela à reta AB.

Como uma curva tem, em cada ponto, a mesma direção que a tangente a ela nesse ponto, o ângulo entre duas curvas num ponto comum será o ângulo entre as tangentes a elas nesse ponto.

Exemplo ilustrativo 2. Achar o ângulo de interseção dos círculos

$$(A) \qquad x^2 + y^2 - 4x = 1,$$

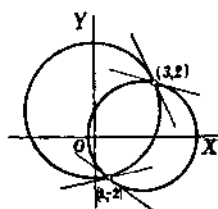
$$(B) \qquad x^2 + y^2 - 2y = 9.$$

Solução. Resolvendo o sistema, achamos que os pontos de interseção são $(3, 2)$ e $(1, -2)$.

Seja m_1 = coef. ang. da tangente ao círculo (A) em (x, y),

e m_2 = coef. ang. da tangente ao círculo (B) em (x, y).

Então, de (A), $m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{2 - x}{y}$, pelo § 41

e de (B), $m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - y}$, pelo § 41

Fazendo $x = 3$, $y = 2$, temos

$$m_1 = -\frac{1}{2} = \text{coef. ang. da tangente a } (A) \text{ em } (3, 2).$$

$$m_2 = -3 = \text{coef. ang. da tangente a } (B) \text{ em } (3, 2).$$

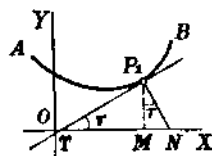
A fórmula para achar o ângulo θ entre duas retas cujos coeficientes angulares são m_1 e m_2 é

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}. \qquad (2), \S\ 3$$

Substituindo, $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1$; $\therefore$ $\theta = 45^\circ$. *Resp.*

Este é também o ângulo de interseção no ponto $(1, -2)$.

43. — Equações da tangente e normal; subtangente e subnormal. A equação de uma reta passando pelo ponto (x_1, y_1) e tendo o coeficiente angular m é

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (3), \S\ 3$$

Se a reta é tangente à curva AB no ponto $P_1(x_1 y_1)$ então m é igual ao coeficiente angular da curva em (x_1, y_1). Indiquemos este valor de m por m_1. Então, no ponto de contato $P_1(x_1, y_1)$ a *equação da tangente* TP_1 é

$$(1) \qquad y - y_1 = m_1(x - x_1).$$

Sendo a normal perpendicular à tangente, o coeficiente angular dela é o recíproco de m_1 com sinal trocado ((2), § 3). Temos, pois, que *a equação da normal* P_1N é

$$(2) \qquad y - y_1 = -\frac{1}{m_1}(x - x_1),$$

pois que essa reta passa pelo ponto de contato $P_1(x_1 y_1)$.

O comprimento da porção da tangente compreendida entre o ponto de contato e OX diz-se o *comprimento da tangente* ($= TP_1$) e a projeção dessa porção sôbre o eixo dos xx chama-se *subtangente* ($=TM$). Semelhantemente, temos o *comprimento da normal* ($=P_1N$) e a *subnormal* ($= MN$).

No triângulo TP_1M, $\operatorname{tg} \tau = m_1 = \frac{MP_1}{TM}$; logo

$$(3) \qquad TM^* = \frac{MP_1}{m_1} = \frac{y_1}{m_1} = \textit{comprimento da subtangente.}$$

No triângulo MP_1N, $\operatorname{tg} \tau = m_1 = \frac{MN}{MP_1}$; logo

$$(4) \qquad MN^* = m_1 MP_1 = m_1 y_1 = \textit{comprimento da subnormal.}$$

O comprimento da tangente (TP_1) e o comprimento da normal (P_1N) podem, pois, ser obtidos diretamente da figura, pois cada um deles é a hipotenusa de um triângulo retângulo tendo dois catetos conhecidos.

Quando o comprimento da subtangente ou subnormal em um ponto de uma curva é conhecido, a tangente e a normal podem ser construídas fàcilmente.

PROBLEMAS

1. Achar as equações da tangente e normal e os comprimentos da subtangente, subnormal, tangente e normal, no ponto (a, a) da cissóide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

SOLUÇÃO. $\frac{dy}{dx} = \frac{3ax^2 - x^3}{y(2a - x)^2}$.

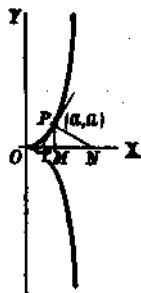
Fazendo $x = a$, $y = a$, temos

$$m_1 = \frac{3a^3 - a^3}{a(2a - a)^2} = 2 = \text{coef. ang. da tangente.}$$

A substituição em (1) dá

$y = 2x - a$, equação da tangente.

A substituição em (2) dá

$2y + x = 3a$, equação da normal.

* A subtangente e subnormal são segmentos orientados. Quando T está à esquerda de M, a subtangente é positiva; em caso contrário, negativa. Convenção semelhante faz-se para a subnormal.

A substituição em (3) dá $TM = \frac{a}{2}$ = comprimento da subtangente.

A substituição em (4) dá $MN = 2a$ = comprimento da subnormal.

Logo, $PT = \sqrt{(TM)^2 + (PM)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ = comprimento da tang.

e $PN = \sqrt{(MN)^2 + (PM)^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ = comprimento da normal.

Achar as equações da tangente e da normal no ponto dado.

2. $y = x^3 - 3x$; $(2, 2)$. *Resp.* $9x - y - 16 = 0$, $x + 9y - 20 = 0$.

3. $y = \frac{2x + 1}{3 - x}$; $(,2\ 5)$. $7x - y - 9 = 0$, $x + 7y - 37 = 0$.

4. $2x^2 - xy + y^2 = 16$; $(3, 2)$.

5. $y^2 + 2y - 4x + 4 = 0$; $(1, -2)$.

6. Achar as equações da tangente e da normal à elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ no ponto (x_1, y_1).

Resp. $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, $a^2y_1x - b^2x_1y = x_1y_1(a^2 - b^2)$.

7. Achar as equações da tangente e da normal e os comprimentos da subtangente e da subnormal no ponto (x_1, y_1) do círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

Resp. $x_1x + y_1y = r^2$, $x_1y - y_1x = 0$, $-\frac{y_1^2}{x_1}$, $-x_1$.

8. Mostre que a subtangente à parábola $y^2 = 2px$ é dividida ao meio pelo vértice e que a subnormal é constante e igual a p.

Achar as equações da tangente e da normal e os comprimentos da subtangente e da subnormal a cada uma das seguintes curvas nos pontos indicados.

9. $ay = x^2$; (a, a). *Resp.* $2x - y = a$, $x + 2y = 3a$, $\frac{a}{2}$, $2a$.

10. $x^2 - 4y^2 = 9$; $(5, 2)$. $5x - 8y = 9$, $8x + 5y = 50$, $\frac{16}{5}$, $\frac{5}{4}$.

11. $9x^2 + 4y^2 = 72$; $(2, 3)$.

12. $xy + y^2 + 2 = 0$; $(3, -2)$.

13. Achar a área do triângulo formado pelo eixo dos xx, a tangente e a normal à curva $y = 6x - x^2$ no ponto $(5, 5)$. *Resp.* $\frac{425}{8}$.

14. Achar a área do triângulo formado pelo eixo dos yy, a tangente e a normal à curva $y^2 = 9 - x$ no ponto $(5, 2)$.

Achar os ângulos de interseção de cada um dos seguintes pares de curvas.

15. $y^2 = x + 1,\ x^2 + y^2 = 13.$ *Resp.* $109°\,39'$.

16. $y = 6 - x^2,\ 7x^2 + y^2 = 32.$

Resp. Em $(\pm 2, 2)$, $5°\,54'$; em $(\pm 1, 5)$, $8°\,58'$.

17. $y = x^2,\ y^2 - 3y = 2x.$

18. $x^2 + 4y^2 = 61,\ 2x^2 - y^2 = 41.$

Achar os pontos de contato das tangentes horizontais e verticais a cada uma das curvas seguintes.

19. $y = 5x - 2x^2.$ *Resp.* Horizontal, $\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{8}\right)$.

20. $3y^2 - 6y - x = 0.$ Vertical, $(-3, 1)$.

21. $x^2 + 6xy + 25y^2 = 16.$ Horizontal, $(3, -1,)\ (-3, 1)$.
Vertical, $(5, -\frac{3}{5}), (-5, \frac{3}{5})$.

22. $x^2 - 8xy + 25y^2 = 81.$

23. $x^2 - 24xy + 169y^2 = 25.$

24. $169x^2 + 10xy + y^2 = 144.$

25. Mostrar que a hipérbole $x^2 - y^2 = 5$ e a elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ cortam-se ortogonalmente.

26. Mostrar que o círculo $x^2+y^2=8ax$ e a cissóide $(2a-x)y^2=x^3$.

(a) são ortogonais na origem;

(b) cortam-se sob um ângulo de 45° em dois outros pontos (V. figura no Capítulo XXVI).

27. Mostrar que as tangentes ao folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ nos pontos onde ele encontra a parábola $y^2 = ax$ são paralelas ao eixo dos yy (V. figura no Capítulo XXVI).

28. Achar a equação da normal à parábola $y = 5x + x^2$ que faz um ângulo de 45° com o eixo dos xx.

29. Achar as equações das tangentes ao círculo $x^2 + y^2 = 58$ que são paralelas à reta $3x - 7y = 19$.

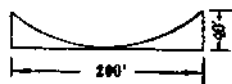
30. Achar as equações das normais a hipérbole $4x^2 - y^2 = 36$ que são paralelas à reta $2x + 5y = 4$.

31. Achar as equações das duas tangentes à elipse $4x^2 + y^2 = 72$ que passam pelo ponto $(4, 4)$. *Resp.* $2x + y = 12$, $14x+y = 60$.

32. Mostrar que a soma dos segmentos interceptados sobre os eixos coordenados pela tangente em um ponto qualquer da parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ é constante e igual a a, (V. figura no Capítulo XXVI).

33. Dada a hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, mostrar que o comprimento da porção da tangente, em um ponto qualquer da curva, compreendido entre os eixos coordenados é constante e igual a a. (V. figura no Capítulo XXVI).

34. Uma bola foi lançada. A equação da trajetória que seguiu é $y = x - \frac{x^2}{100}$; a unidade de comprimento é o metro, o eixo dos xx é horizontal e a bola foi atirada da origem. Pergunta-se: (a) sob que ângulo foi a bola atirada; (*b*) sob que ângulo a bola encontrará um muro vertical situado a 75 metros do ponto inicial; (*c*) se a bola cai sobre um telhado horizontal de 16 metros de altura, qual o ângulo de incidência; (d) se atirada do cimo de uma casa de 24 metros de altura, qual o ângulo de incidência com o solo; (*e*) se atirada do cimo de uma coluna com declive de 45°, qual o ângulo de incidência com o solo.

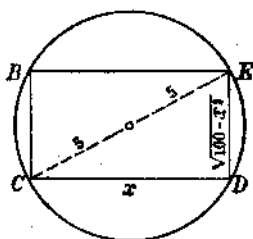
35. O cabo de uma ponte pêncil se prende em forma de parábola a dois pilares distantes entre si de 200 metros. O ponto mais baixo do cabo está 40 metros abaixo dos pontos de suspensão. Achar o ângulo entre o cabo e os pilares de suspensão.

44. — Máximo e mínimo valores de uma função; introdução. Em um grande número de problemas práticos devemos lidar com funções que tem um máximo valor ou um mínimo valor,* e é importante saber que valor da variável independente fornece um tal valor para a função. Suponhamos, por exemplo, que se quer achar as dimensões do retângulo de área máxima entre os que podem ser inscritos numa circunferência de raio igual a 5 cm. Traçando-se um círculo de raio 5, inscrevendo-se-lhe um retângulo qualquer e chamando de x uma das dimensões dêsse retângulo, a figura abaixo fornece

$$(1) \qquad A = x\sqrt{100 - x^2},$$

tendo-se indicado com A a área do retângulo. Somos levados,

* Pode existir mais de um de cada, como se mostra no parágrafo 48.

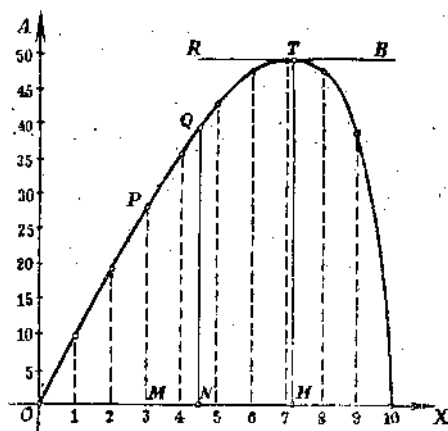
assim, à pesquisa de um valor para x que torne máximo o correspondente valor da função (1).

Que um retângulo de área máxima deva existir pode-se ver como segue. A área é uma função contínua de x, e x varia no intervalo [0, 10]. Quando x toma um dos valores extremos, a área é zero; quando x cresce de zero para 10, a área cresce até certo ponto e depois decresce; podemos, pois, suspeitar que a área será máxima quando a base x do retângulo fôr igual à altura DE, mas isto é advinhação. Um modo melhor será, evidentemente, desenhar o gráfico da função (1) e examinar o comportamento deste. Facilita-nos o traçado do gráfico observar que

(a) pela natureza do problema, tanto x quanto A são positivos;

(b) os valores de x vão de zero a 10 inclusive.

Construamos, pois, uma tabela de valores e tracemos o gráfico, como na figura abaixo.

Que nos ensina o gráfico?

x	A
0	0
1	9,9
2	19,6
3	28,6
4	36,6
5	43,0
6	48,0
7	49,7
8	48,0
9	39,6
10	0,0

(a) Se desenhado com cuidado, podemos achar com precisão a área do retângulo correspondente a cada valor de x, medindo o comprimento da correspondente ordenada. Assim,

quando $x = OM = 3$ cm,

então $A = MP = 28,6$ cm quadr.;

quando $x = ON = 4\frac{1}{2}$ cm.,

então $A = NQ =$ aproximadamente 39,8 cm quadr.
(achado por medida).

(b) Há uma tangente horizontal (RS). A ordenada TH do ponto de contato é maior que qualquer outra ordenada; logo, esta observação: *um dos retângulos inscritos tem uma área maior que a de qualquer outro retângulo inscrito.* Em outras palavras, podemos inferir daqui que a função definida por (1) tem um *valor máximo.* Com a medida não podemos calcular exatamente este valor mas podemos fazê-lo fàcilmente com o cálculo. Observamos que em T a tangente é horizontal, logo seu coeficiente angular é zero neste ponto (§ 42). Portanto, para achar a abscissa de T, achamos a derivada da função A, pomo-la igual a zero e resolvemos a equação em x. Assim, temos

$$(1) \qquad A = x\sqrt{100 - x^2},$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, \qquad \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0.$$

Resolvendo $x = 5\sqrt{2}.$

Substituindo, obtemos $DE = \sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{2}.$

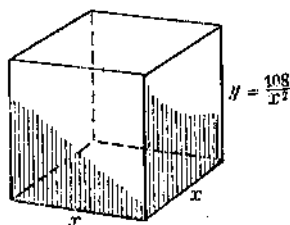
Portanto o retângulo de área máxima inscritível numa circunferência é um quadrado de área

$$A = CD \times DE = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 50 \text{ cm quadr.}$$

O comprimento de HT é, pois, 50.

Tomemos outro exemplo. Deve-se construir uma caixa de madeira, sem tampa, com a capacidade de 108 cm³. O fundo deve ser um quadrado; quais as dimensões a se tomar para que o custo da caixa seja mínimo.

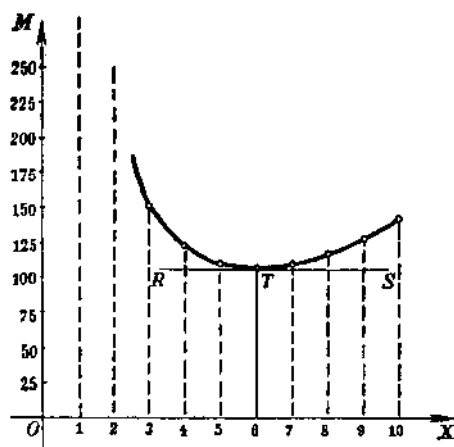
Seja x = comprimento do lado do quadrado base, em cm, e y = altura da caixa. Como o volume da caixa é dado, podemos exprimir y em função de x como segue:

$$\text{Volume} = x^2y = 108; \text{ logo } y = \frac{108}{x^2}.$$

Podemos também exprimir a área de madeira necessária em função de x, pois, chamando de M essa área, temos M = área da base mais área das quatro faces. Ora,

$$\text{Área da base} = x^2 \text{ cm quadr.}$$

$$\text{Área das 4 faces} = 4\,xy = \frac{432}{x} \text{ cm quadr.; logo,}$$

$$M = x^2 + \frac{432}{x}. \tag{2}$$

x	M
1	433
2	220
3	153
4	124
5	111
6	108
7	111
8	118
9	129
10	143

A fórmula (2) dá a área de madeira necessária para a construção da caixa. Tracemos o gráfico da função (2), como na figura.

Que nos ensina o gráfico?

(a) Se traçado com cuidado, podemos medir a ordenada correspondente a qualquer comprimento ($= x$) do lado do quadrado base e assim determinar a área de madeira necessária.

(b) Há uma tangente horizontal (RS). A ordenada do ponto de contato T é menor que qualquer outra ordenada; logo, esta observação: *uma das caixas requer menos madeira que qualquer das outras.* Em outras palavras, podemos inferir que a função definida por (2) tem um mínimo valor. Vamos achá-lo, usando o cálculo. Derivando (2), para obter o coeficiente angular em qualquer ponto, temos

$$\frac{dM}{dx} = 2\,x - \frac{432}{x^2}.$$

No ponto mais baixo T, o coeficiente angular é zero; logo

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0,$$

isto é, quando $x = 6$ tem-se a menor área de madeira necessária. Substituindo em (2) vemos que esta área é

$$M = 108 \text{ cm quadr.}$$

O fato de que o mínimo valor de M existe, vê-se também com o seguinte raciocínio. Se a base é muito pequena, a altura deve ser muito grande e por isto a área da madeira necessária é grande. Fazendo a base crescer, deve decrescer a altura e a área da madeira decresce. Isto, porém, acontece até certo ponto, pois, quando a base é excessivamente grande, o consumo de madeira é também muito grande. Portanto, M decresce de um valor muito grande até um certo valor e depois dêste torna a crescer novamente até outro valor muito grande. Resulta daí que o gráfico deve ter um ponto "mais baixo", correspondendo, precisamente, às dimensões que requerem menor área de madeira.

Passaremos agora ao estudo detalhado do assunto concernente a máximos e mínimos.

45. — Funções crescentes e decrescentes.* Uma função $y = f(x)$ diz-se *crescente*, se y cresce (algèbricamente) quando x cresce. Diz-se *decrescente*, se y decresce (algèbricamente) quando x decresce.

O gráfico de uma função indica claramente se ela é crescente ou decrescente. Por exemplo, consideremos o gráfico da Fig. *a*.

Quando nos movemos sobre a curva da esquerda para a direita, observamos que ela *sobe*, isto é, quando x cresce, a função ($= y$) cresce. Òbviamente, Δy e Δx têm o mesmo sinal.

No gráfico da Fig. *b* quando nos movemos sôbre a curva da esquerda para a direita, observamos que ela *desce*, isto é, quando x cresce, a função decresce. Neste caso, Δy e Δx têm sinais contrários.

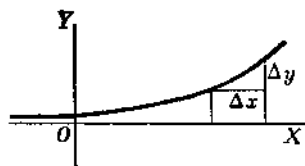



Fig. *a*

* As demonstrações dadas aqui dependem da intuição geométrica. O tratamento analítico de assuntos de máximo e mínimo será feito no § 125.

Que uma curva possa ser crescente num intervalo e decrescente noutro, mostra-o o gráfico (Fig. *c*) de

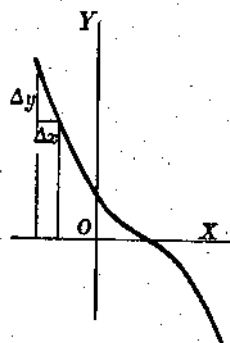
(1) $$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$$

Fig. *b*

Quando nos movemos sobre a curva da esquerda para a direita, observamos que ela sobe até alcançar o ponto A, depois desce dêsde A até B e sobe, de novo, a partir de B. Logo

(a) *de* $x = -\infty$ *a* $x = 1$, *a função é crescente;*

(*b*) de $x = 1$ *a* $x = 2$, *a função é decrescente;*

(*c*) de $x = 2$ *a* $x = +\infty$, *a função é crescente.*

Em cada ponto, como C, onde a função é crescente, a tangente faz um ângulo agudo com o eixo dos xx. O coeficiente angular é positivo. Em cada ponto, como D, onde a função é decrescente, a tangente faz um ângulo obtuso com o eixo dos xx e, portanto, o coeficiente angular é negativo. Temos, pois, o seguinte critério:

Uma função é crescente quando sua derivada é positiva e decrescente quando a derivada é negativa.

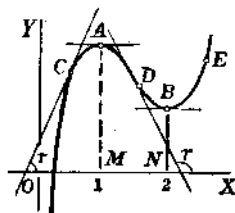



Fig. *c*

Por exemplo, derivando (1) acima, temos

(2) $$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2).$$

Quando $x < 1$, $f'(x)$ é positiva, logo $f(x)$ é crescente.

Quando $1 < x < 2$, $f'(x)$ é negativa, logo $f(x)$ é decrescente.

Quando $x > 2$, $f'(x)$ é positiva, logo $f(x)$ é crescente.

Êstes resultados estão de acordo com as conclusões acima, obtidas do exame do gráfico.

46. — Máximo e mínimo valores de uma função; definições. Um máximo (valor) de uma função $f(x)$ é um valor da função — digamos $f(x_0)$ — maior que todos os valores que a função toma quando x é suficientemente próximo a x_0.

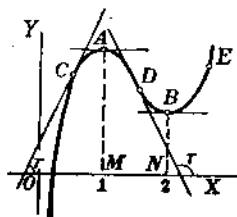
Um *mínimo* (valor) de $f(x)$ é um valor $f(x_1)$ menor que qualquer outro valor $f(x)$ quando x é suficientemente próximo de x_1.

Assim, na Fig. *c*, § 45, é claro que a função tem um máximo MA $(= y = 2)$ quando $x = 1$ e um mínimo NB $(= y = 1)$ quando $x = 2$.

O leitor deve observar que um máximo (valor) não é necessàriamente o maior de todos os valores que a função pode tomar, nem um mínimo, o menor. Assim, na Fig. *c* vê-se que a função $(= y)$ tem valores a direita de B que são maiores que o máximo MA e valores a esquerda de A que são menores que o mínimo NB.

Se $f(x)$ é uma função crescente de x quando x é ligeiramente menor que a e decrescente quando x é ligeiramente maior que a, isto é, se $f'(x)$ muda sinal de $+$ para $-$ quando x cresce passando por a, então $f(x)$ tem um máximo quando $x = a$. Portanto, se contínua, $f'(x)$ se anula para $x = a$. Assim, no exemplo acima (Fig. *c*), $f'(x)$ é positiva em C, $f'(x) = 0$ em A, $f'(x)$ é negativa em D.

Fig. *c*

Contràriamente, se $f(x)$ é decrescente quando x é ligeiramente menor que a e crescente quando x é ligeiramente maior que a, isto é, se $f'(x)$ muda do sinal $-$ para o sinal $+$ quando x cresce atravessando a, então $f(x)$ tem um mínimo para $x = a$. Portanto, se contínua, $f'(x)$ deve ser nula para $x = a$. Assim, na Fig. *c*, $f'(x)$ é negativa em D, $f'(x) = 0$ em B, $f'(x)$ é positiva em E.

Podemos, pois, estabelecer as condições gerais para máximo e mínimo da função $f(x)$.

$f(x)$ *é um máximo se* $f'(x) = 0$ *e* $f'(x)$ *muda do sinal* $+$ *para* $-$.

$f(x)$ *é um mínimo se* $f'(x) = 0$ *e* $f'(x)$ *muda do sinal* $-$ *para* $+$.

Os valores da variável satisfazendo a equação $f'(x) = 0$ chamam-se *valores críticos*; assim, de (2), § 45, $x = 1$ e $x = 2$ são os valores críticos da variável para a função cujo gráfico é o da Fig. *c*. Os valores críticos determinam *pontos de retorno* onde a tangente é paralela a OX.

Para determinar o sinal da derivada em pontos próximos de um particular ponto de retorno, substitui-se nela, primeiro, um valor da variável ligeiramente menor que a abcissa do ponto de retorno e, a se-

guir, um ligeiramente maior. Se o primeiro sinal é + e o segundo −, então a função tem um máximo para o valor crítico considerado. Se o primeiro sinal é − e o segundo é +, então a função tem um mínimo. Se o sinal é o mesmo em ambos os casos, então a função não tem nem máximo nem mínimo para o valor crítico considerado. Tomemos, por exemplo, a função (1) acima, § 45.

(1) $$y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$$

Então, como vimos

(2) $$f'(x) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Pondo-se $f'(x) = 0$, achamos os valores críticos $x = 1$, $x = 2$. Examinemos primeiro $x = 1$; consideramos valores de x próximos deste valor crítico e examinamos o segundo membro de (2) para estes valores, no que diz respeito à variação do sinal (confronte § 45).

x	y
1 2	2 1

Quando $x < 1$, $f'(x) = (-)(-) = +$.
Quando $x > 1$, $f'(x) = (+)(-) = -$.

Logo $f(x)$ tem um máximo quando $x = 1$. Pelo quadro, este valor é $y = f(1) = 2$.

Vejamos agora $x = 2$. Procedendo como antes, tomemos valores de x próximos do valor crítico 2.

Quando $x < 2$, $f'(x) = (+)(-) = -$.
Quando $x > 2$, $f'(x) = (+)(+) = +$.

Logo, $f(x)$ tem um mínimo quando $x = 2$. Pelo quadro acima, este valor é $y = f(2) = 1$.

Em suma, temos a seguinte *regra prática.*

47. — Primeiro método para o exame de uma função no que concerne a máximos e mínimos. Regra prática.

PRIMEIRO PASSO. *Achar a derivada da função.*

SEGUNDO PASSO. *Igualar a derivada a zero e achar as raízes reais da equação obtida. Estas raízes são os valores críticos da variável.*

TERCEIRO PASSO. *Considerando um valor crítico de cada vez, examinar a derivada, primeiro para os valores da variável ligeiramente menores* que o valor crítico e depois para os ligeiramente maiores.**

* Aqui o termo "ligeiramente menor" significa qualquer valor compreendido entre o valor crítico considerado e o valor crítico que imediatamente o precede, caso haja este último. Se este não existe, é qualquer valor menor que o valor crítico em exame, onde a função seja definida; o têrmo "ligeiramente maior" significa qualquer valor entre o valor crítico considerado e o que imediatamente o segue, caso este exista. Se não existe, é qualquer valor maior que o valor crítico, onde a função seja definida.

Se o sinal da derivada é + para os ligeiramente menores e − para os ligeiramente maiores, então a função tem um máximo para o valor crítico em exame; se é o contrário que se dá, a função tem um mínimo. Se o sinal não muda, a função não tem máximo nem mínimo.

No Terceiro Passo é conveniente, muitas vezes, fatorar $f'(x)$, como no § 46.

Exemplo ilustrativo 1. No primeiro problema resolvido no § 44 mostramos, por meio do gráfico da função

$$A = x\sqrt{100 - x^2},$$

que o retângulo de área máxima inscrito numa circunferência de raio 5 m, mede 50 m². Isto pode ser provado agora analìticamente pela aplicação da regra acima.

Solução. $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$.

Primeiro Passo. $f'(x) = \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$.

Segundo Passo. Pondo $f'(x) = 0$, temos

$$x = 5\sqrt{2} = 7{,}07,$$

que é o valor crítico. Toma-se apenas o sinal positivo do radical, pois, pela natureza do problema, o sinal negativo não tem sentido.

Terceiro Passo. Quando $x < 5\sqrt{2}$, então $2x^2 < 100$, e $f'(x)$ é +.
Quando $x > 5\sqrt{2}$, então $2x^2 > 100$, e $f'(x)$ é −.

Como o sinal da derivada primeira muda de + para −, a função tem um máximo valor $f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Examinar a função $(x - 1)^2(x + 1)^3$ no que concerne a máximos e mínimos.

Solução. $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)^3$.

Primeiro Passo. $f'(x) = 2(x - 1)(x + 1)^3 + 3(x - 1)^2(x + 1)^2 =$
$= (x - 1)(x + 1)^2(5x + 1)$.

Segundo passo. $(x - 1)(x + 1)^2(5x - 1) = 0$.

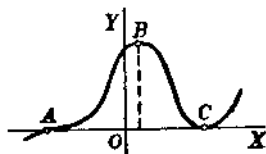
Logo, $x = 1, -1, \dfrac{1}{5}$, são os valores críticos.

Terceiro Passo. $f'(x) = 5(x - 1)(x + 1)^2(x - \dfrac{1}{5})$.

Examinemos primeiro o valor crítico $x = 1$ (C na figura).

Quando $x < 1, f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.
Quando $x > 1, f'(x) = 5(+)(+)^2(+) = +$.

Logo, quando $x = 1$ a função tem um mínimo $f(1) = 0$ (= ordenada de C).

Examinemos agora o valor crítico $x = \dfrac{1}{5}$ (B, na figura).

Quando $x < \frac{1}{5}$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +$.

Quando $x > \frac{1}{5}$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.

Portanto, quando $x = \frac{1}{5}$, a função tem um máximo $f\left(\frac{1}{5}\right) = 1{,}11$ (= ordenada de B)

Examinemos finalmente o valor crítico $x = -1$ (A na figura)

Quando $x < -1$, $f'(x) = 5(-)(-)^2(-) = +$.
Quando $x > -1$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +$.

Consequentemente, quando $x = -1$, a função não tem nem máximo nem mínimo.

48. — Máximo ou mínimo quando $f'(x)$ é infinita e $f(x)$ contínua. Consideremos o gráfico da figura abaixo. Em B, ou G, $f(x)$ é contínua e tem um máximo, mas $f'(x)$ é infinita, pois a

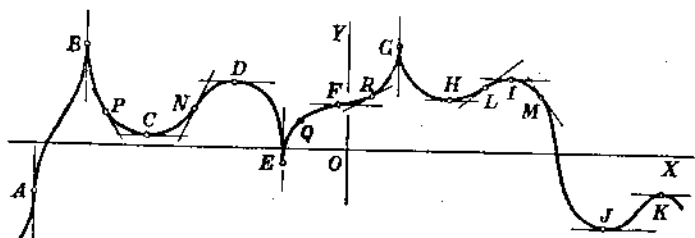



Fig. *d*

tangente em B é paralela ao eixo dos yy. Em E, $f(x)$ tem um mínimo e $f'(x)$ é infinita. Na pesquisa dos máximos e mínimos de $f(x)$, devemos, pois, incluir como *valores críticos* os valores de x para os quais $f'(x)$ é infinita, ou, o que é a mesma coisa, valores de x satisfazendo

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

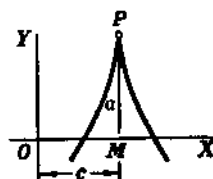
O Segundo Passo da regra do parágrafo precedente deve então ser ampliado, devendo-se considerar também a equação (1). Os outros passos não sofrem modificação.

Na figura *d* acima, observe que $f'(x)$ é também infinita em A, mas a função não é nem máxima nem mínima na abscissa dêsse ponto.

Exemplo ilustrativo. Examinar a função $a - b(x-c)^{\frac{2}{3}}$ no que concerne a máximo e mínimo.

SOLUÇÃO. $$f(x) = a - b(x-c)^{\frac{2}{3}}.$$

$$f'(x) = -\frac{2b}{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\frac{1}{f'(x)} = -\frac{3(x-c)^{\frac{1}{3}}}{2b}.$$

Como $x = c$ é um valor crítico no qual $\frac{1}{f'(x)} = 0$, mas no qual $f(x)$ não é infinita, examinemos a função no que concerne a máximo e mínimo quando $x = c$.

Quando $x < c$, $f'(x) = +$

Quando $x > c$, $f'(x) = -$.

Logo, quando $x = c = OM$, a função tem um máximo $f'(c) = a = MP$.

PROBLEMAS

Examine cada uma das seguintes funções no que concerne aos máximos e mínimos.

1. $x^3 - 6x^2 + 9x$. *Resp.* $x = 1$, dá máx. $= 4$. $x = 3$, dá mín. $= 0$.
2. $10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$. $x = 1$, dá máx. $= 17$. $x = -2$, dá mín. $= -10$.
3. $2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$. Nem máx. nem mín.
4. $x^3 + 2x^2 - 15x - 20$.
5. $2x^2 - x^4$. $x = 0$, dá mín. $= 0$. $x = \pm 1$, dá máx. $= 1$.
   $x = 1$, dá mín. $= -3$.
6. $x^4 - 4x$.
7. $x^4 - x^2 + 1$.
8. $3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. $x = -1$, dá mín. $= -5$. $x = 0$, dá máx. $= 0$. $x = 2$, dá mín. $= -32$.
9. $x^5 - 5x^4$. $x = 0$, dá máx. $= 0$. $x = 4$, dá mín. $= -256$.
10. $3x^5 - 20x^3$.
11. $x^2 + \frac{2a^3}{x}$. $x = a$, dá mín. $= 3a^2$.

12. $2x - \dfrac{a^3}{x^2}$.

13. $x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}$. $x = \pm a$, dá mín. $= 2a^2$.

14. $\dfrac{ax}{x^2 + a^2}$. *Resp.*: $x = -a$, dá mín. $= -\frac{1}{2}$.
$x = a$, dá máx. $= \frac{1}{2}$.

15. $\dfrac{x^2}{x + a}$.

16. $\dfrac{x^2}{x^2 + a^2}$.

17. $\dfrac{x^2 + 2a^2}{x^2 + a^2}$.

18. $(2 + x)^2 (1 - x)^2$.

19. $(2 + x)^2 (1 - x)^3$.

20. $b + c(x - a)^{\frac{2}{3}}$. $x = a$, dá mín. $= b$.

21. $a - b(x - c)^{\frac{1}{3}}$. Nem máx. nem mín.

22. $(2 + x)^{\frac{1}{3}} (1 - x)^{\frac{2}{3}}$. *Resp.*: $x = 1$, dá mín. $= 0$.
$x = -1$, dá máx. $= \sqrt[3]{4} = 1{,}6$.

23. $x(a + x)^2 (a - x)^3$. $x = -a$, dá máx. $= 0$.
$x = -\frac{1}{2}a$, dá mín. $= -\frac{27}{64}a^6$.
$x = \frac{1}{3}a$, dá máx. $= \frac{128}{729}a^6$.
$x = a$, dá nenhum.

24. $(2x - a)^{\frac{1}{3}} (x - a)^{\frac{2}{3}}$. $x = \frac{2}{3}a$, dá máx. $= \frac{1}{3}a$.
$x = a$, dá mín. $= 0$.
$x = \frac{1}{2}a$, dá nenhum.

25. $\dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 4}$. $x = 0$, dá máx. $= \frac{1}{2}$.
$x = -4$, dá mín. $= -\frac{1}{6}$.

26. $\dfrac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. $x = -3$, dá máx. $= -5$.
$x = 1$, dá mín. $= 3$.

27. $\dfrac{x^2 + x + 4}{x^2 + 2x + 4}$. $x = -2$, dá máx. $= \frac{3}{2}$.
$x = 2$, dá mín. $= \frac{5}{6}$.

28. $\dfrac{(x-a)(b-x)}{x^2}$. $\qquad x = \dfrac{2ab}{a+b}$, dá máx. $= \dfrac{(b-a)^2}{4ab}$.

29. $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{a-x}$. *Resp.:* $x = \dfrac{a^2}{a+b}$, dá mín. $= \dfrac{(a+b)^2}{a}$.

$x = \dfrac{a^2}{a-b}$, dá máx. $= \dfrac{(a-b)^2}{a}$.

30. $\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$. $\qquad x = \dfrac{a}{4}$, dá mín. $= \dfrac{27}{32}a^2$.

31. $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

49. — Valores máximo e mínimo. Problemas de aplicação. Em muitos problemas devemos, primeiro, construir, das dadas condições, a função cujos valores máximo e mínimo se procuram, como foi feito nos dois exemplos desenvolvidos no § 44. Isto, algumas vezes, é muito difícil. Não há regras aplicáveis em todos os casos, mas em muitos problemas podemos nos guiar pelas seguintes

Diretrizes gerais.

(a) *Na relação que envolve as grandezas do problema, pomos em destaque a função cujos valores máximo ou mínimo são procurados;*

(b) *Se a relação contém mais de uma variável, procuramos exprimir em função de uma única delas todas as demais usando para isso as condições dadas pelo problema;*

(c) *Aplicamos para a função obtida, de uma só variável, a regra já vista* (§ 47) *para achar os valores máximo e mínimo, notando que nos problemas práticos é usualmente fácil dizer qual dos valores críticos dá um máximo e qual dá um mínimo, de modo que não é sempre necessário aplicar o terceiro passo.*

(d) *Traçamos o gráfico da função para controle.*

O trabalho de achar máximos e mínimos pode frequentemente ser simplificado com a ajuda dos seguintes princípios, os quais resultam logo do nosso estudo sobre o assunto.

(a) *Os valores máximo e mínimo de uma função contínua ocorrem alternadamente.*

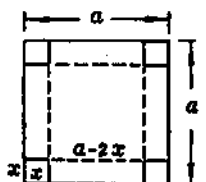
(b) *Quando c é uma constante positiva, $cf(x)$ é um máximo ou um mínimo para, e sòmente para, os valores de x que tornam máxima ou mínima a função $f(x)$.*

No exame do comportamento do sinal de $f'(x)$ bem como na determinação dos valores críticos de x pode-se, pois, omitir qualquer fator constante.

Quando c é negativa, $cf(x)$ é máxima quando $f(x)$ é mínima e recìprocamente.

(c) *Se c é uma constante, $f(x)$ e $c + f(x)$ tem máximo e mínimo valores para os mesmos valores de x.*

PROBLEMAS

1. Quer-se fazer uma caixa sem tampa de um pedaço quadrado de lata, cujo lado mede a, cortando-se dos cantos da lata quadrados iguais e depois dobrando convenientemente a parte resídua. Qual deve ser o lado dos quadrados cortados afim de que a caixa encerre o máximo volume?

Solução. Seja x = lado do quadrado cortado = altura da caixa;

então, $a - 2x$ = lado do quadrado formando o fundo da caixa;

portanto $V = (a - 2x)^2 x$ é o volume da caixa

Esta é a função cujo máximo se procura. Aplicando a regra, § 47, temos

Primeira Passo. $\dfrac{dV}{dx} = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = a^2 - 8ax + 12x^2.$

Segundo Passo. A resolução de $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$ fornece os valores críticos $x = \dfrac{a}{2}$ e $\dfrac{a}{6}$.

É evidente que $x = \dfrac{a}{2}$ deve dar um mínimo, pois neste caso a lata é toda cortada não sobrando material para fazer a caixa. O outro valor crítico $x = \dfrac{a}{6}$ fornece o volume máximo $\dfrac{2a^3}{27}$, como se pode comprovar pela regra do § 47. Logo, o lado do quadrado a ser cortado de cada canto da lata é um sexto do lado da lata.

Deixa-se ao leitor neste, e nos problemas seguintes, o traçado do gráfico da função.

2. Admitindo-se que a resistência de uma viga de seção transversa retangular varia na razão direta da largura e do quadrado da profundidade, que dimensões deve ter uma viga a ser serrada de um tronco de árvore de diâmetro d, para que seja a mais resistente possível?

SOLUÇÃO. Se x = largura e y = profundidade, então a viga terá máxima resistência quando a função xy^2 for um máximo. Da figura, $y^2 = d^2 - x^2$; logo, devemos examinar a função

$$f(x) = x(d^2 - x^2).$$

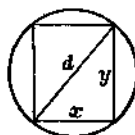
Primeiro Passo. $f'(x) = -2x^2 + d^2 - x^2 = d^2 - 3x^2$.

Segundo Passo. $d^2 - 3x^2 = 0$. $\therefore$ $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ = valor crítico que dá um máximo. Portanto, se a viga for serrada de modo que

$$\text{Profundidade} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \text{ do diâmetro do tronco,}$$

e

$$\text{Largura} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \text{ do diâmetro do tronco,}$$

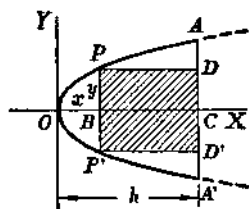
ela terá a máxima resistência.

3. Qual a largura do retângulo de máxima área que pode ser inscrito num dado segmento OAA' de uma parábola?

Sugestão. Se $OC = h$, $BC = h - x$ e $PP' = 2y$, então a área do retângulo $PDD'P'$ é

$$2(h - x)y.$$

Mas como P está sobre a parábola $y^2 = 2px$, a função a ser examinada é

$$f(x) = 2(h - x)\sqrt{2px}$$

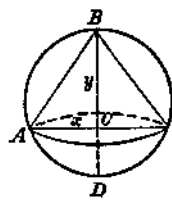
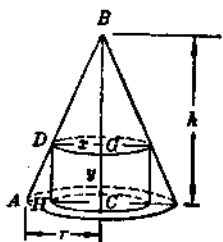
Resp. Largura $= \frac{2}{3}h$.

4. Achar a altura do cone de máximo volume inscritível numa esfera de raio r.

Sugestão. Volume do cone $= \frac{1}{3}\pi x^2 y$. Mas

$$x^2 = BC \times CD = y(2r - y);$$

logo, a função a ser examinada é

$$f(y) = \frac{\pi}{3}y^2(2r - y).$$

Resp. Altura do cone $= \frac{4}{3}r$.

5. Achar a altura do cilindro de máximo volume inscritível num dado cone circular reto.

SUGESTÃO. Seja $AC = r$ e $BC = h$. Volume do cilindro $= \pi x^2 y$.

Mas dos triângulos semelhantes ABC e DBG,

$$r : x = h : h - y. \therefore x = \frac{r(h-y)}{h}.$$

Logo, a função a ser examinada é

$$(y) = \frac{r^2}{h^2} y (h - y)^2.$$

Resp. Altura $= \frac{1}{3} h$.

6. Cada um dos três lados de um trapézio é igual a 10 cm. Qual o comprimento do quarto lado para que a área seja máxima.
Resp. 20 cm.

7. Qual a razão entre os lados de um terreno retangular de área dada para que ao murá-lo e a seguir dividí-lo em dois por um muro paralelo a um dos lados, seja mínimo o comprimento total dos muros.
Resp.: 2/3.

8. Quais devem ser as dimensões de um jardim retangular de 432 m² de área para que ao murá-lo gaste-se o mínimo possível, sabendo-se que o vizinho do lado paga a metade pelo muro que limita sua propriedade.
Resp. 18 m × 24 m.

9. Um fabricante de rádio acha que pode vender x aparelhos por semana a p cruzeiros cada, onde $5x = 375 - 3p$. O custo da produção é $(500 + 15x + \frac{1}{5}x^2)$ cruzeiros. Mostrar que se obtém o máximo lucro quando a produção é aproximadamente de 30 aparelhos por semana.

10. Supondo-se no problema anterior que a relação entre x e p seja

$$x = 100 - 20\sqrt{\frac{p}{5}},$$

mostrar que o máximo lucro é obtido quando o fabricante produz aproximadamente 25 aparelhos por semana.

11. Suponha-se no problema 9 que a relação entre x e p é

$$x^2 = 2500 - 20p.$$

Quantos instrumentos devem se produzidos semanalmente para que haja máximo lucro?

12. O custo total da produção de x artigos por semana é $(ax^2 + bx + c)$ cruzeiros e o preço (p cruzeiros) de venda de cada um dêles é $p = \beta - \alpha x^2$. Mostre que o máximo lucro é obtido quando a produção é

$$x = \frac{\sqrt{a^2 - 3\alpha(\beta - b)} - a}{3\alpha}.$$

13. No problema 9 suponhamos que incida sobre cada aparelho um imposto de t cruzeiros. O fabricante acrescenta o imposto ao custo de produção e determina a produção e o custo nas novas condições.

(a) Mostre que o preço cresce pouco menos que a metade do imposto.

(b) Exprima a receita proveniente do imposto em função de t e determine t para que ela seja máxima.

(c) Mostre que o preço aumenta aproximadamente 33 por cento quando vigora o imposto t determinado em (b).

14. O custo total de produção de x artigos por semana é $(ax^2 + bx + c)$ cruzeiros, incluídos os impostos de t cruzeiros por artigo. O preço (p cruzeiros) de venda de cada artigo é $p = \beta - \alpha x$. Mostre que o imposto fornece a máxima receita quando $t = \frac{1}{2}(\beta - b)$ e que o aumento no preço é sempre menor que o imposto.

Nota. **Nas aplicações em Economia a, b, c, α e β são números positivos.**

15. Uma siderúrgica pode produzir x toneladas por dia de aço de baixo teor e y toneladas por dia de aço de alto teor, onde $y = \frac{40 - 5x}{10 - x}$. Se o preço no mercado do de baixo teor é metade que o de alto teor, mostrar que aproximadamente $5\frac{1}{2}$ toneladas do de baixo teor é a produção diária que fornece a máxima renda.

16. Uma companhia telefônica acha que tem Cr$ 300,00 de lucro líquido por aparelho se tem 1 000 assinantes ou menos por estação. Se há mais de 1 000 assinantes, o lucro por aparelho decresce de 20 centavos para cada assinante acima daquele número. Quantos assinantes dará o máximo lucro líquido? *Resp.* 1250.

17. O custo da manufatura de um dado artigo é p cruzeiros e o número de artigos que pode ser vendido varia na razão inversa

da raiz n-egésima do preço de venda. Qual deve ser este para que o lucro líquido seja máximo.

Resp. $\frac{np}{n-1}$.

18. Qual deve ser o diâmetro de uma panela de alumínio com capacidade de 58cm^3, cuja construção requer o mínimo de alumínio (*a*) se a panela não tem tampa, (*b*) se tem tampa.

Resp. (a) $\sqrt[3]{\frac{464}{\pi}} = 5{,}29$ cm; (b) $\sqrt[3]{\frac{232}{\pi}} = 4{,}20$ cm.

19. A área lateral de um cilindro circular reto é $4\pi\,\text{m}^2$. Do cilindro corta-se um hemisfério cujo diâmetro é igual ao diâmetro do cilindro. Achar as dimensões do cilindro para que o volume restante seja máximo ou mínimo. Determinar se há um máximo ou um mínimo.

Resp. Raio = 1 cm, altura = 2 cm; máximo.

20. Dentre os retângulos de lados paralelos aos eixos coordenados e inscritíveis na figura limitada pelas duas parábolas $3y = 12 - x^2$, $6y = x^2 - 12$, achar a área do de máxima área. *Resp.* 16.

21. Dois vértices de um retângulo estão sobre o eixo dos xx, os outros dois sobre as retas $y = 2x$ e $3x + y = 30$. Para que valor de y será máxima a área do retângulo? *Resp.* $y = 6$.

22. Uma base de um trapézio isósceles é o diâmetro de um círculo de raio a e as extremidades da outra base estão sôbre a circunferência do círculo. Achar o comprimento da outra base se a área é máxima. *Resp.* a.

23. Um retângulo é inscrito num segmento parabólico e tem um dos lados sobre a base do segmento. Mostrar que a razão entre a área do retângulo de área máxima e a área do segmento é $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

24. A resistência de uma viga retangular varia na razão direta da largura e do quadrado da altura. Achar as dimensões da viga mais resistente que pode ser construída com um tronco de árvore cuja seção transversa é uma elipse de semi-eixos a e b.

Resp. Largura $= 2b\sqrt{\frac{1}{3}}$; altura $= 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

25. A resistência de uma viga retangular varia como o produto da largura pelo cubo da altura. Achar as dimensões da viga mais resistente que pode ser cortada de um tronco cilíndrico cujo raio é a.

Resp. $a \times a\sqrt{3}$.

26. A equação da trajetória de uma bola é $y = mx - \frac{(m^2+1)\,x^2}{800}$, onde a origem é o ponto do qual a bola é lançada e m é o coeficiente angular da curva na origem. Para que valor de m a bola atingirá (*a*) a máxima distância sobre o mesmo nível horizontal, (*b*) a máxima altura sobre uma parede vertical distante de 300 pés.

Resp. (a) 1; (b) 4/3.

27. Uma janela de perímetro p tem a forma de um retângulo encimado por um triângulo retangular isósceles. Mostrar que a luz pela janela é máxima, quando os lados do retângulo são iguais aos lados do triângulo.

28. Dada a soma das áreas de uma esfera e um cubo, mostrar que a soma dos seus volumes será mínima quando o diâmetro da esfera fôr igual à aresta do cubo. Quando é que é máxima a soma dos volumes?

29. Achar as dimensões do maior retângulo inscritível na elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Resp.* $a\sqrt{2} \times b\sqrt{2}$.

30. Dentre todos os retângulos com base sôbre o eixo dos xx e com dois vértices sôbre a curva de equação $y = \frac{8\,a^3}{x^2 + 4\,a^2}$. (V. figura no Capítulo XXVI), achar o de máxima área.

Resp. Área $4\,a^2$.

31. Achar a razão entre a área da menor elipse que pode ser circunscrita a um retângulo e a área do retângulo. A área de uma elipse é πab, onde a e b são os semi-eixos. *Resp.* $\frac{1}{2}\pi$.

32. Os dois vértices inferiores de um trapézio isósceles são os pontos $(-6, 0)$ e $(6, 0)$. Os dois vértices superiores estão sôbre a curva $x^2 + 4\,y = 36$. Achar a área do máximo trapézio nestas condições. *Resp.* 64.

33. A distância entre os centros de duas esferas de raios a e b respectivamente é c. Achar de que ponto P sobre a reta dos cen-

tros AB vê-se o máximo de superfície esférica (A área da superfície de uma zona de altura h é $2\pi rh$, onde r é o raio da esfera).

$$Resp. \quad \frac{ca^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}} \text{ unidades de } A.$$

34. Achar as dimensões do máximo paralelepípedo com base quadrada que pode ser cortado de uma esfera de raio r.

Resp. $h = \frac{2}{3} r \sqrt{3}$.

35. Dada uma esfera de raio 6, calcular a altura de cada um dos seguintes sólidos:

(a) cilindro circular reto de máximo volume inscrito na esfera;

(b) cilindro circular reto de máxima área total inscrito na esfera;

(c) cone reto de mínimo volume circunscrito na esfera.

Resp. (a) $4\sqrt{3}$; (b) 6,31; (c) 24.

36. Prove que uma barraca cônica de dada capacidade necessita do mínimo de fazenda quando a altura é $\sqrt{2}$ vezes o raio da base. Mostre que quando a fazenda é estendida no chão tem-se um círculo do qual se cortou um setor de $152° 9'$. Quanta fazenda é necessária para uma barraca de 10 pés de altura?

Resp. 272 pés quadrados.

37. Dado um ponto sobre o eixo da parábola $y^2 = 2px$ à distância a do vértice, achar a abscissa do ponto sobre a curva que é o mais próximo do ponto dado. *Resp.* $x = a - p$.

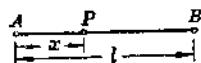
38. Achar sôbre a curva $2y = x^2$ o ponto mais próximo do ponto (4, 1). *Resp.* (2, 2).

39. Sendo PQ o maior ou o menor segmento que pode ser traçado do ponto $P(a, b)$ à curva $y = f(x)$, provar que a reta PQ é perpendicular à tangente à curva em Q.

40. Uma fórmula de eficiência de um parafuso é $E = \dfrac{h(1 - h \operatorname{tg} \theta)}{h + \operatorname{tg} \theta}$, onde θ é o ângulo de fricção e h o passo do parafuso. Achar h para máxima eficiência. *Resp.* $h = \sec \theta - \operatorname{tg} \theta$.

41. A distância entre duas fontes de calor A e B com intensidades a e b respectivamente, é l. A intensidade total do calor num

ponto P entre A e B é dada pela fórmula

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(l-x)^2},$$

onde x é a distância de P a A. Para que posição de P será mais baixa a temperatura?

Resp. $x = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}\, l}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}$.

42. A base inferior de um trapézio isósceles é o eixo maior de uma elipse; as extremidades da base superior são pontos da elipse. Mostrar que o máximo trapézio deste tipo é tal que o comprimento da base superior é metade do da base inferior.

43. Dentre todos os triângulos isósceles de vértice em $(0, b)$, inscritos na elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, achar a base do de área máxima. *Resp.* $2y + b = 0$.

44. Achar a base e a altura do triângulo isósceles de área mínima que circunscreve a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e cuja base é paralela ao eixo dos xx. *Resp.* Altura $3b$; base $2a\sqrt{3}$.

45. Seja $P(a, b)$ um ponto do primeiro quadrante. Pelo ponto P tracemos uma reta cortando os semi-eixos positivos OX e OY nos pontos A e B respectivamente. Calcular os segmentos determinados sôbre OX e OY nos seguintes casos:

(*a*) quando a área OAB é mínima;
(*b*) quando o comprimento AB é mínimo;
(*c*) quando a soma dos segmentos determinados sôbre os semi-eixos é mínima;
(*d*) quando a distância de O a AB é máxima.

Resp. (*a*) $2a$, $2b$; (*b*) $a + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$, $b + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$;
(*c*) $a + \sqrt{ab}$, $b + \sqrt{ab}$; (*d*) $\dfrac{a^2 + b^2}{a}$, $\dfrac{a^2 + b^2}{b}$.

50. — Derivada como velocidade de variação. No § 23 a relação funcional

$$y = x^2 \tag{1}$$

deu como razão entre os correspondentes acréscimos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x. \tag{2}$$

Quando $x = 4$ e $\Delta x = 0{,}5$, (2) fornece

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8{,}5. \tag{3}$$

Dizemos, então, que a velocidade média de variação de y em relação a x, ou que a rapidez média de variação de y em relação a x, é igual a 8,5 quando x cresce de $x = 4$ para $x = 4{,}5$.

Em geral, a razão

(A) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = *velocidade (ou rapidez) média de variação de* y *em relação a* x *quando* x *varia de* x *a* $x + \Delta x$.

Velocidade de variação constante. Quando

$$y = ax + b, \tag{4}$$

temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

isto é, a velocidade média de variação de y em relação a x é igual a a, coeficiente angular da reta (4), e constante. Neste caso, e sòmente neste, a variação de $y\,(= \Delta y)$, quando x varia de qualquer valor x para $x + \Delta x$ é igual ao produto da velocidade de variação a pelo acréscimo Δx.

Velocidade de variação instantânea. Se o intervalo de x a $x + \Delta x$ decresce e $\Delta x \to 0$ então a velocidade média de variação de y em relação a x neste intervalo tende à *velocidade de variação instantânea de* y *em relação a* x. Logo, pelo § 24,

(B) $\dfrac{dy}{dx}$ = *velocidade (ou rapidez) de variação instantânea de* y *em relação a* x *para um dado valor de* x.

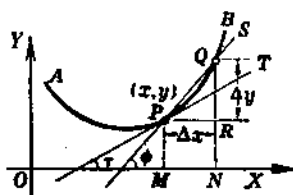
Por exemplo, de (1) acima,

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{5}$$

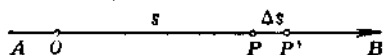
Quando $x = 4$, a velocidade de variação instantânea de y é 8 unidades por unidade de variação de x. O têrmo "instantâneo" é muitas vezes omitido em B.

Interpretação geométrica. Tracemos, como na figura, o gráfico de

$$y = f(x). \tag{6}$$

Quando x cresce de OM para ON, y cresce de MP para NQ. A velocidade de variação média de y em relação a x é igual ao coeficiente angular da reta PQ. A velocidade de variação instantânea quando $x = OM$ é igual ao coeficiente angular da tangente PT. Logo:

A velocidade de variação instantânea de y em $P(x, y)$ é igual à velocidade de variação de y ao longo da tangente em P.

Quando $x = x_0$, a velocidade de variação instantânea de y, ou $f(x)$, por (6), é $f'(x_0)$. Se x varia de x_0 para $x_0 + \Delta x$, a variação *exata de y* não é igual a $f'(x_0)\,\Delta x$, a não ser que $f'(x)$ seja constante, como em (4). Veremos mais tarde, contudo, que este produto é aproximadamente igual a Δy quando Δx é suficientemente pequeno.

51. Velocidade num movimento retilíneo. É importante nas aplicações a velocidade de variação em relação ao tempo. Neste caso está, por exemplo, a velocidade num movimento retilíneo.

Consideremos o movimento retilíneo de um ponto P sôbre a reta AB. Seja s a distância de P a um dado ponto fixo — digamos O — num dado instante t. A cada valor de t corresponde uma posição de P e portanto uma distância (ou espaço) s. Logo, s é uma função de t e podemos escrever

$$s = f(t).$$

Demos a t um acréscimo Δt; então s receberá um acréscimo Δs, e

$$(1) \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{velocidade média}$$

de P (quando o ponto se move de P para P') no intervalo de tempo Δt. Se P se move uniformemente (isto é, com velocidade constante), a razão acima terá o mesmo valor para todo intervalo de tempo e é a velocidade em cada instante.

Para o caso geral de um movimento de natureza qualquer, uniforme ou não, definimos a *velocidade num dado instante como o limite da velocidade média quando Δt tende a zero*, isto é,

$$(C) \qquad v = \frac{ds}{dt}.$$

A velocidade num dado instante é a derivada da distancia (= espaço) em relação ao tempo, calculada nêsse instante.

Quando v é positiva, a distância s é uma função crescente de t e o ponto P se move na direção AB. Quando v é negativa, s é uma função decrescente de t e P se move na direção BA. (§ 45).

Para mostrar que esta definição de velocidade está de acordo com a que já tínhamos intuitivamente, procuremos a velocidade de um corpo que cai, no fim de dois segundos.

A experiência mostra que um corpo que cai livremente da posição de repouso num vácuo perto da superfície da terra segue aproximadamente a lei

$$(2) \qquad s = 4{,}9\, t^2,$$

onde s = altura da queda em metros, t = tempo, em segundos. Aplicando a Regra Geral (§ 27) à função (2), temos:

PRIMEIRO PASSO. $s + \Delta s = 4{,}9\,(t + \Delta t)^2 = 4{,}9\,t^2 + 9{,}8\,t\,.\,\Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2.$

SEGUNDO PASSO. $\Delta s = 9{,}8\,t\,.\,\Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2.$

TERCEIRO PASSO. $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}8\,t + 4{,}9\Delta t$ = *velocidade média no intervalo de tempo* Δt.

Fazendo $t = 2$,

(3) $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 19{,}6 + 4{,}9\,\Delta t$ = *velocidade média no intervalo de tempo* Δt *depois de dois segundos de queda.*

Nossa noção intuitiva de velocidade nos diz logo que (3) não pode dar a velocidade *no fim de dois segundos*, pois mesmo que Δt

seja muito pequeno — digamos $\frac{1}{100}$ ou $\frac{1}{1000}$ de um segundo, (3) continua dando sòmente a *velocidade média* durante o correspondente pequeno intervalo de tempo. O que entendemos, pois, por velocidade no fim de dois segundos é *o limite da velocidade média quando Δt diminui tendendo a zero*, no caso atual, 19,6 metros por segundo, como resulta de (3). Assim, a noção de velocidade que adquirimos com a experiência, envolve a idéia de limite, ou

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 19{,}6 \text{ m por segundo.}$$

52. — Velocidades inter-relacionadas. Em muitos problemas aparecem diversas variáveis, sendo cada uma delas uma função do tempo, relacionadas entre si pelas condições do problema. As relações entre as velocidades de variação, em relação ao tempo, das variáveis são obtidas por derivação.

A regra abaixo é muito útil na resolução destes problemas.

PRIMEIRO PASSO. *Trace uma figura ilustrando o problema. Indique por x, y, z, etc. as grandezas que variam com o tempo.*

SEGUNDO PASSO. *Obtenha uma relação entre as variáveis, válida em cada instante.*

TERCEIRO PASSO. *Derive em relação ao tempo.*

QUARTO PASSO. *Faça uma lista dos dados e das incógnitas.*

QUINTO PASSO. *Substitua as grandezas conhecidas no resultado que achou por derivação (terceiro passo) e resolva a equação assim obtida.*

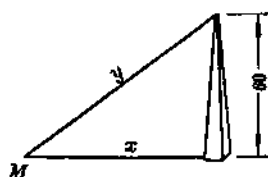
PROBLEMAS

1. Um homem anda à razão de 5 milhas por hora em direção à base de uma torre de 60 pés de altura. Com que rapidez ele se avizinha do topo quando está a 80 pés da base da torre?

SOLUÇÃO. Aplicando a regra acima,

Primeiro Passo. Tracemos a figura. Sejam x = distância entre o homem e a base, y = distância entre o homem e o tôpo da torre, em cada instante.

Segundo Passo. Como temos um triângulo retângulo,

$$y^2 = x^2 + 3600.$$

Terceiro Passo. Derivando, obtemos

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}, \text{ ou}$$

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

Isto significa que, em cada instante,

(Velocidade de variação de y) $= \dfrac{x}{y}$ vezes (velocidade de variação de x).

Quarto passo. $x = 80$, $\dfrac{dx}{dt} = -5$ milhas por hora $= -5 \times 5280$ pés por hora.

$$y = \sqrt{x^2 + 3600} = 100 \qquad \frac{dy}{dt} = ?$$

Quinto Passo. Substituindo em (1),

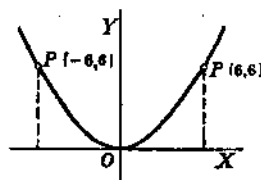
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{80}{100} \times 5 \times 5280 \text{ pés por hora}$$
$$= -4 \text{ milhas por hora. } \textit{Resp.}$$

2. Um ponto move-se sobre a parábola $6y = x^2$ de modo tal que quando $x = 6$ a abscissa cresce com a velocidade de 2 cm por segundo. Com que velocidade cresce a ordenada nesse instante?

SOLUÇÃO. *Primeiro Passo.* Desenhemos a parábola

Segundo Passo. $6y = x^2$.

Terceiro Passo. $6\dfrac{dy}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt}$, ou

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{3}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Isto significa que, em *cada* ponto da parábola,

(velocidade da ordenada) $= \dfrac{x}{3}$ *vezes (velocidade da abscissa)*

Quarto Passo. $x = 6$. $\dfrac{dx}{dt} = 2$ cm por segundo.

$$y = \frac{x^2}{6} = 6. \qquad \frac{dy}{dt} = ?$$

Quinto Passo. Substituindo em (2),

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{3} \times 2 = 4 \text{ cm por segundo. } \textit{Resp.}$$

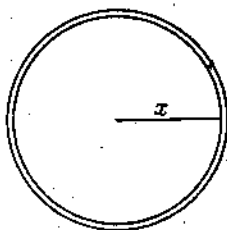
Do primeiro resultado notamos que no ponto P (6, 6) a ordenada varia duas vezes mais ràpidamente que a abscissa.

No ponto $P'(-6, 6)$, tem-se $\frac{dy}{dt} = -4$ cm por segundo, e o sinal *menos* indica que a ordenada é decrescente quando a abscissa cresce.

3. A dilatação pelo calor de um prato circular de metal é tal que o raio cresce com a velocidade de 0,01 cm por segundo. Com que velocidade de variação cresce a área do prato quando o raio tem 2 cm?

SOLUÇÃO. Seja x = raio e y = área do prato. Então

$$y = \pi x^2.$$

$$(3) \qquad \frac{dy}{dt} = 2\pi x \frac{dx}{dt}.$$

Portanto, em cada instante a área do prato cresce, em cm quadrados, $2\pi x$ vezes mais ràpidamente que o raio em centímetros.

$$x = 2, \qquad \frac{dx}{dt} = 0{,}01, \qquad \frac{dy}{dt} = ?$$

Substituindo em (3),

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi \times 2 \times 0{,}01 = 0{,}04\,\pi \text{ cm}^2 \text{ por segundo.} \quad \textit{Resp.}$$

4. A 12 pés de altura de um passeio reto e horizontal, está presa uma fonte de luz. Sobre o passeio e afastando-se da fonte com a velocidade de 168 pés por minuto, caminha um rapaz de 5 pés de altura.

Com que rapidez varia o comprimento da sombra do rapaz?

SOLUÇÃO. Seja x = distância do rapaz de um ponto situado diretamente sob a luz L e y = comprimento da sombra do rapaz.

Da figura,

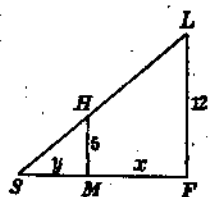
$$y : y + x = 5 : 12,$$

ou

$$y = \frac{5}{7}x.$$

Derivando

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{7}\frac{dx}{dt};$$

portanto, a rapidez com que varia o comprimento da sombra são os 5/7 da rapidez com que anda o rapaz, ou 120 pés por minuto.

5. Um ponto move-se sobre a parábola $y^2 = 12x$ de modo a que sua abscissa cresça uniformemente na razão de 2 cm por segundo. Em que ponto crescem a abscissa e ordenada com igual rapidez? *Resp.* (3, 6).

6. Ache os valores de x para os quais a velocidade de variação de

$$x^3 - 12x^2 + 45x - 13$$

é nula. *Resp.* 3 e 5.

7. Faz-se a atracação de um barco cujo tombadilho está 12 pés abaixo do nível do cais por um cabo passando por uma argola no assoalho do cais. O cabo é arrastado por um guindaste na razão de 8 pés por minuto. Qual a rapidez com que se move o barco quando está a 16 pés do cais? *Resp.* 10 pés por minuto.

8. Um barco está preso pelo cabo de um guindaste situado 20 pés acima do nível em que o cabo se prende no barco. Este afasta-se 8 pés por segundo. Com que rapidez se desenrola o cabo quando o barco está a 30 pés do ponto diretamente situado sob o guindaste? *Resp.* 6,66 pés por segundo.

9. Uma extremidade de uma escada apóia-se num muro perpendicular ao plano onde está a outra extremidade. O pé da escada é afastado da parede à razão de 3 cm por minuto. Pergunta-se: (a) Com que rapidez desce o topo da escada quando o pé está a 14 cm da parede; (b) quando o pé e o topo se movem com igual rapidez; (c) quando desce o topo à razão de 4 cm por minuto.

Resp. (a) $\frac{7}{8}$ cm por minuto; (b) quando a $25\sqrt{2}$ cm do muro; (c) quando a 40 cm do muro.

10. Um navio dirige-se para o sul com a velocidade de 6 km por hora; outro para o este com 8 km por hora. Às 16 horas o segundo passa pelo ponto onde o primeiro estivera duas horas antes. Pergunta-se: (a) como variava a distância entre eles às 15 horas; (b) como às 17 horas; (c) quando a distância não variava.

Resp. (a) Decrescendo 2,8 km.p.h.; (b) crescendo 8,73 km.p.h.; (c) 15 h. 17 minutos.

11. O lado de um triângulo equilátero mede a cm e cresce k cm por hora. Com que velocidade crescerá a área do triângulo?

Resp. $\frac{1}{2}ak\sqrt{3}$ cm² por hora.

12. A aresta de um tetraedro regular mede 10 cm e cresce 0,1 cm por minuto. Com que velocidade crescerá o volume do tetraedro?

13. Se num determinado instante as dimensões de um retângulo são a e b e variam com velocidades m e n respectivamente, mostrar que a área do retângulo varia com a velocidade $an + bm$.

14. Num determinado instante as três dimensões de um paralelepípedo retângulo são 6 cm, 8 cm, e 10 cm e crescem com as velocidades de 0,2 cm por segundo, 0,3 cm por segundo, 0,1 cm por segundo respectivamente. Com que velocidade crescerá o volume do paralelepípedo?

15. O período (P seg.) de uma oscilação completa de um pêndulo de comprimento l pol. é dado pela fórmula $P = 0{,}324\sqrt{l}$. Achar a velocidade com que varia o período em relação ao comprimento quando $l = 9$ pol. Por meio deste resultado dar aproximadamente a variação de P causada pela variação de l de 9 para 9,2 pol.

Resp. 0,054 seg por pol; 0,0108 seg.

16. O diâmetro e a altura de um cilindro reto regular são num determinado instante 10 cm e 20 cm respectivamente. Se o diâmetro crescer 1 cm por minuto, como variará a altura do cilindro se seu volume permanecer constante?

Resp. Decrescerá 4 cm por minuto.

17. O raio da base de um cone cresce 3 cm por minuto e sua altura decresce 4 cm por minuto. Como variará a área total do cone quando o raio fôr igual a 7 cm e a altura 24 cm.

Resp. Crescerá 96π cm² por minuto.

18. Um cilindro de raio r e altura h tem um hemisfério de raio r colocado em cada extremidade. Se r crescer $\frac{1}{2}$ cm por minuto, como deverá h variar para manter o volume do corpo o mesmo que no instante em que r é igual a 10 cm e h igual a 20 cm.

19. Deixa-se cair uma pedra num poço e, t segundos depois, outra. Mostrar que a distância entre as pedras cresce com a velocidade de $t.g$ pés por segundo.

20. Um balão contém 1000 pés cúbicos de gás à pressão de 5 libras por polegada quadrada. Se a pressão decresce na razão de 0,05 libras por polegada quadrada por hora, com que velocidade cresce o volume (use a lei de Boyle: $pv = c$).

Resp. 10 pés cúbicos por hora.

21. A lei adiabática para a expansão do ar é $PV^{1,4} = C$. Se o volume observado num determinado instante, é igual a 10 pés

cúbicos e a pressão é de 50 libras por polegada quadrada, como variará a pressão se o volume decrescer de 1 pé cúbico por segundo?

Resp. Crescerá 7 libras por polegada quadrada por segundo.

22. Se $y = 4x - x^3$ e x cresce constantemente de 1/3 de unidade por segundo, achar com que velocidade o coeficiente angular da curva varia no instante em que $x = 2$.

Resp. Decrescendo 4 unidades por segundo.

23. De uma torneira cai água em um vaso de forma hemisférica, com 14 cm de diâmetro, à razão de 2 cm³ por segundo. Com que velocidade está a água subindo: (a) quando ocupa a metade do vaso? (b) quando começa a transbordar? (O volume do segmento esférico é $\pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$, onde h é a altura do segmento).

24. De um balão esférico escapam 1 000 cm³ de gás por minuto. No instante em que o raio é igual a 10 cm: (a) com que velocidade o raio decresce? (b) com que velocidade a superfície decresce?

Resp. 200 cm² por minuto.

25. Se r representa o raio de uma esfera, S a superfície e V o volume, provar a relação $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2}\frac{dS}{dt}$.

26. O leito de uma estrada de ferro forma com uma estrada de rodagem um ângulo de 60°. Uma locomotiva está a 500 m da interseção e se afasta dela com a velocidade de 60 km por hora. Um automóvel está a 500 m da interseção e para ela se dirige com a velocidade de 30 km por hora. Qual é a velocidade de variação da distância entre a locomotiva e o automóvel?

Resp. Cresce 15 km por hora ou $15\sqrt{3}$ km por hora.

27. Uma tina horizontal com 10 m de comprimento tem como seção vertical um triângulo retângulo isósceles. Enche-se a tina de água à razão de 8 m³ por minuto. Com que velocidade sobe a superfície da água quando a mesma tem 2 m de profundidade?

Resp. $\frac{1}{5}$ m por minuto.

28. No problema 27, que volume de água deve ser derramado por minuto para que o seu nível suba $\frac{1}{8}$ m por min. quando a água tem 3 metros de profundidade?

29. Um recipiente horizontal com 12 m de comprimento tem como seção vertical, um trapézio. O fundo dêste mede 3 m e seus

lados são inclinados, em relação à vertical, de um ângulo cujo seno é $\frac{4}{5}$. Nêste recipiente a água está sendo derramada à razão de 10 m³ por minuto. Com que velocidade sobe o nível da água quando ela tem 2 m de profundidade?

30. No Problema 29, com que velocidade a água deve ser retirada do recipiente para que o seu nível baixe de 0,1 m por minuto quando ela tem 3 m de profundidade?

31. A abscissa da interseção com o eixo dos xx da reta tangente ao ramo positivo da hipérbole $xy = 4$ cresce de 3 unidades por segundo. Seja B a interseção da mesma tangente com o eixo dos yy. Achar a velocidade de B no fim de 5 segundos, sabendo-se que a abscissa da interseção com o eixo dos xx parte da origem.

Resp. $-\frac{16}{75}$ unidades por segundo.

32. Um ponto P se move ao longo da parábola $y^2 = x$ de modo que sua abscissa cresça na razão constante de k unidades por segundo. A projeção de P sôbre o eixo dos xx é M. Com que velocidade varia a área do triângulo OMP quando P está no ponto para o qual $x = a$?

Resp. $\frac{3}{4} k \sqrt{a}$ unidades por segundo.

OUTROS PROBLEMAS

1. Retângulos inscritos na área limitada pela parábola $y^2 = 16x$ e a sua corda focal perpendicular ao eixo e tais que um de seus lados esteja sempre sobre a corda focal, servem de base a paralelepípedos retângulos cujas alturas são sempre iguais às do lado paralelo ao eixo dos xx. Achar o volume do maior dêsses paralelepípedos.

Resp. $\frac{4096}{125}\sqrt{5} = 73{,}27$.

2. Dentre as elipses simétricas em relação aos eixos coordenados, passando pelo ponto fixo (h, k) achar a de área mínima.

Resp. $k^2x^2 + h^2y^2 = 2\,h^2k^2$.

3. A curva $x^3 - 3\,xy + y^3 = 0$ tem um trecho no primeiro quadrante simétrico em relação à reta $y = x$. Triângulos isósceles tendo um vértice comum na origem e bases sobre a reta $x + y = a$, estão inscritos nesse trecho. Para que valor de a se obtém um triângulo de área máxima.

Resp. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}) = 2{,}303$.

4. De um ponto P, do primeiro quadrante, situado sobre a curva $y = 7 - x^2$, traçou-se uma tangente, que cortou os eixos coor-

denados em A e B. Achar a posição de P para a qual AB é um mínimo.

Resp. Ordenada = $\frac{49}{8}$.

5. O custo da construção de um edifício é $50.000 para o primeiro pavimento, $52.500 para o segundo, $55.000 para o terceiro e assim sucessivamente. Outras despesas (terreno, plantas, alicerces, etc.) importam em $350.000. A renda líquida anual de cada pavimento é $5.000. Que número de pavimentos proporcionará o maior rendimento neste investimento?

Resp. 17.

6. O consumo de um artigo, que se vende aos quilos, é inversamente proporcional ao imposto que incide sobre ele. Sabendo-se que o consumo é de m quilos quando o artigo não é taxado e é de n quando a taxa é de t cruzeiros por quilo, achar a taxa que deve ser imposta a cada quilo para se ter a máxima renda possível.

7. Um triângulo ABC é formado por uma corda BC da parábola $y = k\,x^2$ e as tangentes AB e AC em cada extremidade da corda. Se BC permanece perpendicular ao eixo da parábola e se aproxima do vértice com a velocidade de 2 unidades por segundo, achar a velocidade de variação da área do triângulo quando a corda BC está a 4 unidades do vértice.

8. Um tanque cilíndrico vertical de raio igual a 10 polegadas tem um orifício de raio igual a 1 polegada em sua base. A velocidade com a qual a água contida no tanque escapa é dada pela fórmula $v^2 = 2\,gh$, onde h é a profundidade da água e g é a aceleração da gravidade. Qual é a rapidez de variação da velocidade?

Resp. Decresce $\frac{1}{100}$g pés por segundo quadrado.

9. Uma luz dista 20 pés de uma parede e está 10 pés acima do centro de um corredor que é perpendicular à parede. Um homem com 6 pés de altura percorre o corredor em direção à parede com a velocidade de 2 pés por segundo. Quando ele está a 4 pés da parede, com que velocidade a sombra de sua cabeça se move na parede?

Resp. $\frac{5}{8}$ de pé por segundo

CAPÍTULO VI

DERIVAÇÃO SUCESSIVA E APLICAÇÕES

53. Definição de derivadas sucessivas. Vimos que a derivada de uma função de x é também uma função de x. Esta nova função pode também ser derivável e neste caso a derivada da *derivada primeira* é chamada *derivada segunda*. Semelhantemente, a derivada da derivada segunda chama-se *derivada terceira* e, assim sucessivamente, a derivada da derivada $(n-1)$-egésima chama-se *derivada n-egésima*. Por exemplo, se

$$y = 3x^4,$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 36x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 72x, \quad \text{etc.}$$

Notação. Os símbolos para as sucessivas derivadas são os seguintes:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc.}$$

Para $y = f(x)$, as derivadas sucessivas são indicadas também por

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x); \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

No exemplo dado acima é mais cômoda a notação $y = 3x^4$, $y' = 12x^3$, $y'' = 36x^2$, $y''' = 72x$, $y^{IV} = 72$.

54. Derivação sucessiva das funções implícitas. Para ilustrar o que ficou dito acima acharemos $\frac{d^2y}{dx^2}$ da equação da hipérbole

(1) $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Derivando em relação a x (§ 41).

$$2\,b^2x - 2\,a^2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Derivando de novo e lembrando que y é função de x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2yb^2 - b^2xa^2\frac{dy}{dx}}{a^4y^2}.$$

Substituindo $\frac{dy}{dx}$ pelo valor dado em (2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^4y^2} = -\frac{b^2(b^2x^2 - a^2y^2)}{a^4y^3}.$$

Mas, a equação dada fornece $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

PROBLEMAS

Verifique os resultados abaixo

1. $y = 3\,x^4 - 2\,x^3 + 6\,x.$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 36\,x^2 - 12\,x.$

2. $s = \sqrt{a + bt}.$ $\qquad \frac{d^3s}{dt^3} = \frac{3\,b^3}{8(a + bt)^{\frac{5}{2}}}.$

3. $y = \frac{a + bx}{a - bx}.$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\,ab^2}{(a - bx)^3}.$

4. $u = \sqrt{a^2 + v^2}.$ $\qquad \frac{d^2u}{dv^2} = \frac{a^2}{(a^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}.$

$= \frac{x^2}{a + x}.$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\,a^2}{(a + x)^3}.$

6. $s = \dfrac{t}{\sqrt{2t+1}}$. $\qquad \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{-(t+2)}{(2t+1)^{\frac{5}{2}}}$.

7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{1-x}$. $\qquad f^{\text{iv}}(x) = \dfrac{-\underline{|4}}{(1-x)^5}$.

8. $y = \dfrac{2}{x+1}$. $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{2(-1)^n \underline{|n}}{(x+1)^{n+1}}$.

9. $x^2 + y^2 = r^2$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{r^2}{y^3}$.

10. $y^2 = 4ax$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4a^2}{y^3}$.

11. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}$.

12. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{h^2 - ab}{(hx+by)^3}$.

13. $x^3 + y^3 = 1$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2x}{y^5}$.

14. $x^4 + 2x^2y^2 = a^4$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2y^4 - x^2y^2 - x^4}{x^2y^3}$.

Nos exercícios 15 - 25 achar os valores de y' e y'' para os valores dados às variáveis.

15. $y = \sqrt{ax} + \dfrac{a^2}{\sqrt{ax}}$; $x = a$. *Resp.* $y' = 0$, $y'' = \dfrac{1}{2a}$.

16. $y = \sqrt{25 - 3x}$; $x = 3$. $\qquad y' = -\frac{3}{8}$, $y'' = -\frac{9}{256}$.

17. $y = x\sqrt{x^2 + 9}$; $x = 4$. $\qquad y' = \frac{41}{5}$, $y'' = \frac{236}{125}$.

18. $x^2 - 4y^2 = 9$; $x = 5$, $y = 2$. $\qquad y' = \frac{5}{8}$, $y'' = -\frac{9}{128}$.

19. $x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$; $x = 2$, $y = -1$. $\qquad y' = 0$, $y'' = -\frac{1}{3}$.

20. $y = (3 - x^2)^4$; $x = 1$.

21. $y = \sqrt{1 + 2x}$; $x = 4$.

22. $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$; $x = 2$.

23. $y = x\sqrt{3x - 2}$; $x = 2$.

24. $y^2 + 2xy = 16$; $x = 3$, $y = 2$.

25. $x^3 - xy^2 + y^3 = 8$; $x = 2$, $y = 2$.

Para as funções abaixo achar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

26. $y = x^3 - \dfrac{3}{x}$.

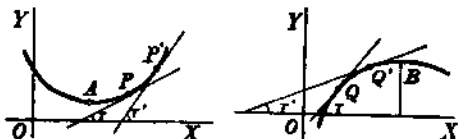
29. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + a^2}$.

28. $y = \sqrt[3]{2 - 3x}$.

30. $y^2 - 4xy = 16$.

31. $x^3 - 3axy + y^3 = b^3$.

55. — Concavidade de uma curva. Quando o ponto P (x, y) percorre uma curva, o coeficiente angular da tangente à curva no ponto P varia.

Quando a tangente está abaixo da curva (Fig. *a*), o arco da curva nas proximidades de P, é côncavo para cima; quando a tangente está acima da curva (Fig. *b*), o arco é côncavo para baixo. Na Fig. *a*, o coeficiente angular cresce quando P descreve o arco AP'; logo, $f'(x)$ é uma função crescente de x. Por outro lado, na Fig. *b*, quando P descreve o arco QB, o coeficiente angular decresce e $f'(x)$ é uma função decrescente. No primeiro caso, portanto, $f''(x)$, é positiva, no segundo caso, negativa (§ 45). Temos, pois, o seguinte critério para determinar o sentido da concavidade num ponto.

O gráfico de $y = f(x)$ é côncavo para cima se a derivada segunda de y em relação a x é positiva e côncava para baixo se esta derivada é negativa.

56. — Segundo método para o exame de máximos e mínimos. Em A, na Fig. *a* do parágrafo precedente, o arco é côncavo para cima e a ordenada tem um máximo, isto é, $f'(x) = 0$, $f''(x)$ é positiva. Em B, na Fig. *b*, $f'(x) = 0$, $f''(x)$ é negativa.

Podemos, então, estabelecer condições suficientes para máximo e mínimo valores de $f(x)$ para valores críticos da variável, como segue:

$f(x)$ é um máximo se $f'(x) = 0$ e $f''(x)$ = número negativo.
$f(x)$ é um mínimo se $f'(x) = 0$ e $f''(x)$ = número positivo.

Temos, pois, a seguinte *regra prática* para o exame de máximos e mínimos de uma função.

PRIMEIRO PASSO. *Achar a derivada da função.*

SEGUNDO PASSO. *Igualar a derivada a zero e achar as raízes reais da equação obtida (os valores críticos da variável).*

TERCEIRO PASSO. *Achar a derivada segunda.*

QUARTO PASSO. *Substituir cada valor crítico da variável na derivada segunda. Se o resultado é negativo, então a função tem um máximo para esse valor crítico; se o resultado é positivo, então a função tem um mínimo.*

Quando $f''(x) = 0$ ou não existe, o processo acima falha, embora possa haver, eventualmente, máximo ou mínimo para a função; nêste caso, o primeiro método, dado no § 47, deve ser aplicado. Usualmente, o segundo método não falha e, se o processo de achar a segunda derivada não é muito longo ou monótono, é êste, geralmente, o método mais cômodo.

Exemplo ilustrativo 1. Apliquemos o método acima no exame da função

$$M = x^2 + \frac{432}{x},$$

encontrada no exemplo desenvolvido na página 60.

SOLUÇÃO. $$f(x) = x^2 + \frac{432}{x}.$$

Primeiro Passo. $$f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}.$$

Segundo Passo. $$2x - \frac{432}{x^2} = 0,$$

$$x = 6, \text{ valor crítico}$$

Terceiro Passo. $$f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$$

Quarto Passo. $$f''(6) = +.$$

Logo $$f(6) = 108, \text{ mínimo valor}$$

Exemplo ilustrativo 2. Examinar $x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ no que concerne aos máximos e mínimos. Usar o segundo método

SOLUÇÃO. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$

Primeiro Passo. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$

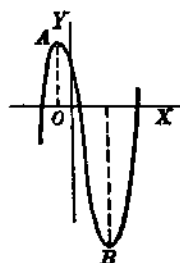
Segundo Passo. $3x^2 - 6x - 9 = 0;$

portanto, os valores críticos são $x = -1$ e 3.

Terceiro Passo. $f''(x) = 6x - 6.$

Quarto Passo. $f''(-1) = -12.$

$\therefore f(-1) = 10 =$ (ordenada de A) $=$ máximo valor

$f''(3) = +12. \therefore f(3) = -22$ (ordenada de B) $=$ mínimo valor.

PROBLEMAS

Examinar cada uma das funções abaixo, no que concerne aos máximos e mínimos.

1. $x^3 + 3x^2 - 2$. — $x = -2$, dá máx. $= 2$; $x = 0$, dá mín. $= -2$.

2. $x^3 - 3x + 4$. — $x = -1$, dá máx. $= 6$; $x = 1$, dá mín. $= 2$.

3. $2x^3 - 3ax^2 + a^3$. $(a > 0)$ — $x = 0$, dá máx. $= a^3$; $x = a$, mín. $= 0$.

4. $2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$. — $x = 2$, dá máx. $= 22$; $x = -1$, dá mín. $= -5$.

5. $3x - 2x^2 - \dfrac{4x^3}{3}$. — $x = \frac{1}{2}$, dá máx. $= \frac{5}{6}$; $x = -\frac{3}{2}$, dá mín. $= -\frac{9}{2}$.

6. $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$. — $x = 0$, dá máx. $= 2$; $x = -1$, dá mín. $= -3$; $x = 2$, dá mín. $= -30$.

7. $x^4 - 4x^2 + 4$. — $x = 0$, dá máx. $= 4$; $x = \pm\sqrt{2}$, dá mín. $= 0$.

8. $\dfrac{ax}{x^2 + a^2}$. — $x = a$, dá máx. $= \frac{1}{2}$; $x = -a$, dá mín. $= -\frac{1}{2}$.

9. $x^3 + 9x^2 + 27x + 9$.

10. $12x + 9x^2 - 4x^3$.

11. $x^2(x - 4)^2$.

12. $x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$.

13. $x^2 - \dfrac{a^4}{x^2}$.

14. Deve-se fazer uma caixa retangular com base quadrada e sem tampa. Achar o volume da máxima caixa que pode ser feita com 1 200 pés quadrados de material.

Resp. 4 000 pés cúbicos.

15. Deve-se construir um tanque de base quadrada e sem tampa com capacidade para 125 m³ de água. Sendo de Cr$50,00 o preço do m² de material para as faces e de Cr$ 100,00 para o fundo, quais as dimensões para que o preço seja mínimo.

Resp. Um cubo de aresta = 5 m.

16. Deve-se fazer um canteiro com 800 m² e em volta um passeio com 3 m de largura ao longo de dois lados paralelos e 6 ao longo

dos outros dois. Quais devem ser as dimensões do canteiro para que a área total do passeio e canteiro seja mínima?

Resp. 20 m $\times$ 40 m.

17. Um terreno retangular a conter uma dada área deve ser murado ao longo de três dos seus lados. Mostre que a despesa com o muro é mínima quando o comprimento do lado não murado é o dôbro do comprimento do outro lado.

18. Deve-se fazer uma tina de uma peça retangular de metal, dobrando-se as quinas de modo a que uma seção transversa do sólido obtido seja um retângulo. Sendo 14 cm a largura da peça, qual deve ser a profundidade da tina para que tenha máxima capacidade. *Resp.* 3,5 cm.

19. Uma janela formada por um retângulo encimado de um triângulo equilátero tem 15 pés de perímetro. Achar as dimensões da janela, sabendo que por ela passa o máximo de luz.

Resp. O retângulo tem 3,51 pés de largura e 2,23 pés de altura.

20. Uma esfera de madeira pesa w quilos. Qual o peso do cilindro circular reto mais pesado que se pode cortar de esfera.

Resp. $\frac{w}{\sqrt{3}}$ quilos.

21. A geratriz de um cone circular é uma dada constante a. Achar a altura se o volume é máximo. *Resp.* $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

22. Uma lata de gasolina consiste de um cilindro encimado por um cone cuja altura $= \frac{2}{3}$ do diâmetro. Mostre que para uma dada capacidade, tem-se o mínimo de material necessário à construção da lata quando a altura do cilindro é igual à altura do cone.

23. Dada a parabola $y^2 = 8x$ e o ponto $P\,(6, 0)$ sôbre o eixo, achar as coordenadas dos pontos da parábola que mais se aproximam de P. *Resp.* $(2, \pm 4)$.

24. Um triângulo isósceles tem 20 pés de base e 8 pés de altura. Quais as dimensões do máximo paralelogramo inscrito com um lado sôbre a base do triângulo, se o ângulo agudo do paralelogramo é arc tg $\frac{4}{3}$? *Resp.* 5 pés $\times$ 10 pés.

25. Quer se cavar uma passagem do ponto A para um ponto B, situado 200 pés abaixo e 600 pés a esquerda do ponto A. O ter-

reno é pedregoso abaixo do nível de A e arenoso acima. Sendo de 5 cruzeiros por pé linear o preço da cavação em terreno arenoso e de 13 cruzeiros em terreno pedregoso, achar o mínimo preço da empreitada. *Resp.* Cr$ 5 400,00.

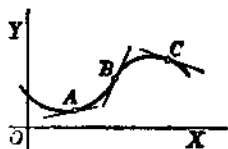
26. Uma folha de papel para cartaz deve conter 16 pés quadrados. As margens superior e inferior devem ter 6 polegadas e as laterais 4 polegadas. Quais as dimensões para que a área impressa seja máxima? *Resp.* $4{,}90 \times 3{,}27$ pés.

27. Uma corrente elétrica atravessa uma bobina de raio r e exerce uma fôrça F sôbre um pequeno ímã cujo eixo está numa reta passando pelo centro da bobina e perpendicular ao seu plano. A força é dada por $F = \dfrac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$, onde x é a distância entre o centro da bobina e o ímã. Mostre que F é máxima para $x = \frac{1}{2} r$.

57. — Pontos de inflexão. Um *ponto de inflexão* sôbre uma curva separa arcos de concavidades voltadas para direções contrárias (V. § 55).

Na figura abaixo, B é um ponto de inflexão. Quando o ponto que descreve uma curva passa por um ponto de inflexão, a derivada segunda muda de sinal e, se contínua, deve anular-se no ponto; logo, temos:

(1) *Nos pontos de inflexão,* $f''(x) = 0$.

Entre as raízes da equação $f''(x) = 0$ estão as abscissas dos pontos de inflexão. Para determinar a direção da concavidade na vizinhança de um ponto de inflexão, examine o sinal de $f''(x)$, primeiro, para valores de x ligeiramente menores que a abscissa do ponto de inflexão e, depois, para os ligeiramente maiores. Se $f''(x)$ muda do sinal $+$ para o sinal $-$, a concavidade é para cima à esquerda e para baixo à direita; em caso contrário, a curva é côncava para baixo à esquerda e para cima à direita.

Na vizinhança de um ponto onde a curva é côncava para cima (como em A) a curva fica acima da tangente e num ponto onde a curva é côncava para baixo (como em C), a curva fica abaixo da tangente. Consequentemente, num ponto de inflexão (como B), a tangente atravessa a curva.

Vamos dar uma regra para achar pontos de inflexão de uma curva de equação $y = f(x)$.

PRIMEIRO PASSO. *Ache* $f''(x)$.

SEGUNDO PASSO. *Iguale* $f''(x)$ *a zero e ache as raízes reais da equação.*

TERCEIRO PASSO. *Fixada uma destas raízes, examine o sinal de* $f''(x)$, *primeiro para valores ligeiramente menores que a raiz e depois para valores ligeiramente maiores. Se* $f''(x)$ *muda de sinal ao passar de um valor menor para um maior, então o ponto é de inflexão.*

Se $f''(x) = +$, *a curva é côncava para cima* $\underset{+}{\smile}$.*
Se $f''(x) = -$, *a curva é côncava para baixo* $\underset{-}{\frown}$.

Algumas vezes é conveniente fatorar $f''(x)$ antes do Terceiro Passo.

Admite-se que $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas. A solução do Problema 2, abaixo, mostra como interpretar o caso em que $f'(x)$ e $f''(x)$ são ambas infinitas.

PROBLEMAS

Examinar as curvas seguintes no que concerne a pontos de inflexão e concavidade

1. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

SOLUÇÃO. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

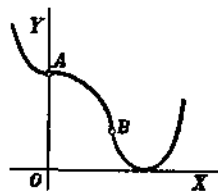
Primeiro Passo. $f''(x) = 36x^2 - 24x$.

Segundo Passo. $36x^2 - 24x = 0$.

$\therefore x = \frac{2}{3}$ e $x = 0$ são as raízes.

Terceiro Passo $f''(x) = 36x(x - \frac{2}{3})$.

Se $x < 0$, $f''(x) = +$.

Se $\frac{2}{3} > x > 0$, $f''(x) = -$.

Portanto, a curva é côncava para cima à esquerda e côncava para baixo à direita de $x = 0$ (A na figura).

$$\text{Quando } 0 < x < \tfrac{2}{3},\ f''(x) = -.$$

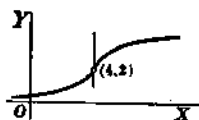
$$\text{Quando } x > \tfrac{2}{3},\ f''(x) = +.$$

* Isto pode ser lembrado fàcilmente se dissermos que um vaso modelado pela curva, quando esta é côncava para cima, contém (+) água e quando é côncava para baixo entorna (−) água.

Portanto, a curva é côncava para baixo à esquerda e côncava para cima à direita de $x = \frac{2}{3}$ (B na figura).

Logo, os pontos $A\ (0, 1)$ e $B\ (\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ são pontos de inflexão.

A curva é, evidentemente, côncava para cima em todo ponto à esquerda de A, côncava para baixo entre $A\ (0, 1)$ e $B\ (\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$, e côncava para cima em todo ponto à direita de B.

2. $(y - 2)^3 = (x - 4)$.

SOLUÇÃO. $\quad y = 2 + (x - 4)^{\frac{1}{3}}$.

Primeiro Passo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x - 4)^{-\frac{2}{3}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}(x - 4)^{-\frac{5}{3}}.$$

Segundo Passo. Para $x = 4$, as derivadas primeira e segunda são infinitas.

Terceiro Passo.

$$x < 4, \frac{d^2y}{dx^2} = +.$$

$$x > 4, \frac{d^2y}{dx^2} = -.$$

Podemos, pois, concluir que a tangente em $(4, 2)$ é perpendicular ao eixo dos xx, que à esquerda de $(4, 2)$ a curva é côncava para cima e à direita para baixo; logo, $(4, 2)$ é um ponto de inflexão.

3. $y = x^2$. *Resp.* Côncava para cima em toda parte

4. $y = 5 - 2x - x^2$. Côncava para baixo em toda parte.

5. $y = x^3$. Côncava para baixo à esquerda e côncava para cima à direita de $(0, 0)$.

6. $y = x^4$. Côncava para cima em toda parte.

7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$. Côncava para baixo à esquerda e côncava para cima à direita de $x = \frac{1}{2}$.

8. $y = 24x^2 - x^4$. 9. $y = x + \frac{1}{x}$. 10. $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

58. — Traçado de curvas. O método elementar de traçar uma curva cuja equação é dada em coordenadas retangulares é, como o leitor já sabe, o de exprimir uma das variáveis, digamos y, em

função da outra, digamos x, dar valores arbitrários a esta última, calcular os valores correspondentes de y, marcar os pontos (x, y) que assim se obtém e, finalmente, traçar a curva passando por eles. Este processo é muito laborioso e nem sempre aplicável pois pode não ser possível exprimir uma das variáveis em função da outra, como no caso da equação de uma curva algébrica cujo grau seja superior ao segundo. Como é, usualmente, a forma geral da curva que se quer, o cálculo nos fornece meios mais poderosos que o acima recordado para a determinação da forma de uma curva; de fato, a derivada primeira fornece o coeficiente angular da curva em cada ponto, a derivada segunda, a direção da concavidade em cada intervalo. Combinados estes resultados, temos uma idéia da forma da curva. Para ajuda ao estudante de como proceder neste sentido damos abaixo a

Regra para o traçado de curvas (em coordenadas retangulares).

PRIMEIRO PASSO. *Ache a derivada primeira; iguale-a a zero e ache as raízes reais da equação obtida. Como as abscissas dos pontos de máximo e mínimo estão entre estas raízes, examine-as uma a uma.*

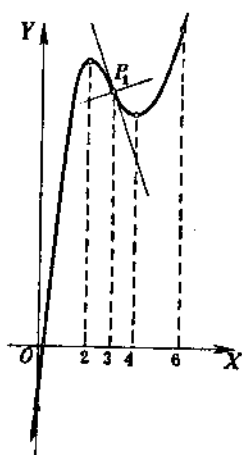
SEGUNDO PASSO. *Ache a derivada segunda; iguale-a a zero e ache as raízes reais da equação obtida. Como as abscissas dos pontos de inflexão estão entre estas raízes, examine-as uma a uma.*

TERCEIRO PASSO. *Calcule as ordenadas correspondentes aos valores das raízes achadas nos dois primeiros passos. Calcule tantos pontos quantos necessários para dar uma boa idéia da forma da curva. Faça um quadro como o que fizermos para o problema desenvolvido abaixo.*

QUARTO PASSO. *Marque os pontos determinados e desenhe a curva passando por eles, valendo-se, para isso, dos resultados fornecidos pelo quadro.*

Quando os valores das ordenadas calculadas são grandes, é melhor reduzir a escala sobre o eixo dos yy afim de que o desenho, traçado dentro dos limites do papel usado, mostre a forma geral da curva. Deve-se usar papel quadriculado. Os resultados devem ser tabulados como nos problemas que resolvemos. No quadro, os valores de x devem seguir um ao outro, crescendo *algèbricamente.*

PROBLEMAS

Trace as curvas seguintes, fazendo uso da regra acima. Ache também as equações da tangente e da normal em cada ponto de inflexão.

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$

SOLUÇÃO. Pela regra acima.

Primeiro Passo $\qquad y' = 3x^2 - 18x + 24,$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0,$$

$$x = 2, 4.$$

Segundo Passo. $\qquad y'' = 6x - 18,$

$$6x - 18 = 0,$$

Terceiro Passo. $\qquad x = 3.$

x	y	y'	y''	Observ.	Concavidade
0	−7	+	−		concav. p. baixo
2	13	0	−	máx.	
3	11	−	0	pt. de infl.	
4	9	0	+	mín.	
6	29	+	+		concav. p. cima

Quarto Passo. Marcando os pontos e traçando a curva, obtemos a figura ao lado.

Para achar as equações da tangente e da normal no ponto de inflexão $P_1(3, 11)$ use as fórmulas (1), (2), § 43. Isto dá $3x + y = 20$ para a tangente e $3y - x = 30$ para a normal.

2. $3y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11.$

Resp. Máx. $(-1, \frac{16}{3})$; mín. $(3, -\frac{16}{3})$; ponto de inflexão, $(1,0)$; tangente, $4x + y - 4 = 0$; normal, $x - 4y - 1 = 0$.

3. $6y = 12 - 24x - 15x^2 - 2x^3.$

Resp. Máx. $(-1, \frac{23}{6})$; mín. $(-4, -\frac{2}{3})$, ponto de inflexão $(-\frac{5}{2}, \frac{19}{12})$.

4. $y = x^4 - 8x^2.$

Resp. Máx. $(0, 0)$; mín. $(\pm 2, -16)$; pontos de inflexão $(\pm \frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{80}{9})$.

5. $y = 5x - x^5.$

Resp. Máx. $(1,4)$; mín. $(-1, -4)$; ponto de inflexão $(0, 0)$.

6. $y = \dfrac{6x}{x^2 + 3}.$

Resp. Máx. $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$; mín. $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$; pontos de inflexão $(-3, -\frac{3}{2})$, $(0, 0)$, $(3, \frac{3}{2})$.

7. $y = x^3 + 6x^2.$

8. $y = 4 + 3x - x^3.$

18. $ay = x^2 + \dfrac{2a^3}{x}.$

9. $3y = 4x^3 - 18x^2 + 15x.$

10. $y = (x - a)^3 + b.$

11. $12y = (x-1)^4 - 24(x-1)^2.$

12. $y = x^2(9 - x^2).$

13. $y = 2x^6 - 5x^2.$

14. $y = 3x^5 - 5x^3.$

15. $y = x^5 - 5x^4.$

16. $y = x(x^2 - 4)^2.$

17. $ay = x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}.$

19. $a^2y = x^3 + \dfrac{a^4}{x}.$

20. $a^2y = x^3 + \dfrac{a^5}{x^2}.$

21. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}.$

22. $y = \dfrac{x}{(x+a)^2}.$

23. $x^2y = (x^2 + 1)^2.$

24. $x^3y + 16y - x^3 = 0.$

59. — Aceleração num movimento retilíneo. No § 51 definimos a velocidade de um movimento retilíneo como a derivada da distância em relação ao tempo. Pois bem, a *aceleração* é, por definição, *a derivada da velocidade em relação ao tempo*, isto é,

$$(A) \qquad \textit{Aceleração} = a = \frac{dv}{dt}.$$

De (C), § 51, obtemos

$$(B) \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2},$$

pois $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Tendo em vista os § § 45, 47 e 56, podemos dizer que num dado instante $t = t_0$:

v é crescente, se $a > 0$;

v é decrescente, se $a < 0$;

s tem um mínimo valor, se $a > 0$ e $v = 0$;

s tem um máximo valor, se $a < 0$ e $v = 0$;

v tem um máximo (um mínimo) valor, se $a = 0$ e muda sinal de $+$ para $-$ (de $-$ a $+$) quando t passa por t_0.

No movimento retilíneo *uniformemente acelerado*, a é constante. Assim, no caso da queda livre (por ação da gravidade sòmente), $a = 9{,}80$ m por segundo quadrado. Precisamente, de (2), § 51,

$$s = 4{,}9\,t^2, \quad v = \frac{ds}{dt} = 9{,}8\,t, \quad a = 9{,}8.$$

PROBLEMAS

1. A experiência mostra que um corpo caindo livremente do repouso num vácuo próximo da superfície terrestre segue aproximadamente a lei $s = 4,9\,t^2$, onde s = espaço (altura) em metros e t = tempo em segundos. Achar a velocidade e a aceleração (a) em cada instante; (b) no fim do primeiro segundo; (c) no fim do quinto segundo.

SOLUÇÃO. (1) $s = 4,9t^2$

(a) Derivando $\frac{ds}{dt} = 9,8\,t$,

ou, de (C), § 51, (2) $v = 9,8\,t$ m. por segundo.

Derivando de novo $\frac{dv}{dt} = 9,8$,

ou, de (A) acima, (3) $a = 9,8$ m. por (seg.)^2,

que nos diz ser constante a aceleração em queda livre; em outras palavras, a velocidade cresce 9,8 cm por segundo em cada segundo do tempo de queda.

(b) Para achar v e a no fim do primeiro segundo, faz-se $t = 1$ em (2) e (3). Portanto

$$v = 9,8 \text{ m por segundo}, \quad a = 9,8 \text{ m por (seg.)}^2.$$

(c) Para achar v e a no fim do quinto segundo, faz-se $t = 5$ em (2) e (3). Logo $v = 49$ m por segundo, $a = 9,8$ m por (seg.)^2.

Dadas as seguintes equações de movimento linear, achar a posição, velocidade e aceleração no instante indicado.

2. $s = 4\,t^2 - 6\,t;\ t = 2.$ *Resp.* $s = 4,\ v = 10,\ a = 8.$

3. $s = 120\,t - 16\,t^2;\ t = 4.$ $s = 224,\ v = -8,\ a = -32.$

4. $x = 32\,t - 8\,t^2;\ t = 2.$ $x = 32,\ v = 0,\ a = -16.$

5. $y = 6\,t^2 - 2\,t^3;\ t = 1.$ $y = 4,\ v = 6,\ a = 0.$

6. $s = \dfrac{t}{t+1};\ t = 2.$ $s = \frac{2}{3},\ v = \frac{1}{9},\ a = -\frac{2}{27}.$

7. $x = 16\,t^2 - 20\,t + 4;\ t = 2.$

8. $y = 100 - 4\,t - 8\,t^2;\ t = 3.$

9. $s = \sqrt{5\,t} + \dfrac{10}{\sqrt{5\,t}};\ t = 5.$

10. $s = \sqrt[3]{3\,t + 2};\ t = 2.$

Nos problema seguintes achar a aceleração no instante indicado.

11. $v = 80 - 32\,t;\ t = 0.$ *Resp.* $-32.$

12. $v = 4\,t^2 - 10;\ t = 2.$ $6.$

13. $v = \dfrac{2}{t+1};\ t = 1.$

Dadas as seguintes equações de movimento retilíneo, **achar a** posição e a aceleração da partícula no instante em que, pela primeira vez, está em repouso.

14. $s = 16t^2 - 64t + 64.$ *Resp.* $s = 0,\ a = 32.$

15. $s = 120t - 16t^2.$

16. $s = 3c^2t - t^3.$

17. $s = 5t + \dfrac{20}{t+1}.$

18. Uma bola atirada verticalmente para cima move-se segundo a lei.

$$s = 80t - 16t^2.$$

Achar (a) a posição e a velocidade depois de dois segundos e depois de 3 seg.; (b) qual a altura que atinge; (c) qual a altura no quarto segundo.

19. Se a equação de um movimento retilíneo é $s = \sqrt{t+1}$, mostre que a aceleração é negativa e proporcional ao cubo da velocidade.

20. A altura (s cm) alcançada em t segundos por um corpo projetado verticalmente para cima com uma velocidade de v_1 cm por seg. é dada pela fórmula $s = v_1t - \frac{1}{2}gt^2$. Achar a fórmula para a máxima altura atingida pelo corpo.

21. Supondo no problema precedente $v_1 = 160$, $g = 9,8$, achar: (a) a velocidade no fim de 4 seg. e no fim de 6 seg; (b) a distância percorrida durante o quarto seg. e durante o sexto segundo.

22. Um carro faz uma viagem em 10 min., movendo-se segundo a lei $s = 250t^2 - \frac{5}{4}t^4$, onde t é medido em minutos e s em pés. Pergunta-se: (a) qual a distância que percorre; (b) qual a velocidade máxima; (c) qual a distância percorrida quando a máxima velocidade é atingida.

Resp. (a) 12.500 pés; (b) 1924 pés por min.;
(c) 6.944 pés.

OUTROS PROBLEMAS

1. Trace a curva $(4 - 2x + x^2)y = 2x - x^2$ e ache as equações da tangente e da normal em cada ponto de inflexão.

Resp. Máx. $(1, \frac{1}{3})$. Ponto de inflexão $(0,0)$; tangente, $x - 2y = 0$; normal, $2x + y = 0$. Ponto de inflexão $(2, 0)$; tangente, $x + 2y - 2 = 0$; normal, $2x - y - 4 = 0$.

2. Uma certa curva (a tratória) é tal que o comprimento de cada tangente (distância do ponto de contato à interseção com o eixo dos xx) é constante $= c$. Mostrar que

$$\text{(a)} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm y}{\sqrt{c^2 - y^2}}; \qquad \text{(b)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c^2 y}{(c^2 - y^2)^2}.$$

3. Determine k afim de que as normais nos pontos de inflexão da curva $y = k(x^2 - 3)^2$ passem pela origem.

Resp. $k = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

CAPÍTULO VII

DERIVAÇÃO DAS FUNÇÕES TRANSCENDENTES. APLICAÇÕES

Consideraremos agora funções como

$$\text{sen}\, 2x\,,\ 3^x,\ \log(1 + x^2)\,,$$

chamadas *funções transcendentes.*

60. — Fórmulas de derivação; segunda lista. As fórmulas abaixo serão deduzidas neste capítulo, e, com as fórmulas do § 29, compreendem todas as fórmulas de derivação usadas neste livro.

X $\quad \dfrac{d}{dx}(\ln v) = \dfrac{\dfrac{dv}{dx}}{v} = \dfrac{1}{v}\dfrac{dv}{dx}\,. \qquad (\ln v = \log_e v)$

X *a* $\quad \dfrac{d}{dx}(\log v) = \dfrac{\log e}{v}\dfrac{dv}{dx}\,.$

XI $\quad \dfrac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a\, \dfrac{dv}{dx}\,.$

XI *a* $\quad \dfrac{d}{dx}(e^v) = e^v \dfrac{dv}{dx}\,.$

XII $\quad \dfrac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \dfrac{dv}{dx}\,.$

XIII $\quad \dfrac{d}{dx}(\text{sen}\, v) = \cos v\, \dfrac{dv}{dx}\,.$

XIV $\quad \dfrac{d}{dx}(\cos v) = -\,\text{sen}\, v\, \dfrac{dv}{dx}\,.$

XV $\quad \dfrac{d}{dx}(\text{tg}\, v) = \sec^2 v\, \dfrac{dv}{dx}\,.$

XVI $\quad \dfrac{d}{dx}(\text{ctg}\, v) = -\,\text{cossec}^2 v\, \dfrac{dv}{dx}\,.$

XVII $$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \operatorname{tg} v \frac{dv}{dx}.$$

XVIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} v) = -\operatorname{cossec} v \operatorname{ctg} v \frac{dv}{dx}.$$

XIX $$\frac{d}{dx}(\operatorname{vers} v) = \operatorname{sen} v \frac{dv}{dx}.$$

XX $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

XXI $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cos} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

XXII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,tg} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}.$$

XXIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,ctg} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1 + v^2}.$$

XXIV $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

XXV $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,cossec} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

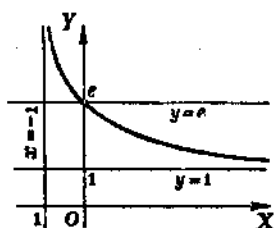
XXVI $$\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,vers} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v - v^2}}.$$

61. — O numero e. Logaritmos naturais. Um dos mais importantes limites é

(1) $$\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = 2{,}71828\ldots.$$

Este limite se indica por e. Uma demonstração rigorosa de que o mencionado limite existe está fora do alcance deste livro. Contentar-nos-emos, por isto, em mostrar, gràficamente, que quando $x \to 0$, a função $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ $(= y)$ toma valores próximos a 2,718..., isto é, $e = 2{,}718\ldots$ aproximadamente.

Quando $x \to 0$ pela esquerda, y decresce e tende a e. Quando $x \to 0$ pela direita, y cresce e também tende a e.

x	y	x	y
10	1,2710		
5	1,4310		
2	1,7320		
1	2,0000		
0,5	2,2500	−0,5	4,0000
0,1	2,5937	−0,1	2,8680
0,01	2,7048	−0,01	2,7320
0,001	2,7169	−0,001	2,7195

O fato expresso em (1) é usado no § 63.

Quando $x \to +\infty$, y tende a 1; quando $x \to -1$ pela direita, y tende a $+\infty$. As retas $y = 1$ e $x = -1$ são assíntotas.

No Capítulo XX veremos como se calcula o valor de e com um número qualquer de decimais.

Logaritmos naturais, ou *neperianos*, são os que tem o número e por base. Estes logaritmos tem uma importância extraordinária em Matemática. Para distinguir entre logaritmos naturais e logaritmos comuns usaremos a notação

Logaritmo natural de v (base e) $= \ln v$.
Logaritmo comum de v (base 10) $= \log v$.

Por definição, o logaritmo natural de um número N é o expoente x na equação

$$(3) \qquad e^x = N;\ \text{isto é, } x = \ln N\,.$$

Se $x = 0$, $N = 1$ e $\ln 1 = 0$. Se $x = 1$, $N = e$ e $\ln e = 1$.
Se $x \to -\infty$, $N \to 0$; escreveremos $\ln 0 = -\infty$.

Ao estudante é familiar o uso das tábuas de logaritmos comuns, onde a base é 10. O *logaritmo comum* de um número N é o expoente y na equação

$$(4) \qquad 10^y = N, \quad \text{ou} \quad y = \log N\,.$$

Exprimamos a relação entre $\ln N$ e $\log N$.

Tomemos em (3) os logaritmos dos dois membros, em base 10. Temos, então, por (2), p. 1,

$$x \log e = \log N\,.$$

Resolvendo e lembrando que $x = \ln N$, por (3), obtemos a relação desejada

$$(A) \qquad \ln N = \frac{\log N}{\log e} .$$

Logo, *obtemos o logaritmo natural de um número dividindo o seu logaritmo comum por log e*.

A equação (A) fornece

$$(6) \qquad \log N = \log e \, . \ln N .$$

Logo, *obtém-se o logaritmo comum de um número multiplicando o seu logaritmo natural por log e*. Este multiplicador é chamado o *módulo* $(= M)$ dos logaritmos comuns.

Pelas tábuas, $\log e = 0{,}4343$ e $\dfrac{1}{\log e} = 2{,}303$.

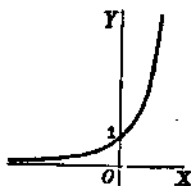
A equação (A) fornece portanto

$$(7) \qquad \ln N = 2{,}303 \log N ,$$

o que permite construir uma tábua de logaritmos naturais a partir de uma tábua de logaritmos decimais.

62. — Funções exponencial e logarítmica. A função de x

$$(1) \qquad y = e^x \qquad (e = 2{,}718\ldots)$$

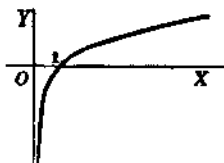
chama-se *função exponencial*. O gráfico dela é o da figura abaixo. Ela é uma função crescente de x para todos os valores de x, como veremos mais tarde, e contínua em todos os pontos.

De (1) resulta, por definição.

$$(2) \qquad x = \ln y .$$

As funções e^x e $\ln y$ são, pois, funções inversas uma da outra (§ 39). Trocando o nome das variáveis em (2), temos

$$(3) \qquad y = \ln x ,$$

na qual y é, agora, uma *função logarítmica de x*. O gráfico desta função é o da figura abaixo. Ela não é definida para valores negativos de x nem para $x = 0$. É uma função crescente para todos os valores de $x > 0$ e contínua para todos estes valores, isto é, (§ 17), para todo valor a de x maior que zero,

$$(4) \qquad \lim_{x \to a} \ln x = \ln a .$$

Quando $x \to 0$, então $y \to -\infty$, como se observou acima. O eixo dos yy é uma assíntota da curva.

As funções a^x e $\log_a x$ $(a > 0)$ têm as mesmas propriedades que e^x e $\ln x$ e gráficos similares aos de acima.

63. — Derivação de um logaritmo.

Seja $$y = \ln v. \qquad (v > 0).$$

Derivando pela Regra Geral (§ 27), considerando v como variável independente, temos

PRIMEIRO PASSO. $$y + \Delta y = \ln(v + \Delta v).$$

SEGUNDO PASSO. $$\Delta y = \ln(v + \Delta v) - \ln v$$

$$= \ln\left(\frac{v + \Delta v}{v}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right). \text{ Por (2), p. 1.}$$

TERCEIRO PASSO. $$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v}\ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right).$$

Não podemos calcular o limite do segundo membro, na forma em que está, pelas regras do § 16, pois o denominador Δv tende a zero. Escrevamos, então, a equação como segue

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{v}\cdot\frac{v}{\Delta v}\ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)$$

$$\left[\text{Multiplicando por } \frac{v}{v}\right]$$

$$= \frac{1}{v}\ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}}. \qquad \text{Por (2), p. 1}$$

A expressão que segue ln está na forma do segundo membro de (2), § 61, com $x = \dfrac{\Delta v}{v}$.

QUARTO PASSO. $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v}\ln e = \frac{1}{v}.$$

$$\left[\text{Quando } \Delta v \to 0,\ \frac{\Delta v}{v} \to 0. \text{ Logo } \lim_{\Delta v \to 0}\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}} = e, \text{ por (1), § 61. Por (4), § 62, obtemos o resultado.}\right]$$

Como o que se quer é derivar $\ln v$ em relação a x e como v é função de x, devemos usar a fórmula (A), § 38, de derivação de uma

função de função, precisamente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Substituindo o valor de $\frac{dy}{dv}$ do resultado do Quarto Passo, obtemos

$$\text{X} \qquad \frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$

A derivada do logaritmo natural de uma função é igual à derivada da função dividida pela função (ou, o recíproco da função vezes a derivada.)

Como $\log v = \log e \ln v$, temos logo (IV, § 29)

$$\text{X}\,a \qquad \frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}.$$

64. — Derivação da função exponencial.

Seja $\qquad y = a^v \qquad (a > 0)$

Tomando os logaritmos em base e dos dois membros,

$$\ln y = v \ln a.$$

ou

$$v = \frac{\ln y}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y.$$

Derivando em relação a y pela fórmula X,

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y}.$$

De (C), § 39, tratando-se de funções inversas, obtemos

$$\frac{dy}{dv} = \ln a \cdot y,$$

ou

$$(1) \qquad \frac{dy}{dv} = \ln a \cdot a^v.$$

Como v é uma função de x e se quer derivar a^v em relação a x, usamos a fórmula (A), § 38. Obtemos, assim,

$$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

XI $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(a^v) = \ln a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Quando $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, e XI torna-se

XI *a* $$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}.$$

A derivada de uma constante com expoente variável é igual ao produto do logaritmo natural da constante, pela constante com o expoente variável e pela derivada do expoente.

65. — Derivação da função exponencial geral. Demonstração da Regra de Potência.

Seja $$y = u^v. \qquad (u > 0).$$

Tomando de ambos os membros os logaritmos de base e,

$$\ln y = v \ln u,$$

ou $$y = e^{v \ln u}. \qquad \text{(Por 3 § 61)}$$

Derivando pela fórmula XI *a*,

$$\frac{dy}{dx} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx}(v \ln u)$$

$$= e^{v \ln u}\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}\right) \qquad \text{por V e X}$$

$$= u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}\right).$$

XII $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}.$$

A derivada de uma função com expoente variável é igual à soma dos dois resultados que se obtêm quando se deriva, primeiro, considerando o expoente como constante (por VI) *e depois considerando a função como constante* (por XI).

Seja v igual a uma constante qualquer n; neste caso, XII reduz-se a

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Fica, assim, provado que a Regra da Potência VI é verdadeira para qualquer valor da constante n.

Exemplo ilustrativo 1. Derivar $y = \ln(x^2 + a)$.

SOLUÇÃO.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + a)}{x^2 + a} \qquad \text{por X}$$

$$[v = x^2 + a].$$

$$= \frac{2x}{x^2 + a}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Derivar $y = \log \frac{2x}{1 + x^2}$.

SOLUÇÃO. Por (2), p. 1, temos

$$y = \log 2x - \log(1 + x^2).$$

Donde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{2x}\frac{d}{dx}2x - \frac{\log e}{1 + x^2}\frac{d}{dx}(1 + x^2) \quad \text{por III e X}a$$

$$= \log e\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{1 + x^2}\right) = \log e \frac{1 - x}{x(1 + x^2)}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 3. Derivar $y = a^{3x^2}$.

SOLUÇÃO.
$$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot a^{3x^2}\frac{d}{dx}(3x^2) \qquad \text{por XI}$$

$$= 6x \ln a \cdot a^{3x^2}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 4. Derivar $y = be^{c^2 + x^2}$.

SOLUÇÃO.
$$\frac{dy}{dx} = b\frac{d}{dx}(e^{c^2 + x^2}) \qquad \text{por IV}$$

$$= be^{c^2 + x^2}\frac{d}{dx}(c^2 + x^2) \qquad \text{por XI}a$$

$$= 2bxe^{c^2 + x^2}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 5. Derivar $y = x^{e^x}$.

SOLUÇÃO.
$$\frac{dy}{dx} = e^x x^{e^x - 1}\frac{d}{dx}(x) + x^{e^x}\ln x \frac{d}{dx}(e^x) \qquad \text{por XII}$$

$$= e^x x^{e^x - 1} + x^{e^x}\ln x \cdot e^x$$

$$= e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right). \quad \textit{Resp.}$$

66. — Derivação logarítmica. Na derivação das funções logarítmicas deve-se, antes de aplicar X e Xa, verificar se não é possível simplificar os cálculos com o uso conveniente das fórmulas

de (2), página 1. É importante que estas fórmulas sejam usadas sempre que possível.

Exemplo ilustrativo 1. Derivar $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$.

SOLUÇÃO. Usando (2), p. 1, podemos libertar a função do radical, como segue:

$$y = \tfrac{1}{2} \ln (1 - x^2).$$

Daí
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2} \qquad \text{por X}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{x^2 - 1}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Derivar $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

SOLUÇÃO. Aplicando (2), p. 1,

$$y = \tfrac{1}{2} [\ln (1 + x^2) - \ln (1 - x^2)].$$

Donde
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{1 + x^2} - \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2} \right] \qquad \text{por III e X}$$

$$= \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x}{1 - x^2} = \frac{2x}{1 - x^4}. \qquad \textit{Resp.}$$

Na derivação de uma função exponencial, especialmente no caso de uma variável com expoente variável, o melhor caminho é tomar primeiro os logaritmos naturais da função e depois derivar. Assim, o Exemplo Ilustrativo 5, § 65, é resolvido de modo mais elegante como segue:

Exemplo ilustrativo 3. Derivar $y = x^{e^x}$.

SOLUÇÃO. Tomando os logaritmos naturais

$$\ln y = e^x \ln x. \qquad \text{por (2), p. 1}$$

Derivando ambos os membros em relação a x

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x) \qquad \text{por X e V}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot e^x, \qquad \text{por X e XI } a$$

ou
$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot y\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$
$$= e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right). \qquad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 4. Derivar $y = (4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$.

SOLUÇÃO. Tomando os logaritmos naturais

$$\ln y = (2 + \sqrt{x^2 - 5}) \ln (4x^2 - 7).$$

Derivando ambos os membro em relação a x,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (2 + \sqrt{x^2 - 5})\frac{8x}{4x^2 - 7} + \ln (4x^2 - 7) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$
$$\frac{dy}{dx} = x(4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}\left[\frac{8(2 + \sqrt{x^2 - 5})}{4x^2 - 7} + \frac{\ln (4x^2 - 7)}{\sqrt{x^2 - 5}}\right]. \qquad \textit{Resp.}$$

No caso de uma função contendo fatores é, algumas vezes, conveniente tomar os logaritmos naturais e aplicar (2), p. 1, antes de derivar. Assim,

Exemplo ilustrativo 5. Derivar $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$.

SOLUÇÃO. Tomando os logaritmos naturais,

$$\ln y = \tfrac{1}{2}[\ln (x-1) + \ln (x-2) - \ln (x-3) - \ln (x-4)].$$

Derivando ambos os membros em relação a x,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right]$$
$$= -\frac{2x^2 - 10x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)},$$

ou
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2 - 10x + 11}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}(x-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

PROBLEMAS

Derive cada uma das funções abaixo:

1. $y = \ln (ax + b)$. *Resp.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{ax + b}$.

2. $y = \ln (ax^2 + b)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax}{ax^2 + b}$.

3. $y = \ln (ax + b)^2.$ *Resp.* $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{ax + b}\cdot$

4. $y = \ln ax^n.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}\cdot$

5. $y = \ln x^3.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}\cdot$

6. $y = \ln^3 x \; [= (\ln x)^3.]$ $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \ln^2 x}{x}\cdot$

7. $y = \ln (2x^3 - 3x^2 + 4).$ $\frac{dy}{dx} = \frac{6x(x-1)}{2x^3 - 3x^2 + 4}\cdot$

8. $y = \log \frac{2}{x}\cdot$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\log e}{x}\cdot$

9. $y = \ln \frac{x^2}{1 + x^2}\cdot$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x(1 + x^2)}\cdot$

10. $y = \ln \sqrt{9 - 2x^2}.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{9 - 2x^2}\cdot$

11. $y = \ln (ax\sqrt{a + x}).$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2a + 3x}{2x(a + x)}\cdot$

12. $f(x) = x \ln x.$ $f'(x) = 1 + \ln x.$

13. $f(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}).$ $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\cdot$

14. $s = \ln \sqrt{\frac{a + bt}{a - bt}}\cdot$ $\frac{ds}{dt} = \frac{ab}{a^2 - b^2t^2}\cdot$

15. $f(x) = x^2 \ln x^2.$ $f'(x) = 2x(1 + 2 \ln x).$

16. $y = e^{nx}.$ $\frac{dy}{dx} = ne^{nx}.$

17. $y = 10^{nx}.$ $\frac{dy}{dx} = n\,10^{nx} \ln 10.$

18. $y = e^{x^2}.$ $\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2}.$

19. $y = \frac{2}{e^x}\cdot$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{e^x}\cdot$

20. $s = e^{\sqrt{t}}.$ $\frac{ds}{dt} = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\cdot$

21. $z = b^{2y}.$ $\frac{dz}{dy} = 2\,b^{2y} \ln b.$

22. $u = se^s$. *Resp.* $\dfrac{du}{ds} = e^s(s+1)$.

23. $v = \dfrac{e^u}{u}$. $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{e^u(u-1)}{u^2}$.

24. $y = \dfrac{\ln x}{x}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

25. $y = \ln(x^2e^x)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} + 1$.

26. $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

27. $y = x^2e^{-x}$. $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}(2x - x^2)$.

28. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

29. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

30. $s = \dfrac{\ln t^2}{t^2}$. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2-4\ln t}{t^3}$.

31. $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. $f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Sugestão. Racionalize primeiro o denominador

32. $y = x^x$. *Resp.* $y' = x^x(1+\ln x)$.

33. $y = x^{\sqrt{x}}$. $y' = \dfrac{x^{\sqrt{x}}(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}$.

34. $s = \left(\dfrac{a}{t}\right)^t$. $\dfrac{ds}{dt} = \left(\dfrac{a}{t}\right)^t\left(\ln\dfrac{a}{t} - 1\right)$.

35. $y = \dfrac{x\sqrt[3]{3x+a}}{\sqrt{2x+b}}$. $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x+a} - \dfrac{1}{2x+b}\right]$.

36. $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x\sqrt{4-x^2}}$. $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{x}{4+x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{4-x^2}\right]$.

37. $y = x^n(a+bx)^m$. $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{n}{x} + \dfrac{mb}{a+bx}\right]$.

Nos exercícios 38-47 achar o valor de $\dfrac{dy}{dx}$ para o dado valor de x.

38. $y = \ln(x^2+2)$; $x = 4$. *Resp.* $y' = \frac{4}{9}$

39. $y = \log(4x-3)$; $x = 2$. $y' = 0{,}3474$.

40. $y = x \ln \sqrt{x+3}$; $x = 6$. *Resp.* $y' = 1{,}4319$.

41. $y = xe^{-2x}$, $x = \frac{1}{2}$. $y' = 0$.

42. $y = \frac{\ln x^2}{x}$; $x = 4$. $y' = -0{,}0483$.

43. $y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x+1}$; $x = 1$.

44. $y = \log \sqrt{25-4x}$; $x = 5$.

45. $y = 10^{\sqrt{x}}$; $x = 4$.

46. $y = \left(\frac{3}{x}\right)^x$; $x = 3$.

47. $y = \frac{x^3\sqrt{x^2+9}}{\sqrt[3]{20-3x}}$; $x = 4$.

Ache $\frac{d^2y}{dx^2}$ para cada uma das seguintes funções

48. $y = \ln cx$.

49. $y = e^{ax}$.

50. $y = x \ln x$.

51. $y = e^{x^2}$

52. $y = \ln \frac{x-a}{x+a}$.

53. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

Derive as funções abaixo

54. $\ln \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

55. $\frac{\ln \sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

56. $\log \sqrt{\frac{x^2+a^2}{x+a}}$.

57. $\ln \frac{t}{\sqrt{2t+3}}$.

58. $e^{\sqrt{x}} \ln \sqrt{x}$.

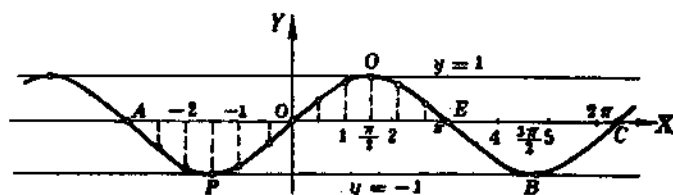
59. $10^t \log t$.

60. $(ae)^{nx}$.

61. $2^s s^2$.

62. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\sqrt{x}}$.

67. — A função sen x. *O gráfico de*

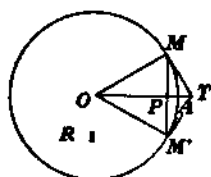
(1) $$y = \operatorname{sen} x$$

é o da figura acima. Cada valor de x é a medida, em radianos (§ 2), de um ângulo.

Assim, para $x = 1$, $y = \text{sen}$ (1 radiano) $= \text{sen}\, 57° \, 18' = 0{,}841$. A função $\text{sen}\, x$ é definida e é contínua para todos os valores de x. É importante notar que $\text{sen}\, x$ é uma *função periódica* com período 2π. Realmente

$$\text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\, x,$$

isto é, quando o valor de x é acrescido de um período, o valor de y é repetido.

A propriedade de periodicidade tem a seguinte interpretação no gráfico da página anterior; *a porção da curva compreendida entre as paralelas* $x = 0$ e $x = 2\pi$ (arco *OQBRC da figura*) *pode ser deslocada paralelamente a OX quer para a direita quer para a esquerda de uma distância igual a um múltiplo qualquer de* 2π *e continuar a ser ainda parte do gráfico da função na nova posição.*

68. — Teorema. *Antes de calcular a derivada de* $\text{sen}\, x$ (§ 69) *é necessário provar que*

$$(B) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1.$$

Êste limite não pode ser calculado com as regras do § 16; devemos lançar mão de outros meios que nos fornecem a geometria e a trigonometria.

Seja O o centro de um círculo de raio igual a 1. Seja x = ângulo AOM medido em radianos. Como o raio é 1, arco $AM = x$.

Consideremos o arco AM' = arco AM e tracemos MT e $M'T$ tangentes ao círculo em M e M' respectivamente. Da geometria, temos

$$MM' < \text{arco}\, MAM' < MT + M'T$$

Ora, por trigonometria,

$$2\,\text{sen}\, x < 2\,x < 2\,\text{tg}\, x\,.$$

Dividindo por $2\,\text{sen}\, x$, obtemos

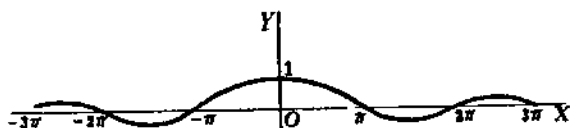
$$1 < \frac{x}{\text{sen}\, x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Daqui resulta, tomando os recíprocos

$$1 > \frac{\text{sen}\, x}{x} > \cos x.$$

Logo, quando x é pequeno, o valor de $\frac{\text{sen}\, x}{x}$ está compreendido entre 1 e $\cos x$. Mas, quando $x \to 0$, $\lim \cos x = \cos 0 = 1$, pois $\cos x$ é contínua para $x = 0$. (V. § 17). Assim, fica provada a igualdade (*B*).

É interessante notar, pelo gráfico, o comportamento da função

$$y = \frac{\text{sen}\, x}{x}.$$

A função não é definida para $x = 0$. Atribuamos, contudo, o valor 1 à função para $x = 0$. Obtém-se, assim, uma função definida para todos os valores de x e contínua para todos estes valores (V. § 17).

69. — Derivação de sen v.

Seja $$y = \text{sen}\, v.$$

Pela Regra Geral, § 27, considerando v como variável independente, temos

Primeiro Passo $$y + \Delta y = \text{sen}\,(v + \Delta v).$$

Segundo Passo $$\Delta y = \text{sen}\,(v + \Delta v) - \text{sen}\, v.$$

Para o cálculo do limite, no Quarto Passo, deve-se transformar o segundo membro. Para isto, é mister usar a fórmula de (6), § 1,

$$\text{sen}\, A - \text{sen}\, B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}(A - B),$$

fazendo $$A = v + \Delta v, \quad B = v.$$

Então $$\tfrac{1}{2}(A + B) = v + \tfrac{1}{2}\Delta v, \quad \tfrac{1}{2}(A - B) = \tfrac{1}{2}\Delta v.$$

Substituindo,

$$\text{sen}\,(v + \Delta v) - \text{sen}\, v = 2 \cos (v + \tfrac{1}{2}\Delta v)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\Delta v.$$

Logo $$\Delta y = 2 \cos \left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) \text{sen}\, \frac{\Delta v}{2}.$$

TERCEIRO PASSO. $\dfrac{\Delta y}{\Delta v} = \cos\left(v + \dfrac{\Delta v}{2}\right) \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta v}{2}}{\dfrac{\Delta v}{2}}.$

QUARTO PASSO. $\dfrac{dy}{dv} = \cos v.$

$$\left[\text{pois} \lim_{\Delta v \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}} \right) = 1, \ \S\ 68, \text{ e } \lim_{\Delta v \to 0} \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right) = \cos v. \right]$$

Substituindo este valor de $\dfrac{dy}{dv}$ em (A), § 38, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \cos v \frac{dv}{dx}.$$

XIII $\therefore \quad \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) = \cos v \dfrac{dv}{dx}.$

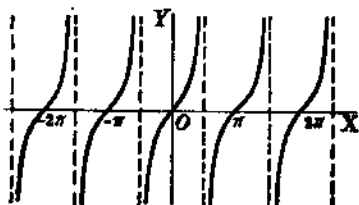
O enunciado da regra correspondente fica a cargo do leitor.

70. — As outras funções trigonométricas. A função $\cos x$ é definida e contínua para todo valor de x. É periódica, com período 2π. O gráfico de

$$y = \cos x$$

obtém-se do gráfico de $\operatorname{sen} x$ (§ 67), tomando-se a reta $x = \frac{1}{2}\pi$ como eixo dos yy.

O gráfico de
$$y = \operatorname{tg} x$$

(V. figura) mostra que a função $\operatorname{tg} x$ é descontínua para um número infinito de valores da variável independente x, precisamente, para $x = (n + \frac{1}{2})\pi$, onde n indica um número inteiro positivo ou negativo.

De fato, quando $x \to \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{tg} x$ tende ao infinito. Mas, da igualdade $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, vemos que a função tem o período π e os valores $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ diferem de $\frac{1}{2}\pi$ por um múltiplo do período.

A função $\operatorname{ctg} x$ tem o período

π. Ela é definida e contínua para todos os valores de x exceto $x = n\pi$, sendo n um inteiro. Para êstes valores ctg x torna-se infinita. Finalmente, sec x e cossec x são periódicas, tendo cada uma o período 2π. A primeira é descontínua só quando $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ e a segunda só quando $x = n\pi$. Os valores de x para os quais estas funções tendem ao infinito determinam assíntotas verticais nos gráficos.

71. — Derivação de cos *v*

Seja $$y = \cos v.$$

Por (3), p. 2, pode-se escrever

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

Derivando pela fórmula XIII,

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\left(-\frac{dv}{dx}\right)$$

$$= -\operatorname{sen} v\,\frac{dv}{dx}.$$

$$\left[\text{pois } \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \operatorname{sen} v, \text{ por (3), p. 2.}\right]$$

XIV $$\therefore\ \frac{d}{dx}(\cos v) = -\operatorname{sen} v\,\frac{dv}{dx}.$$

72. — Demonstrações das fórmulas XV-XIX. Estas fórmulas podem ser fàcilmente obtidas exprimindo-se a função em causa em termos de outras funções cujas derivadas já tenham sido achadas, e derivando.

DEMONSTRAÇÃO DE XV. Seja $$y = \operatorname{tg} v.$$

Por (2), p. 2, pode-se escrever

$$y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}$$

Derivando pela fórmula VII,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos v \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) - \operatorname{sen} v \frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\cos^2 v \frac{dv}{dx} + \operatorname{sen}^2 v \frac{dv}{dx}}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \sec^2 v \frac{dv}{dx}. \qquad \text{Usando (2), p. 2}$$

XV $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}.$$

Para provar XVI-XIX, basta lembrar que

XVI. $\operatorname{ctg} v = \frac{1}{\operatorname{tg} v}$. XVII. $\sec v = \frac{1}{\cos v}$.

XVIII. $\operatorname{cossec} v = \frac{1}{\operatorname{sen} v}$. XIX. $\operatorname{verseno} v = \operatorname{vers} v = 1 - \cos v$.

73. — Observações. Para a dedução das fórmulas I-XIX foi necessário aplicar a Regra Geral, § 27, apenas para as seguintes

III $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}. \qquad \text{Soma algébrica}$$

V $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}. \qquad \text{Produto}$$

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}. \qquad \text{Quociente}$$

VIII $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}. \qquad \text{Função de função}$$

IX $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}. \qquad \text{Função inversa}$$

X $$\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$ Logaritmo

XIII $$\frac{d}{dx}(\text{sen } v) = \cos v \frac{dv}{dx}.$$ Seno

A dedução das demais baseou-se nestas e delas dependerão também todas as fórmulas de derivação que deduzirmos. Vê-se, pois, que a dedução das fórmulas fundamentais de derivação envolve o cálculo de apenas dois limites de alguma dificuldade, precisamente,

$$\lim_{v \to 0} \frac{\text{sen } v}{v} = 1 \qquad \text{por § 68}$$

e

$$\lim_{v \to 0} (1 + v)^{\frac{1}{v}} = e. \qquad \text{por § 61}$$

PROBLEMAS

Derivar as funções

1. $y = \text{sen } ax^2.$

Solução. $$\frac{dy}{dx} = \cos ax^2 \frac{d}{dx}(ax^2) \qquad \text{por XIII}$$

$[v = ax^2].$

$$= 2a\cos ax^2. \quad \textit{Resp.}$$

2. $y = \text{tg } \sqrt{1 - x}.$

Solução. $$\frac{dy}{dx} = \sec^2 \sqrt{1-x} \frac{d}{dx}(1 - x)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{por XV}$$

$[v = \sqrt{1 - x}].$

$$= \sec^2 \sqrt{1-x} \cdot \tfrac{1}{2}(1 - x)^{-\frac{1}{2}}(-1)$$

$$= -\frac{\sec^2 \sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}. \quad \textit{Resp.}$$

3. $y = \cos^3 x.$

Solução. Podemos também escrever

$$y = (\cos x)^3.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\cos x)^2 \frac{d}{dx}(\cos x) \qquad \text{por VI}$$

$[v = \cos x \ \text{ e } \ n = 3].$

$$= 3\cos^2 x(-\text{sen } x) \qquad \text{por XIV}$$

$$= -3 \text{ sen } x \cos^2 x. \quad \textit{Resp.}$$

4. $y = \operatorname{sen} nx \operatorname{sen}^n x.$

SOLUÇÃO. $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} nx \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x)^n + \operatorname{sen}^n x \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} nx)$ por V

$[u = \operatorname{sen} nx, \text{ e } v = \operatorname{sen}^n x].$

$$= \operatorname{sen} nx \cdot n (\operatorname{sen} x)^{n-1} \frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x)$$

$$+ \operatorname{sen}^n x \cos nx \frac{d}{dx} (nx)$$ por VI e XIII

$$n \operatorname{sen} nx \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + n \operatorname{sen}^n x \cos nx$$
$$= n \operatorname{sen}^{n-1} x (\operatorname{sen} nx \cos x + \cos nx \operatorname{sen} x)$$
$$= n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} (n + 1) x. \quad \textit{Resp.}$$

5. $y = \operatorname{sen} ax.$ *Resp.* $y' = a \cos ax.$

6. $y = 3 \cos 2 x.$ $y' = - 6 \operatorname{sen} 2 x.$

7. $s = \operatorname{tg} 3 t.$ $s' = 3 \sec^2 3 t.$

8. $u = 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{2} \cdot$ $\frac{du}{dv} = - \operatorname{cossec}^2 \frac{v}{2} \cdot$

9. $y = \sec 4 x.$ $y' = 4 \sec 4 x \operatorname{tg} 4 x.$

10. $\rho = a \operatorname{cossec}^2 b\theta.$ $\rho' = ab \operatorname{cossec}^2 b\theta \operatorname{ctg} b\theta.$

11. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x.$ $y' = \operatorname{sen} x \cos x.$

12. $s = \sqrt{\cos 2 t}.$ $\frac{ds}{dt} = \frac{- \operatorname{sen} 2 t}{\sqrt{\cos 2 t}} \cdot$

13. $\rho = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 3 \theta}.$ $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\sec^2 3 \theta}{(\operatorname{tg} 3 \theta)^{\frac{2}{3}}} \cdot$

14. $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}} \cdot$ $\frac{dy}{dx} = \frac{- 2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec x}} \cdot$

15. $y = x \cos x.$ $y' = \cos x - x \operatorname{sen} x.$

16. $f (\theta) = \operatorname{tg} \theta - \theta.$ $f' (\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta.$

17. $\rho = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \cdot$ $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\theta^2}.$

18. $y = \operatorname{sen} 2 x \cos x.$ $y' = 2 \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x.$

19. $y = \ln \operatorname{sen} ax.$ $y' = a \operatorname{ctg} ax.$

20. $y = \ln \sqrt{\cos 2 x}$ $y' = - \operatorname{tg} 2 x.$

21. $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx.$ $y' = e^{ax} (a \operatorname{sen} bx + b \cos bx).$

22. $s = e^{-t} \cos 2 t.$ $s' = - e^{-t} (2 \operatorname{sen} 2 t + \cos 2 t).$

23. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. *Resp.* $y' = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$.

24. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$. $y' = \sec x$.

25. $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta + a) \cos(\theta - a)$. $f'(\theta) = \cos 2\theta$.

26. $f(x) = \operatorname{sen}^2(\pi - x)$. $f'(x) = -2 \operatorname{sen}(\pi - x) \cos(\pi - x)$.

27. $\rho = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta - \operatorname{tg} \theta + \theta$. $\rho' = \operatorname{tg}^4 \theta$.

28. $y = x^{\operatorname{sen} x}$. $\frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen} x} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x \right)$.

29. $y = (\cos x)^x$. $y' = y (\ln \cos x - x \operatorname{tg} x)$.

Ache a derivada segunda de cada uma das funções abaixo

30. $y = \operatorname{sen} kx$. *Resp.* $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 \operatorname{sen} kx$.

31. $\rho = \frac{1}{4} \cos 2\theta$. $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\cos 2\theta$.

32. $u = \operatorname{tg} v$. $\frac{d^2u}{dv^2} = 2 \sec^2 v \operatorname{tg} v$.

33. $y = x \cos x$. $\frac{d^2y}{dx^2} = -2 \operatorname{sen} x - x \cos x$.

34. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x}{x^3}$.

35. $s = e^t \cos t$. $\frac{d^2s}{dt^2} = -2 e^t \operatorname{sen} t$.

36. $s = e^{-t} \operatorname{sen} 2t$. $\frac{d^2s}{dt^2} = -e^{-t}(3 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 2t)$.

37. $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$. $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax} [(a^2 - b^2) \operatorname{sen} bx + 2ab \cos bx]$.

Ache $\frac{dy}{dx}$ para cada uma das funções

38. $y = \cos(x - y)$ *Resp.* $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\operatorname{sen}(x - y) - 1}$.

39. $e^y = \operatorname{sen}(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x + y)}{e^y - \cos(x + y)}$.

40. $\cos y = \ln(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + (x + y) \operatorname{sen} y}$.

Nos exercícios 41-50 achar o valor de $\frac{dy}{dx}$ para o dado valor de x (em radianos).

41. $y = x - \cos x;\ x = 1.$ *Resp.* $y' = 1{,}841.$

42. $y = x \operatorname{sen} \frac{x}{2};\ x = 2.$ $y' = 1{,}381.$

43. $y = \ln \cos x;\ x = 0{,}5.$ $y' = -\ 0{,}546.$

44. $y = \frac{e^x}{x};\ x = -\ 0{,}5.$ *Resp.* $y' = -\ 3{,}639.$

45. $y = \operatorname{sen} x \cos 2x;\ x = 1.$ $y' = -\ 1{,}754.$

46. $y = \ln \sqrt{\operatorname{tg} x};\ x = \frac{1}{4}\pi.$ $y' = 1.$

47. $y = e^x \operatorname{sen} x;\ x = 2.$ $y' = 3{,}643.$

48. $y = 10\, e^{-x} \cos \pi x;\ x = 1.$ $y' = 3{,}679.$

49. $y = 5\, e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2};\ x = 2.$ $y' = -\ 21{,}35.$

50. $y = 10\, e^{-\frac{x}{10}} \operatorname{sen} 3x;\ x = 1.$ $y' = -\ 27{,}00.$

74. — Funções trigonométricas inversas. A equação

$$y = \operatorname{sen} x, \tag{1}$$

diz que "x é a medida de um ângulo em radianos cujo seno é igual a y". Para um ângulo cêntrico de um círculo com raio igual a 1, x é também igual ao arco interceptado (V. § 2). Simbòlicamente, escreve-se

$$x = \operatorname{arc\,sen} y, \tag{2}$$

que se lê "x igual arco seno y". As funções (1) e (2) são inversas uma da outra (§ 39).

Como estamos habituados a chamar de x a variável independente e de y a função, faremos a troca destas letras em (2), obtendo assim

$$y = \operatorname{arc\,sen} x. \tag{3}$$

Esta função é, pois, definida para todo valor de x cujo valor absoluto seja menor ou igual a 1.

Para a função (3) usa-se muitas vezes a notação $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, que é inconveniente, pois pode ser tomada como sen x com expoente -1 a expressão $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Consideremos, em (3), os valores de y determinados por $x = \frac{1}{2}$, isto é,

$$(4) \qquad y = \text{arc sen } \tfrac{1}{2}$$

Um valor de y satisfazendo (4) é $y = \frac{1}{6}\pi$, pois $\text{sen } \frac{1}{6}\pi = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$. Um segundo valor é $y = \frac{5}{6}\pi$, pois $\text{sen } \frac{5}{6}\pi = \text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$. Para cada um destes valores de y pode-se acrescentar ou subtrair um múltiplo qualquer de 2π. Logo, *o número de valores de y satisfazendo* (4) *é ilimitado*. Diz-se, então, que a função arc sen x (V. figura) é de "infinitos valores".

O gráfico de arc sen x (V. figura) mostra bem esta propriedade. Quando $x = OM$, $y = MP_1$, MP_2, MP_3, $\ldots$, MQ_1, MQ_2, $\ldots$

É permissível e aconselhável num grande número de problemas escolher *um* dos muitos valores de y. Escolhemos, então, o valor entre $-\frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi$, isto é, o *menor dos valores em valor absoluto*. Por exemplo,

(5) $\text{arc sen } \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$, $\text{arc sen } 0 = 0$, $\text{arc sen } (-1) = -\frac{1}{2}\pi$.

Com isto, a função arc sen x torna-se *de um só valor*, e se

$$(6) \quad y = \text{arc sen } x, \text{ então } -\tfrac{1}{2}\pi \leq y \leq \tfrac{1}{2}\pi$$

No gráfico limitamo-nos ao arco QOP.

Do mesmo modo cada uma das outras funções trigonométricas inversas podem-se tornar de um só valor. Assim, para arc cos x, se

$$(7) \qquad y = \text{arc cos } x, \text{ toma-se } 0 \leqq y \leqq \pi\,.$$

Por exemplo,

$$\text{arc cos } \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3}\pi, \text{ arc cos } (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2}{3}\pi, \text{ arc cos } (-1) = \pi.$$

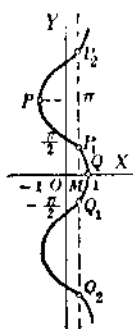
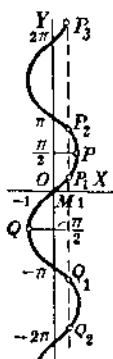
De (6) e (7) obtemos a identidade

$$(8) \qquad \text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \tfrac{1}{2}\pi$$

No gráfico de arc cos x (V. figura), nos limitamos ao arco QP_1P.

Definições estabelecendo um único valor para cada uma das outras funções trigonométricas inversas serão dadas abaixo.

75. — Derivação de arc sen v.

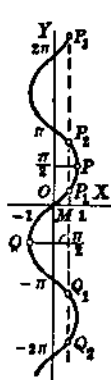
Seja $\qquad y = \text{arc sen } v; \qquad (-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi)$

então $$v = \operatorname{sen} y.$$

Derivando em relação a y por XIII,

$$\frac{dv}{dy} = \cos y\,;$$

portanto $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cos y}. \qquad \text{Por } (C),\ \S\ 39$$

Como v é uma função de x, tem-se, pela (A), § 38,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - v^2}$, tendo-se tomado o sinal + do radical, pois $\cos y$ é positivo para todos os valores de y entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ inclusive.]

$$\text{XX} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sen} v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Se $y = \operatorname{arc\,sen} x$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. O gráfico é o arco QP da figura. O coeficiente angular tende ao infinito em Q e P e iguala 1 em 0. A função cresce ($y' > 0$) no intervalo $[-1, +1]$.

76. — Derivação de arc cos v.

Seja $$y = \operatorname{arc\,cos} v; \qquad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

então $$v = \cos y.$$

Derivando em relação a y por XIV,

$$\frac{dv}{dy} = -\operatorname{sen} y\,;$$

logo $$\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}. \qquad \text{Por } (C),\ \S\ 39$$

Mas, como v é função de x, isto pode ser substituído em (A), § 38, dando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

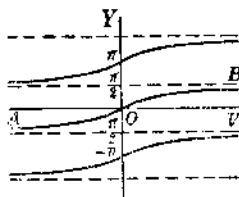
[$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - v^2}$, tendo-se tomado o sinal + do radical, pois $\operatorname{sen} y$ é positivo para todos os valores de y entre 0 e π inclusive.]

XXI $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc cos } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Se $y = \text{arc cos } x$, então $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Quando x cresce de -1 a $+1$ (arco PQ da segunda figura da página 127), y decresce de π a 0 ($y' < 0$).

77. — Derivação de arc tg v. Seja

(1) $y = \text{arc tg } v$; então

(2) $v = \text{tg } y$.

A função (1) torna-se de um só valor se escolhermos o mínimo valor absoluto de y, isto é, um valor entre $-\frac{1}{2}\pi$ e $\frac{1}{2}\pi$, correspondente ao arco AB da figura. Ainda, quando $v \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$; quando $v \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow \frac{1}{2}\pi$. Ou, simbòlicamente,

(3) $$\text{arc tg}(+\infty) = \frac{1}{2}\pi, \quad \text{arc tg}(-\infty) = -\frac{1}{2}\pi.$$

Derivando (2) em relação a y por XV,

$$\frac{dv}{dy} = \sec^2 y\,;$$

logo $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$ Por (C), § 39

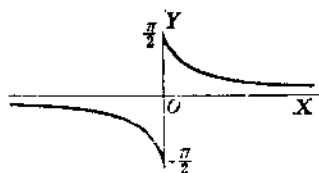
Como v é função de x, isto pode ser substituído em (A), § 38, dando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+v^2}\frac{dv}{dx}.$$

$(\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + v^2)$.

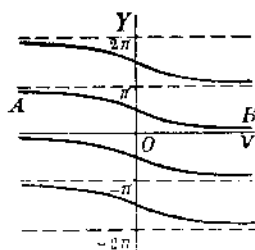
XXII $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc tg } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2},$$

Se $y = \text{arc tg}\, x$, então $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ e a função é crescente para todos os valores de x.

A função $\text{arc tg}\, \dfrac{1}{x}$ fornece um bom exemplo de função descontínua. Vemos, limitando-nos a um ramo do gráfico de

$$y = \text{arc tg}\, \frac{1}{x},$$

que quando x tende a zero pela esquerda, y tende a $-\frac{1}{2}\pi$ e quando x tende a zero pela direita, y tende a $+\frac{1}{2}\pi$. Logo a função é descontínua para $x = 0$ (§ 17).

78. — Derivação de arc ctg v. Seguindo o método do último parágrafo, obtemos

$$\text{XXIII} \qquad \frac{d}{dx}(\text{arc ctg}\, v) = -\frac{\dfrac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

A função é de um só valor se, sendo $y = \text{arc ctg}\, v$, $0 < y < \pi$; o gráfico dela é, neste caso, o arco AB da figura. Tem-se também que $y \to 0$ quando $v \to +\infty$, $y \to \pi$ quando $v \to -\infty$, isto é, simbòlicamente,

$$\text{arc ctg}\,(+\infty) = 0; \ \text{arc ctg}\,(-\infty) = \pi.$$

79. — Derivação de arc sec v e arc cossec v.

Seja

$$(1) \qquad y = \text{arc sec}\, v.$$

Esta função é definida para todos os valores de v não situados entre -1 e $+1$. Para torná-la de um só valor (v. figura),

escolha-se y entre 0 e $\frac{1}{2}\pi$ (arco AB), quando v é positivo;

escolha-se y entre $-\pi$ e $-\frac{1}{2}\pi$ (arco CD), quando v é negativo.

Ainda, se $v \to +\infty$, $y \to \frac{1}{2}\pi$;

se $v \to -\infty$, $y \to -\frac{1}{2}\pi$.

Resolvendo (1), $v = \sec y$.

Derivando em relação a y por XVII,

$$\frac{dv}{dy} = \sec y \operatorname{tg} y;$$

logo $\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y}$. Por (C), § 39

Como v é função de x, tem-se, por (A), § 38,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v\sqrt{v^2 - 1}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\sec y = v$ e $\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{v^2 - 1}$, tendo-se tomado o sinal + do radical pois $\operatorname{tg} y$ é positiva para todos os valores de y entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e entre $-\pi$ e $-\frac{\pi}{2}$.]

$$\text{XXIV} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \sec v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

Derivação de arccossec v. Seja

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{cossec} v;$$

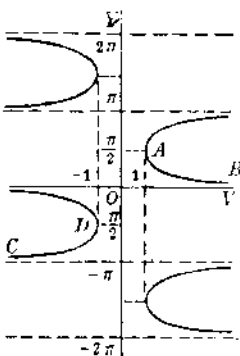
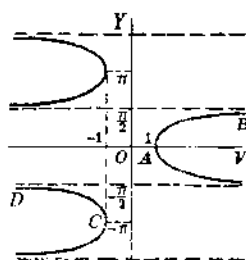
então $v = \operatorname{cossec} y$.

Derivando em relação a y por XVIII e procedendo como acima, obtemos

$$\text{XXV} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc} \operatorname{cossec} v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2 - 1}}.$$

A função $y = \operatorname{arc} \operatorname{cossec} v$ é definida para todos os valores de v exceto os compreendidos entre -1 e $+1$, e é de mais de um valor. Para torná-la de um só valor (v. figura acima),

quando v é positivo, escolhe-se y entre 0 e $\frac{1}{2}\pi$ (arco AB),

quando v é negativo, escolhe-se y entre $-\pi$ e $-\frac{1}{2}\pi$ (arco CD).

80. — Derivação de arc vers v.

Seja $y = \text{arc vers}\, v$; *

então $v = \text{vers}\, y$

Derivando em relação a y por XIX.

$$\frac{dv}{dy} = \text{sen}\, y;$$

portanto
$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\text{sen}\, y} \qquad \text{Por } (C), \ \S\ 39$$

Como v é função de x, tem-se, em virtude de (A), § 38.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{sen}\, y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2v - v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\text{sen}\, y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (1 - \text{vers}\, y)^2} = \sqrt{2v - v^2}$, tendo-se tomado o sinal + do radical, pois sen y é positivo para os valores de y entre 0 e π inclusive.]

XXVI
$$\frac{d}{dx}(\text{arc vers}\, v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v - v^2}}.$$

PROBLEMAS

Derive as seguintes funções

1. $y = \text{arc tg}\, ax^2$.

Solução.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(ax^2)}{1 + (ax^2)^2} \qquad \text{por XXII}$$

$[v = ax^2]$.

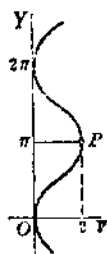
$$= \frac{2ax}{1 + a^2x^4}. \quad \textit{Resp.}$$

2. $y = \text{arc sen}\,(3x - 4x^3)$.

Solução.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(3x - 4x^3)}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}} \qquad \text{por XX}$$

$[v = 3x - 4x^3]$.

$$= \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \textit{Resp.}$$

* Definida apenas para os valores de v entre 0 e 2 inclusive, e de mais de um valor. **Para tornar a função de um só valor, toma-se y como o menor arco positivo cujo seno verso é v, isto é, y está entre 0 e π inclusive. Logo, limitamo-nos ao arco OP do gráfico.**

3. $y = \text{arc sec}\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}.$

Solução.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\sqrt{\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2-1}} \qquad \text{por XXIV}$$

$$\left[v = \frac{x^2+1}{x^2-1}\right].$$

$$= \frac{\dfrac{(x^2-1)\,2x-(x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2}}{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x}{x^2-1}} = -\frac{2}{x^2+1}. \qquad \textit{Resp.}$$

4. $y = \text{arc cos}\,\dfrac{x}{a}.$ *Resp.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

5. $y = \text{arc sec}\,\dfrac{x}{a}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$

6. $y = \text{arc ctg}\,\dfrac{x}{a}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-a}{a^2+x^2}.$

7. $y = \text{arc sec}\,\dfrac{1}{x}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$

8. $y = \text{arc cossec}\,2x.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{x\sqrt{4x^2-1}}.$

9. $y = \text{arc sen}\,\sqrt{x}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$

10. $\theta = \text{arc vers}\,\rho^2.$ $\dfrac{d\theta}{d\rho} = \dfrac{2}{\sqrt{2-\rho^2}}.$

11. $y = x\,\text{arc sen}\,2x.$ $\dfrac{dy}{dx} = \text{arc sen}\,2x + \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$

12. $y = x^2\,\text{arc cos}\,x.$ $\dfrac{dy}{dx} = 2x\,\text{arc cos}\,x - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $f(u) = u\sqrt{a^2-u^2} + a^2\,\text{arc sen}\,\dfrac{u}{a}$ $f'(u) = 2\sqrt{a^2-u^2}$

14. $f(x) = \sqrt{a^2-x^2} + a\,\text{arc sen}\,\dfrac{x}{a}.$ $f'(x) = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}.$

15. $v = a^2\,\text{arc sen}\,\dfrac{u}{a} - u\sqrt{a^2-u^2}.$ $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{2u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}$

16. $v = \dfrac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} - \text{arc sen}\,\dfrac{u}{a}.$ $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{u^2}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}$

17. $v = \text{arc sen}\,\frac{u}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}.$ $\frac{dv}{du} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}.$

18. $v = a\,\text{arc cos}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + \sqrt{2au - u^2}.$ $\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{2\,au - u^2}}{u}.$

19. $\phi = \text{arc tg}\,\frac{a + r}{1 - ar}.$ $\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{1 + r^2}.$

20. $x = r\,\text{arc vers}\,\frac{y}{r} - \sqrt{2\,ry - y^2}.$ $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2\,ry - y^2}}.$

21. $y = \frac{1}{3}x^3\,\text{arc tg}\,x + \frac{1}{6}\ln(x^2 + 1) - \frac{1}{6}\,x^2.$ $\frac{dy}{dx} = x^2\,\text{arc tg}\,x.$

Nos problemas 22 - 27 achar o valor de $\frac{dy}{dx}$ para o dado valor de x.

22. $y = x\,\text{arc sen}\,x;\ x = \frac{1}{2}.$ *Resp.* $y' = 1{,}101.$

23. $y = x\,\text{arc cos}\,x;\ x = -\frac{1}{2}.$ $y' = 2{,}671.$

24. $y = \frac{\text{arc tg}\,x}{x};\ \ x = 1.$ $y' = -0{,}285.$

25. $y = \sqrt{x}\,\text{arc ctg}\,\frac{x}{4};\ x = 4.$ $y' = -0{,}054.$

26. $y = \frac{\text{arc sec}\,2\,x}{\sqrt{x}};\ x = 1.$ $y' = 0{,}053.$

27. $y = x^2\,\text{arc cossec}\,\sqrt{x};\ x = 2.$ $y' = 2{,}142.$

Derivar as funções

28. $\text{arc sen}\,\sqrt{x}.$

29. $\text{arc tg}\,\frac{2}{x}.$

30. $x\,\text{arc cos}\,\frac{x}{2}.$

31. $\frac{\text{arc ctg}\,2\,x}{x}.$

32. $\text{arc vers}\,(1 - x).$

33. $\text{arc sec}\,\sqrt{x}.$

34. $e^x\,\text{arc cos}\,x.$

35. $\ln\,\text{arc tg}\,x.$

36. $\sqrt{\text{arc sen}\,2x}.$

37. $\frac{\text{arc cos}\,\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

PROBLEMAS

Trace as curvas abaixo e ache o coeficiente angular em cada ponto onde a curva corte os eixos de coordenadas.

1. $y = \ln x.$ *Resp.* Em $(1, 0)$, $m = 1.$

2. $y = \log x.$ Em $(1, 0)$, $m = 0{,}434.$

3. $y = \ln(4 - x)$. Em $(3, 0)$, $m = -1$; em $x = 0$, $m = -\frac{1}{4}$.

4. $y = \ln\sqrt{4 - x^2}$.

5. Mostre que se $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ então $y'' = \dfrac{y}{a^2}$.

Ache os ângulos de interseção de cada dos pares de curvas abaixo

6. $y = \ln(x + 1)$, $y = \ln(7 - 2x)$ *Resp.* $127^\circ\, 53'$.

7. $y = \ln(x + 3)$, $y = \ln(5 - x^2)$.

8. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$. *Resp.* $109^\circ\, 28'$.

9. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. $53^\circ\, 8'$.

10. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$.

Ache os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão sôbre as curvas abaixo e trace o gráfico de cada uma delas.

11. $y = x \ln x$. *Resp.* Mín. $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$.

12. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. Mín. (e, e); ponto de inflexão $(e^2, \frac{1}{2}e^2)$.

13. $y = \ln(8x - x^2)$. Máx. $(4, \ln 16)$.

14. $y = xe^x$. Mín. $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$; ponto de inflexão $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$.

15. $y = x^2 e^{-x}$.

16. Um cabo telegráfico submarino consiste de um núcleo de fios de cobre com uma capa de material isolante. Se x indica a razão do raio do núcleo para a espessura da capa, sabe-se que a velocidade da sinalização varia como $x^2 \ln \dfrac{1}{x}$. Mostre que a velocidade máxima se obtém quando $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

17. Qual é o mínimo valor de $y = ae^{kx} + be^{-kx}$? *Resp.* $2\sqrt{ab}$.

18. Ache o ponto máximo e os pontos de inflexão do gráfico de $y = e^{-x^2}$ e trace a curva.

Resp. Máx. $(0, 1)$; pontos de inflexão $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

19. Mostre que o máximo retângulo com um lado sobre o eixo dos xx que pode ser inscrito na curva do problema 18 tem dois de seus vértices nos pontos de inflexão.

Ache o máximo, o mínimo e os pontos de inflexão nos intervalos indicados, e desenhe as seguintes curvas.

20. $y = \frac{1}{2}x - \text{sen}\, x$; $(0 \text{ a } 2\pi)$.
Resp. Mín. $(\frac{1}{3}\pi, -0{,}3424)$; máx. $(\frac{5}{3}\pi, 3{,}4840)$;
pontos de inflexão $(0, 0)$, $(\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(2\pi, \pi)$.

21. $y = 2x - \text{tg}\, x$; $(0 \text{ a } \pi)$.
Resp. Máx. $(\frac{1}{4}\pi, 0{,}571)$; mín. $(\frac{3}{4}\pi, 5{,}712)$;
pontos de inflexão $(0, 0)$, $(\pi, 2\pi)$.

22. $y = \text{tg}\, x - 4x$; $(0 \text{ a } \pi)$.
Resp. Mín. $(\frac{1}{3}\pi, -2{,}457)$; máx. $(\frac{2}{3}\pi, -10{,}11)$;
pontos de inflexão $(0, 0)$, $(\pi, -4\pi)$.

23. $y = 3\,\text{sen}\, x - 4\cos x$; $(0 \text{ a } 2\pi)$.
Resp. Máx. $(2{,}498, 5)$; mín. $(5{,}640, -5)$;
pontos de inflexão $(0{,}927, 0)$, $(4{,}069, 0)$.

24. $y = x + \cos 2x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

25. $y = \text{sen}\, \pi x - \cos \pi x$; $(0 \text{ a } 2)$.

26. $y = \frac{1}{2}x + \text{sen}\, 2x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

27. $y = x - 2\cos 2x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

28. $y = \frac{1}{2}\pi x + \text{sen}\, \pi x$; $(0 \text{ a } 2)$.

29. Mostre que o máximo de $y = a\,\text{sen}\, x + b\cos x$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$.

30. Se θ é o ângulo que um leme de navio faz com a quilha, mostra-se teòricamente que o efeito giratório do leme é $k\cos\theta\,\text{sen}^2\theta$, sendo k uma constante. Para que valor de θ é o leme mais eficiente?
Resp. Aí por volta de 55°.

31. Num copo cônico cheio de vinho mergulha-se cuidadosamente uma esfera de modo tal a causar o maior transbordamento. Sabendo que a altura do copo é a e que o ângulo gerador é α, mostre que o raio da esfera é

$$\frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha + \cos 2\alpha}.$$

32. Achar as dimensões do cilindro de máximo volume que pode ser inscrito numa esfera de raio igual a 6 cm. (Use o ângulo θ

subtendido pelo raio da base do cilindro inscrito, como parâmetro. Então $r = 6 \operatorname{sen} \theta$, $h = 12 \cos \theta$).

33. Usando o mesmo parâmetro, resolva o problema 32 no caso de se querer um cilindro com área lateral máxima.

34. Um corpo de pêso W é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma fôrça P cuja linha de ação faz um ângulo x com o plano. A grandeza da fôrça é dada por

$$P = \frac{mW}{m \operatorname{sen} x + \cos x},$$

onde m indica o coeficiente de fricção. Mostre que a resistência é mínima quando $\operatorname{tg} x = m$.

35. Se um projetil é lançado de O, o seu alcance R sobre um plano que em O faz com o plano horizontal um ângulo igual a α é

$$R = \frac{2 v^2 \cos \theta \operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{g \cos^2 \alpha},$$

onde v e g são constantes e θ é o ângulo de elevação. Calcular o valor de θ que dá o máximo alcance. *Resp.* $\theta = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha$.

36. A eficiência de uma verruma de declive θ e ângulo de fricção ϕ é dada pela fórmula

$$E = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} (\theta + \phi) + f},$$

onde f é uma constante. Achar o valor de θ para máxima eficiência quando ϕ é um ângulo constante conhecido.

OUTROS PROBLEMAS

1. As curvas $y = x \cdot \ln x$ e $y = x \cdot \ln (1 - x)$ cortam-se na origem e num outro ponto A. Achar o ângulo de interseção em A.
Resp. 103° 30′.

2. Usando os mesmos eixos desenhe as curvas seguintes e depois ache os ângulos de interseção:

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{8} - 1\right), \quad y = \ln\left(3x - \frac{x^2}{4} - 1\right). \quad \textit{Resp.} \quad 32^\circ 28'.$$

3. A reta AB é tangente à curva de equação $y = e^x + 1$ em A e corta o eixo dos xx em B. Ache as coordenadas de A quando o comprimento AB é um mínimo. *Resp.* $(0, 2)$.

Capítulo VIII

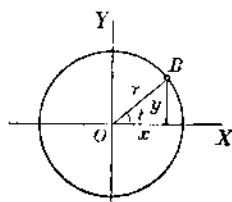
APLICAÇÕES A EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS, EQUAÇÕES POLARES E RAÍZES

81. Equações paramétricas de uma curva. Coeficiente angular. As coordenadas x e y de um ponto sobre uma curva são expressas muitas vezes como funções de uma terceira variável, ou *parâmetro*, t, sob a forma

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \phi(t). \end{cases}$$

Cada valor de t dá um valor para x e um valor para y e determina, pois, um ponto da curva. As equações (1) são chamadas *equações paramétricas* da curva. Se eliminarmos t das equações (1), obteremos as *equações retangulares* da curva.

Por exemplo,

$$(2) \qquad \begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\,\text{sen}\,t \end{cases} \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

são equações paramétricas do círculo da figura, sendo t o parâmetro, pois se eliminarmos t, o que se obtém quadrando e somando os resultados, obtemos

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t) = r^2,$$

que é a equação retangular do círculo. O parâmetro t deve variar de 0 a 2π para que o ponto $P(x, y)$ descreva toda a circunferência.

Como, por (1), y é uma função de t e t uma função de x (função inversa), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} \qquad \text{por } (A), \ \S\ 38$$

$$= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}; \qquad \text{por } (C), \ \S\ 39$$

logo,

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\phi'(t)}{f'(t)} = \text{coeficiente angular em } P(x, y).$$

Por esta fórmula podemos achar o coeficiente angular de uma curva cujas equações paramétricas são dadas.

Exemplo ilustrativo 1. Achar as equações da tangente e normal e os comprimentos da subtangente e subnormal à elipse*.

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a \cos \phi, \\ y = b \operatorname{sen} \phi \end{cases}$$

no ponto onde $\phi = 45°$.

SOLUÇÃO. Sendo ϕ o parâmetro, $\frac{dx}{d\phi} = - a \operatorname{sen} \phi, \frac{dy}{d\phi} = b \cos \phi.$

Substituindo em (A), $\frac{dy}{dx} = - \frac{b \cos \phi}{a \operatorname{sen} \phi} = - \frac{b}{a} \operatorname{ctg} \phi$ = coeficiente angular num ponto qualquer $= m$.

Substituindo $\phi = 45°$ nas dadas equações (3), obtemos $x_1 = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, $y_1 = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$ como coordenadas do ponto de contato e o coeficiente angular m torna-se

$$m_1 = - \frac{b}{a} \operatorname{ctg} 45° = - \frac{b}{a}.$$

Substituindo em (1) e (2), § 43, e reduzindo, obtemos

* Tracemos, como na figura, os círculos auxiliares maior e menor da elipse. Por dois pontos B e C sobre o mesmo raio tracemos BA paralela a OY e DP paralela a OX. Estas retas se encontram num ponto $P(x, y)$ da elipse, porque

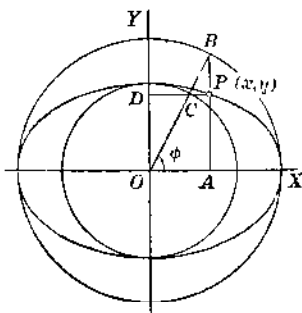
$$x = OA = OB \cos \phi = a \cos \phi$$

e $$y = AP = OD = OC \operatorname{sen} \phi = \operatorname{sen} \phi,$$

ou $$\frac{x}{a} = \cos \phi \text{ e } \frac{y}{b} = \operatorname{sen} \phi.$$

Quadrando e somando, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1,$$

equação retangular da elipse; ϕ chama-se algumas vezes ângulo excêntrico do ponto P da elipse.

$$bx + ay = \sqrt{2}\,ab = \text{equação da tangente}$$
$$\sqrt{2}\,(ax - by) = a^2 - b^2 = \text{equação da normal}$$

Substituindo em (3) e (4), § 43,

$$\tfrac{1}{2}\,b\sqrt{2}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\tfrac{1}{2}\,a\sqrt{2} = \text{comprimento da subtangente,}$$

$$\tfrac{1}{2}\,b\sqrt{2}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2\sqrt{2}}{2\,a} = \text{comprimento da subnormal.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Dadas as equações da ciclóide* sob forma paramétrica

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)\,, \\ y = a\,(1 - \cos\theta)\,, \end{cases}$$

sendo θ o parâmetro, achar os comprimentos da subtangente, subnormal e normal no ponto $(x_1\, y_1)$ onde $\theta = \theta_1$.

Solução. Derivando, $\dfrac{dx}{d\theta} = a\,(1 - \cos\theta)$, $\dfrac{dy}{d\theta} = a \operatorname{sen}\theta$.

Substituindo em (A), § 81,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = m = \text{coeficiente angular num ponto qualquer.}$$

Quando $\theta = \theta_1$, $y = y_1 = a\,(1 - \cos\theta_1)$, $m = m_1 = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1}{1 - \cos\theta_1}$.

Como no § 43, achamos (ver figura ao pé desta página)

$$TN = \text{subtangente} = \frac{a\,(1 - \cos\theta_1)^2}{\operatorname{sen}\theta_1}\,;\ NM = \text{subnormal} = a\operatorname{sen}\theta_1.$$

MP = comprimento da normal $= a\sqrt{2\,(1 - \cos\theta_1)} = 2\,a \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\,\theta_1$. Por (5), p. 3.

Na figura, $PA = a\operatorname{sen}\theta_1$ (se $\theta = \theta_1$) = subnormal NM como acima. Logo a construção da normal PM e tangente PA é a indicada.

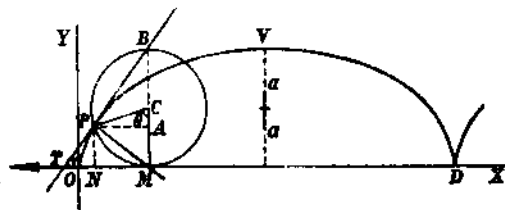
---

* O lugar descrito por um ponto da circunferência de um círculo que roda sem arrastar-se sôbre uma reta fixa diz-se ciclóide. Seja a o raio do círculo, P o ponto móvel e M o ponto de contato com a reta fixa OX, que se chama a base.

Se o arco $PM = OM$ em comprimento, então P tocará O se o círculo roda para a esquerda. Temos, indicando por θ o ângulo PCM:

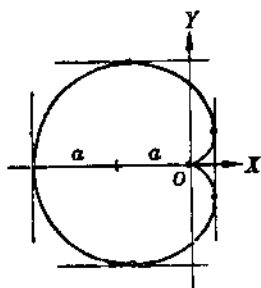
$$x = ON = OM - NM = a\theta - a\operatorname{sen}\theta = a\,(\theta - \operatorname{sen}\theta),$$
$$y = NP = MC - AC = a - \cos\theta = a\,(1 - \cos\theta),$$

que são as equações paramétricas da ciclóide, sendo parâmetro o ângulo θ que o raio do círculo rolante descreve. $OD = 2\,\pi\,a$ diz-se base de um arco da ciclóide e V diz-se vértice do arco. Eliminando θ, obtemos a equação retangular

$$x = a \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2\,ay - y^2}$$

Tangentes horizontais e verticais. De (A) e tendo em vista o § 42, vemos que os valores do parâmetro t para os pontos de contato destas tangentes são determinados assim:

Tangentes horizontais: acha-se t em $\frac{dy}{dt} = 0$

Tangentes verticais: acha-se t em $\frac{dx}{dt} = 0$.

Exemplo ilustrativo 3. Achar os pontos de contato das tangentes horizontais e verticais à cardióide (V. figura)

$$(5)\quad \begin{cases} x = a\cos\theta - \frac{1}{2}a\cos 2\theta - \frac{1}{2}a, \\ y = a\,\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}a\,\text{sen}\,2\theta. \end{cases}$$

SOLUÇÃO. $\frac{dx}{d\theta} = a\,(-\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\,\theta)\,;\quad \frac{dy}{d\theta} = a\,(\cos\theta - \cos 2\,\theta)\,.$

Tangentes horizontais: Deve-se ter $\cos\theta - \cos 2\,\theta = 0$. Substituindo (usando (5), p. 3), $\cos 2\,\theta = 2\cos^2\theta - 1$; resolvendo, obtemos $\theta = 0,\ 120^\circ, 240^\circ$.

Tangentes verticais. Deve-se ter $-\,\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,2\,\theta = 0$. Substituindo (usando (5), p. 3), $\text{sen}\,2\,\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$; resolvendo, $\theta = 0,\ 60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ$.

A raiz comum $\theta = 0$ deve ser rejeitada pois o numerador e denominador de (A) se anulam e o coeficiente angular é indeterminado (V. § 12). De (5), $x = y = 0$ quando $\theta = 0$. O ponto O diz-se uma *cúspide*.

Substituindo os outros valores em (5), os resultados são os seguintes:

Tangentes horizontais: pontos de contato $(-\frac{3}{4}a, \pm\frac{3}{4}a\sqrt{3})$.

Tangentes verticais: pontos de contato $(\frac{1}{4}a, \pm\frac{1}{4}a\sqrt{3})$, $(-2a, 0)$.

Duas tangentes verticais coincidem, dando uma "tangente dupla".

Êstes resultados estão de acôrdo com a figura.

PROBLEMAS

Achar as equações da tangente e da normal e os comprimentos da subtangente e subnormal a cada uma das seguintes curvas, no ponto indicado.

		Tangente	*Normal*	*Subt.*	*Subn.*
1. $x=t^2,\ y=2t+1;\ t=1.$	*Resp.*	$x-y+2=0,$	$x+y-4=0,$	$3,$	$3.$
2. $x=t^3,\ y=3t;\ t=-1.$		$x-y-2=0,$	$x+y+4=0,$	$-3,$	$-3.$
3. $x=3t,\ y=\frac{2}{t}\,;\ t=2.$		$x+6y-12=0,$	$6x-y-35=0,$	$-6,$	$-\frac{1}{6}.$
4. $x=e^t,\ y=3e^{-t};\ t=0.$		$3x+y-6=0,$	$x-3y+8=0,$	$-1,$	$-9.$

5. $x=\cos 2\theta,\ y=\operatorname{sen}\theta;\ \theta=\frac{1}{6}\pi$.

6. $x=t^2,\ y=2-t;\ t=1$.

7. $3x=t^3,\ 2y=t^2;\ t=2$.

8. $x=6t-t^2,\ y=2t+3;\ t=0$.

9. $x=t^2,\ y=t^2+3t;\ t=1$.

10. $x=\dfrac{1}{t},\ y=2t;\ t=-1$.

11. $x=\operatorname{tg}\theta,\ y=\operatorname{ctg}\theta;\ \theta=\frac{1}{4}\pi$.

12. $x=-3\,e^{-t},\ y=2\,e^{t};\ t=0$.

13. $x=3\cos\alpha,\ y=5\operatorname{sen}\alpha;\ \alpha=\frac{1}{4}\pi$.

14. $x=\operatorname{sen}2\theta,\ y=\cos\theta;\ \theta=\frac{1}{3}\pi$.

15. $x=\ln(t-2),\ 3y=t;\ t=3$.

Em cada um dos exercícios seguintes trace a curva e ache os pontos de contato das tangentes horizontal e vertical.

16. $x=3t-t^3,\ y=t+1$. *Resp.* Tangentes horizontais, não há; tangentes verticais $(2, 2)$, $(-2, 0)$.

17. $x = 3 - 4\operatorname{sen}\theta,\ y = 4 + 3\cos\theta$.

Resp. Tangentes horizontais $(3, 1)$, $(3, 7)$; tangentes verticais, $(7, 4)$, $(-1, 4)$.

18. $x=t^2-2t,\ y=t^3-12t$.

19. $x=h+r\cos\theta,\ y=k+r\operatorname{sen}\theta$.

20. $x=\operatorname{sen}2t,\ y=\operatorname{sen}t$.

21. $x=\cos^4\theta,\ y=\operatorname{sen}^4\theta$.

Nas curvas seguintes (figuras no Capítulo XXVI) achar os comprimentos da (*a*) subtangente, (*b*) subnormal, (*c*) tangente, (*d*) normal, em cada ponto.

22. Curva $\begin{cases} x = a(\cos t + t\operatorname{sen}t), \\ y = a(\operatorname{sen}t - t\cos t). \end{cases}$

Resp. (a) $y\operatorname{ctg}t$, (b) $y\operatorname{tg}t$, (c) $\dfrac{y}{\operatorname{sen}t}$, (d) $\dfrac{y}{\cos t}$.

23. Hipociclóide $\begin{cases} x = 4a\cos^3 t, \\ y = 4a\operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$

Resp. (a) $-y\operatorname{ctg}t$, (b) $-y\operatorname{tg}t$, (c) $\dfrac{y}{\operatorname{sen}t}$, (d) $\dfrac{y}{\cos t}$.

24. Círculo $\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\operatorname{sen}t. \end{cases}$

25. Cardióide $\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t), \\ y = a(2\operatorname{sen}t - \operatorname{sen}2t). \end{cases}$

26. Folium $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$.

27. Espiral hiperbólica $\begin{cases} x = \dfrac{a}{t}\cos t, \\ y = \dfrac{a}{t}\operatorname{sen} t. \end{cases}$

82. — Equações paramétricas. Derivada segunda. Usando y' como símbolo para a derivada primeira de y em relação a x, (A), § 81, dará y' como função de t,

$$(1) \qquad y' = h(t).$$

Para achar a derivada segunda y'' usa-se de novo a fórmula (A), substituindo-se y por y'. Temos então

$$(B) \qquad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{f'(t)},$$

caso $x = f(t)$, como em (1), § 81.

Exemplo ilustrativo. Achar y'' para a ciclóide (Ver exemplo ilustrativo 2, § 81).

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

Solução. Achamos $y' = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$, e $\dfrac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$.

Logo, derivando,

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{(1-\cos\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta - 1}{(1-\cos\theta)^2} = -\frac{1}{(1-\cos\theta)}.$$

Substituindo em (B),

$$y'' = -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}. \quad \textit{Resp.}$$

Note que y'' é negativa e, portanto, a curva é côncava para baixo, como mostra a figura, p. 140.

PROBLEMAS

1. Em cada um dos exemplos seguintes achar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ em têrmos de t.

(a) $x = t - 1,\ y = t^2 + 1$. *Resp.* $\frac{dy}{dx} = 2t,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2$.

(b) $x = \frac{t^2}{2},\ y = 1 - t$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{t^3}$.

(c) $x = 2t,\ y = \frac{t^3}{3}$.

(d) $x = \frac{t^3}{6},\ y = \frac{t^2}{2}$.

(e) $x = a\cos t,\ y = b\,\mathrm{sen}\,t$.

(f) $x = 2(1 - \mathrm{sen}\,t),\ y = 4\cos t$.

(g) $x = \mathrm{sen}\,t,\ y = \mathrm{sen}\,2t$.

(h) $x = \cos 2t,\ y = \mathrm{sen}\,t$.

2. Mostrar que a curva $x = \sec\theta,\ y = \mathrm{tg}\,\theta$ não tem ponto de inflexão.

3. Em cada um dos exemplos seguintes, desenhar a curva e achar os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão.

(a) $x = 2a\,\mathrm{ctg}\,\theta,\ y = 2a\,\mathrm{sen}^2\theta$.

Resp. Máx. $(0, 2a)$; pontos de inflexão $\left(\pm\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{2}\right)$.

(b) $x = \mathrm{tg}\,t,\ y = \mathrm{sen}\,t\cos t$.

Resp. Máx. $(1, \frac{1}{2})$; mín. $(-1, -\frac{1}{2})$;

pontos de inflexão $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

83. — Movimento curvilíneo. Velocidade. Quando o parâmetro t das equações paramétricas (1), § 81, é o tempo e as funções $f(t)$ e $\phi(t)$ são contínuas se t varia continuamente, o ponto P descreve a trajetória de um *movimento curvilíneo* e

$$x = f(t),\ y = \phi(t) \tag{1}$$

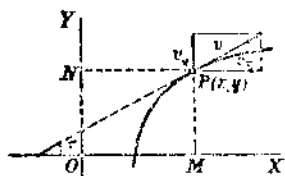
são chamadas as *equações do movimento.*

A velocidade do ponto móvel $P(x, y)$ em cada instante é determinada pelas suas componentes horizontal e vertical.

A componente horizontal v_x é igual à velocidade ao longo de OX da projeção M de P e é, portanto, de acordo com (C), § 51, onde s é substituída por x,

$$(C) \qquad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Do mesmo modo a componente vertical v_y é

$$(D) \qquad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Tracemos os vetores v_x e v_y a partir de P como na figura, completemos o retângulo e tracemos a diagonal passando por P. Esta diagonal orientada a partir de P representa o vetor velocidade em P.

Vê-se pela figura que a grandeza e a direção dêle são dadas pelas fórmulas

$$(E) \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Comparando com (A), § 81, vemos que $\operatorname{tg} \tau$ é igual ao coeficiente angular da trajetória em P. Portanto, a direção de v é ao longo da tangente à trajetória em P. A grandeza do vetor velocidade chama-se *velocidade*.

84. — Movimento curvilíneo. Acelerações componentes. Mostra-se em Mecânica que num movimento curvilíneo o vetor aceleração α não é, como o vetor velocidade, dirigido ao longo da tangente, mas em direção do lado côncavo da trajetória do movimento. Ele pode ser decomposto numa componente tangencial, α_t, e numa componente normal, α_n, onde

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt}; \quad \alpha_n = \frac{v^2}{R}.$$

(R é o raio de curvatura. Ver § 105).

A aceleração (vetor) pode também ser decomposta em componentes paralelas aos eixos coordenados. Seguindo o mesmo mé

todo usado no § 83 para as velocidades componentes, definimos *acelerações componentes* paralelas a OX e OY,

$$(F) \qquad \alpha_x = \frac{dv_x}{dt} \; ; \; \alpha_y = \frac{dv_y}{dt} \, .$$

Portanto, construindo um retângulo com vértice P e lados α_x e α_y, vemos que α é a diagonal passando por P; temos pois

$$(G) \qquad \alpha = \sqrt{(\alpha_x)^2 + (\alpha_y)^2} \, ,$$

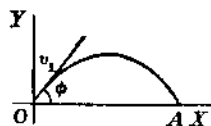
que dá a grandeza do vetor aceleração em cada instante.

No problema 1 abaixo fazemos uso das equações do movimento de um projétil, que ilustra muito bem êste e o parágrafo precedente.

PROBLEMAS

1. Desprezando-se a resistência do ar, as equações do movimento de um projétil são

$$x = v_1 \cos \phi \, . \, t \, , \quad y = v_1 \operatorname{sen} \phi \, . \, t - 4{,}9\, t^2$$

onde v_1 = velocidade inicial, ϕ = ângulo de projeção com o horizonte e t = tempo de percurso em segundos, sendo x e y medidos em metros. Achar as velocidades componentes, as acelerações componentes, a velocidade e a aceleração (a) em cada instante; (b) no fim do primeiro segundo, sendo $v_1 = 30$ m por segundo, $\phi = 30°$.

Achar (c) a direção do movimento no fim do primeiro segundo; (d) a equação retangular da trajetória.

Solução. De (C) e (D),

$$(a) \qquad v_x = v_1 \cos \phi \, , \quad v_y = v_1 \operatorname{sen} \phi - 9{,}8\, t$$

De (E), $\qquad v = \sqrt{v_1^2 - 19{,}6\, t\, v_1 \operatorname{sen} \phi + 96\, t^2}$

De (F) e (G), $\alpha_x = 0$; $\alpha_y = -9{,}8$; $\alpha = 9{,}8$, direção para baixo.

(b) Fazendo $t = 1$, $v_1 = 30$, $\phi = 30°$ nêstes resultados, obtemos

$v_x = 25{,}98$ m por seg.	$\alpha_x = 0$.
$v_y = 5{,}2$ m por seg.	$\alpha_y = -9{,}8$ m por (seg.)^2.
$v = 26{,}5$ m por seg.	$\alpha = 9{,}8$ m por (seg.)^2.

(c) $\tau = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{v_y}{v_x} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{5{,}2}{25{,}98} = 11° 32'$ = ângulo de direção do movimento com a horizontal.

(d) Quando $v_1 = 30$, $\phi = 30°$, as equações do movimento são

$$x = 15\,t\sqrt{3}, \quad y = 15\,t - 4{,}9\,t^2 .$$

Eliminando t, o resultado é $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4{,}9}{675}x^2$, uma parábola.

2. Mostrar que a equação retangular da trajetória do projétil no problema 1 é

$$y = x \operatorname{tg} \phi - \frac{4{,}9}{v_1^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \phi)\, x^2 .$$

3. Um projétil é lançado numa direção inclinada de 45° relativamente à horizontal com uma velocidade inicial de 160 pés por segundo. Achar (a) as componentes da velocidade no fim do segundo e do quarto segundos; (b) a velocidade e a direção do movimento nos mesmos instantes. (*)

Resp. (a) Quando $t = 2$, $v_x = 113{,}1$ pés por seg., $v_y = 48{,}7$ pés por seg.; quando $t = 4$, $v_x = 113{,}1$ pés por seg., $v_y = -15{,}7$ pés por seg.;
(b) Quando $t=2$, $v=123{,}1$ pés por seg., $\tau=23°18'$; quando $t=4$, $v=114{,}2$ pés por seg., $\tau=172°\,6'$.

4. Com os dados do problema 3 achar a máxima altura alcançada pelo projétil. Se o projétil cai sobre o solo no mesmo nível horizontal com que foi atirado, achar o tempo de percurso e o ângulo de impacto.

5. Um projétil com a velocidade inicial de 48 m por seg. bate numa parede vertical a 144 m de distância. Mostrar que o ponto mais alto da parede que pode ser atingido pelo projétil está a 75,9 m de altura relativamente ao eixo dos xx. Qual é ϕ para esta altura.

Resp. $\phi = 59°$ aprox.

6. Se um ponto move-se relativamente a um sistema de coordenadas retangulares segundo a lei

$$x = a \cos t + b\,, \quad y = a \operatorname{sen} t + c\,,$$

mostre que sua velocidade tem grandeza constante.

7. Se a trajetória de um ponto móvel é a curva

$$\begin{cases} x = at\,, \\ y = b \operatorname{sen} at\,, \end{cases}$$

* 9,8 metros = 32,2 pés (N. T.).

mostrar (a) que a componente sobre OX da velocidade é constante; (*b*) que a aceleração do ponto em cada instante é proporcional à distância do ponto ao eixo dos xx.

8. Dadas as equações de movimento $x = t^2$, $y = (t - 1)^2$, (a) achar a equação da trajetória em coordenadas retangulares; (b) desenhar a trajetória com os vetores velocidade e aceleração em $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ e $t = 2$; (c) para que valores do tempo é mínima a velocidade? (d) onde está o ponto quando sua velocidade é 10 pés por segundo?

Resp. (a) Parábola, $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$; (c) $t = \frac{1}{2}$; (d) $(16, 9)$.

9. No movimento uniforme (velocidade constante) sobre um círculo, mostrar que a aceleração em cada ponto P é constante em grandeza e dirigida, ao longo do raio, de P para o centro do círculo.

10. As equações de um movimento curvilíneo são $x = 2\cos 2t$, $y = 3\cos t$. (a) Mostrar que o ponto móvel oscila sôbre um arco da parábola $4y^2 - 9x - 18 = 0$. Desenhar a curva. (b) Desenhar os vetores aceleração nos pontos onde $v = 0$. (c) Desenhar o vetor velocidade no ponto onde a velocidade é máxima.

Dadas as seguintes equações de movimento curvilíneo, achar, no instante dado, $v_x, v_y, v, \alpha_x, \alpha_y, \alpha$; posição do ponto (coordenadas); direção do movimento. Achar também a equação da trajetória em coordenadas retangulares.

11. $x = t^2,\ y = 2t;\ t = 2$.

12. $x = 2t,\ y = t^3;\ t = 1$.

13. $x = t^3,\ y = t^2;\ t = 2$.

14. $x = 3t,\ y = t^2 - 3;\ t = 3$.

15. $x = 2 - t,\ y = 1 + t^2;\ t = 0$.

16. $x = a\cos t,\ y = a\,\mathrm{sen}\,t;\ t = \frac{3}{4}\pi$.

17. $x = 4\,\mathrm{sen}\,t,\ y = 2\cos t;\ t = \frac{1}{2}\pi$.

18. $x = \mathrm{sen}\,2t,\ y = 2\cos t;\ t = \frac{1}{2}\pi$.

19. $x = 2\,\mathrm{sen}\,t;\ y = \cos 2t;\ t = \frac{1}{2}\pi$.

20. $x = \mathrm{tg}\,t;\ y = \mathrm{ctg}\,t;\ t = \frac{1}{4}\pi$.

85. — Coordenadas polares. Ângulo entre o raio vetor e a tangente. Seja, em coordenadas polares ρ, θ,

$$(1) \qquad \rho = f(\theta)$$

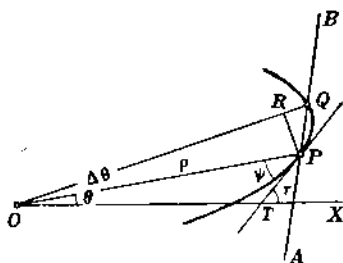
a equação de uma curva.

Vamos provar o

TEOREMA. *Se ψ é o ângulo compreendido entre o raio vetor OP e a tangente em P, então*

$$(H) \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{\rho}{\rho'}$$

onde $$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Por P e um ponto $Q(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$ da curva, próximo de P, tracemos a reta AB. Tracemos também PR perpendicular a OQ.

Então (ver figura), $OQ = \rho + \Delta\rho$, ângulo $POQ = \Delta\theta$, $PR = \rho \operatorname{sen} \Delta\theta$ e $OR = \rho \cos \Delta\theta$. Ainda

$$(2) \qquad \operatorname{tg} PQR = \frac{PR}{RQ} = \frac{PR}{OQ - OR} = \frac{\rho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\theta}.$$

Indiquemos por ψ o ângulo compreendido entre o raio vetor OP e a tangente PT. Fazendo $\Delta\theta$ tender a zero, temos que

(*a*) o ponto Q tende a P;

(*b*) a secante AB gira em torno de P e tende à tangente PT;

(*c*) o ângulo PQR tende a ψ.

Logo

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \psi = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\rho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho \cos \Delta\theta}.$$

Para obter esta fração numa forma a que se possa aplicar os teoremas do § 16, transformamo-la como segue:

$$\frac{\rho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\rho\,(1 - \cos \Delta\theta) + \Delta\rho} = \frac{\rho \operatorname{sen} \Delta\theta}{2\,\rho \operatorname{sen}^2 \dfrac{\Delta\theta}{2} + \Delta\rho}$$

$\left[\text{pois de (5), p. 3, } \rho - \rho \cos \Delta\theta = \rho\,(1 - \cos \Delta\theta) = 2\,\rho \operatorname{sen}^2 \dfrac{\Delta\theta}{2}.\right]$

$$= \frac{\rho \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho \operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} + \dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}.$$

[Dividindo o numerador e denominador por $\Delta\theta$ e fatorando]

Quando $\Delta\theta \to 0$, temos, pelo § 68,

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta} = 1, \quad \text{e} \quad \lim \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} = 1.$$

Ora,
$$\lim \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{2} = 0, \quad \lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} = \rho'.$$

Logo, os limites do numerador e denominador são, respectivamente, ρ e ρ', o que prova (H).

Para achar o coeficiente angular ($\operatorname{tg} \tau$ na figura), procedemos como segue. Tomamos, como usualmente, eixos retangulares OX e OY; temos, então, para $P\,(x\,,y)$

$$(4) \qquad x = \rho \cos \theta\,, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta\,.$$

Usando (1), estas equações tornam-se as equações paramétricas da curva, sendo θ o parâmetro. O coeficiente angular acha-se por (A). Assim, de (4),

$$\frac{dx}{d\theta} = \rho' \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta\,, \quad \frac{dy}{d\theta} = \rho' \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta\,,$$

$$(I)\quad \text{Coeficiente angular da tangente} = \operatorname{tg}\tau = \frac{\rho' \operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta.}{\rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta}$$

Verifica-se fàcilmente a fórmula (I) pela figura da página 149. Realmente, do triângulo OPT, $\tau = \theta + \psi$; logo $\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}(\theta + \psi) = $ $= \dfrac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\psi}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\psi}$. Substituindo $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\rho}{\rho'}$ e reduzindo, obtemos (I).

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\operatorname{tg}\psi$ e o coeficiente angular da cardióide $\rho = a(1 - \cos\theta)$.

Solução. $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho' = a\operatorname{sen}\theta$. Substituindo em (H) e (I)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\operatorname{sen}\theta} = \frac{2a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta}{2a\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\theta. \qquad ((5),\ \text{p. } 3)$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{a\operatorname{sen}^2\theta + a(1-\cos\theta)\cos\theta}{a\operatorname{sen}\theta\cos\theta - a(1-\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\operatorname{sen}2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \operatorname{tg}\tfrac{3}{2}\theta. \qquad ((5),\ (6),\ \text{p. } 3)$$

Em P na figura, $\psi = \text{ângulo } OPT = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}$ ângulo XOP. Se a tangente PT corta o eixo OX formando um ângulo τ, temos ângulo $XOP = 180° -$ $-$ ângulo $OPT + \tau$.

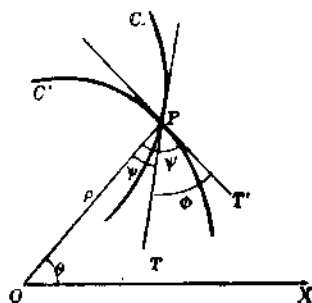
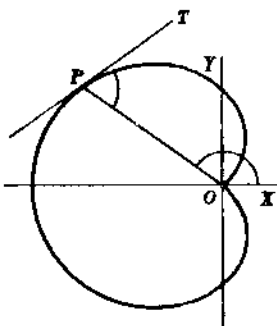
Conseqüentemente, $\tau = \frac{3}{2}\theta - 180°$ e $\operatorname{tg}\tau = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\theta$, como acima ((3), p. 3).

Nota. Deduziu-se a fórmula (H) para a figura da p. 149. Em cada problema, as relações entre os ângulos ψ, τ e θ devem ser determinadas examinando-se os sinais das funções trigonométricas dêles e traçando-se a figura.

Para achar o ângulo de interseção ϕ de duas curvas C e C' cujas equações são dadas em coordenadas polares, podemos proceder como segue: Ângulo TPT' = ângulo OPT' − ângulo OPT,

ou $\qquad \phi = \psi' - \psi$. Logo

$$(J)\quad \operatorname{tg}\phi = \frac{\operatorname{tg}\psi' - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\psi'\operatorname{tg}\psi},$$

onde $\operatorname{tg}\psi'$ e $\operatorname{tg}\psi$ são obtidas, por (H), das equações das curvas, calculadas no ponto de interseção.

Exemplo ilustrativo 2. Achar o ângulo de interseção das curvas $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$ e $\rho = a \cos 2\theta$.

SOLUÇÃO Resolvendo o sistema formado pelas duas equações, obtemos, no ponto de interseção,

$$\operatorname{tg} 2\theta = 1\,,\ 2\theta = 45^\circ\,,\ \theta = 22\tfrac{1}{2}^\circ\,.$$

Da primeira curva, usando (*H*),

$$\operatorname{tg} \psi' = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2\theta = \tfrac{1}{2}\,,\ \text{para } \theta = 22\tfrac{1}{2}^\circ\,.$$

Da segunda curva,

$$\operatorname{tg} \psi = -\tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} 2\theta = -\tfrac{1}{2}\,,\ \text{para } \theta = 22\tfrac{1}{2}^\circ.$$

Substituindo em (*J*),

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4}{3}\,. \quad \textit{Resp.}$$

As curvas podem ser vistas no Capítulo XXVI.

86. — Comprimentos da subtangente polar e da subnormal polar. Tracemos uma reta NT pela origem, perpendicular ao raio vetor do ponto P da curva. Se PT é a tangente e PN a normal à curva em P, então

OT = comprimento da subtangente polar,
ON = comprimento da subnormal polar,
da curva em P.

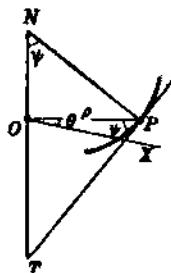
No triângulo OPT, $\operatorname{tg} \psi = \dfrac{OT}{\rho}$. Logo

(1) $OT = \rho \operatorname{tg} \psi = \rho^2 \dfrac{d\theta}{d\rho}$ = comprimento da subtangente polar *

No triângulo OPN, $\operatorname{tg} \psi = \dfrac{\rho}{ON}$. Logo

(2) $$ON = \frac{\rho}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{d\rho}{d\theta} = \text{comprimento da subnormal polar.}$$

O comprimento da tangente polar ($= PT$) e o *comprimento da normal polar* ($= PN$) podem ser achadas pela figura, sendo cada uma delas a hipotenusa de um triângulo retângulo.

---

* Quando θ cresce com ρ, $\dfrac{d\theta}{d\rho}$ é positiva e ψ é ângulo agudo, como na figura acima. Então a subtangente OT é positiva e é medida à direita de um observador colocado em O e olhando ao longo de OP. Quando $\dfrac{d\theta}{d\rho}$ é negativa, a subtangente é negativa e medida à esquerda do observador.

Exemplo ilustrativo. Achar os comprimentos da subtangente polar e da sub-normal polar à lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ (figura no Capítulo XXVI).

SOLUÇÃO. Derivando, tomando ρ como função implícita de θ,

$$2\rho \frac{d\rho}{d\theta} = -2a^2 \operatorname{sen} 2\theta, \quad \text{ou} \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}.$$

Substituindo em (1) e (2), obtemos

$$\text{Comprimento da subtangente polar} = -\frac{\rho^3}{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}.$$

$$\text{Comprimento da subnormal polar} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}.$$

Se quisermos exprimir os resultados em termos de θ, achamos ρ em termos de θ da dada equação e substituímos. Assim, no caso supra, $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\theta}$; logo o comprimento da subtangente polar é igual a $\pm a \operatorname{ctg} 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}$.

PROBLEMAS

1. No círculo $\rho = a \operatorname{sen} \theta$, achar ψ e τ em têrmos de θ.

Resp.: $\psi = \theta, \ \tau = 2\theta$.

2. Na parábola $\rho = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$, mostrar que $\tau + \psi = \pi$.

3. Mostrar que ψ é constante na espiral logarítmica $\rho = e^{a\theta}$. Como a tangente faz um ângulo constante com o raio vetor, a curva é também chamada de espiral equiangular.

4. Mostre que $\operatorname{tg} \psi = \theta$ na espiral de Archimedes $\rho = a\theta$. Achar os valores de ψ quando $\theta = 2\pi$ e 4π.

Resp. $\psi = 80° 57'$ e $85° 27'$.

Achar os coeficientes angulares das seguintes curvas nos pontos indicados.

5. $\rho = a(1 - \cos\theta)$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. *Resp.* -1

6. $\rho = a \sec^2 \theta$; $\rho = 2a$. 3.

7. $\rho = a \operatorname{sen} 4\theta$; origem. $0, \ 1, \ \infty, \ -1$.

8. $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 4\theta$; origem. $0, \ 1, \ \infty, \ -1$.

9. $\rho = a \operatorname{sen} 3\theta$; origem. $0, \ \sqrt{3}, \ -\sqrt{3}$.

10. $\rho = a \cos 3\theta$; origem.

11. $\rho = a \cos 2\theta$; origem.

12. $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$; $\theta = \frac{\pi}{4}$.

13. $\rho = a \operatorname{sen} 3\theta$; $\theta = \frac{\pi}{6}$.

14. $\rho = a\theta$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

15. $\rho\theta = a$; $\theta = \frac{\pi}{2}$.

16. $\rho = e^{\theta}$; $\theta = 0$.

Achar o ângulo de interseção entre os seguintes pares de curvas.

17. $\rho \cos\theta = 2a$, $\rho = 5a \operatorname{sen}\theta$. *Resp.*: $\operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4}$.

18. $\rho = a \operatorname{sen}\theta$, $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$.

Resp. Na origem, $0°$; nos dois outros pontos, $\operatorname{arc\,tg} 3\sqrt{3}$.

19. $\rho \operatorname{sen}\theta = 2a$, $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. *Resp.* $45°$.

20. $\rho = 4\cos\theta$, $\rho = 4(1 - \cos\theta)$. $60°$.

21. $\rho = 6\cos\theta$, $\rho = 2(1 + \cos\theta)$. $30°$.

22. $\rho = \operatorname{sen}\theta$, $\rho = \cos 2\theta$. $0°$ e $\operatorname{arc\,tg} \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

23. $\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$, $\rho^2 = 16 \operatorname{sen} 2\theta$. $60°$.

24. $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\rho = b(1 - \cos\theta)$.

25. $\rho = \operatorname{sen} 2\theta$, $\rho = \cos 2\theta + 1$.

26. $\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta = 8$, $\rho = 2\sec\theta$.

Mostrar que os seguintes pares de curvas cortam-se em ângulo reto.

27. $\rho = 2\operatorname{sen}\theta$, $\rho = 2\cos\theta$.

28. $\rho = a\theta$, $\rho\theta = a$.

29. $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $\rho = a(1 - \cos\theta)$.

30. $\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta = a^2$, $\rho^2 \cos 2\theta = b^2$.

31. $\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$, $\rho = \operatorname{cossec}^2 \frac{\theta}{2}$.

32. Achar os comprimentos da subtangente polar, subnormal, tangente e normal da espiral de Archimedes $\rho = a\theta$.

$$Resp. \quad \text{Subtangente} = \frac{\rho^2}{a}, \ \text{tangente} = \frac{\rho}{a}\sqrt{a^2 + \rho^2}$$

$$\text{subnormal} = a, \ \text{normal} = \sqrt{a^2 + \rho^2}.$$

Observe-se que a subnormal é constante.

33. Achar os comprimentos da subtangente polar, subnormal, tangente e normal na espiral logarítmica $\rho = a^{\theta}$.

$$Resp. \quad \text{Subtangente} = \frac{\rho}{\ln a}, \ \text{tangente} = \rho\sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}}$$

$$\text{subnormal} = \rho \ln a, \ \text{normal} = \rho\sqrt{1 + \ln^2 a}.$$

34. Mostrar que a espiral recíproca $\rho\theta = a$ tem subtangente polar constante.

87. — Raízes reais das equações. Métodos gráficos. Um valor de x que satisfaz a equação

$$(1) \qquad f(x) = 0$$

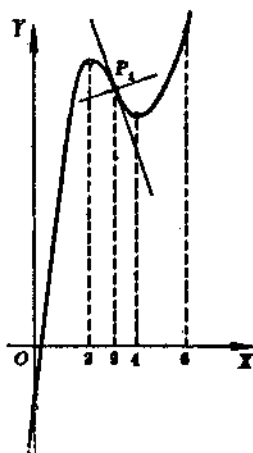
diz-se uma *raiz* da equação (ou uma *raiz* de $f(x)$). Uma raiz de (1) pode ser um número real ou um número imaginário (complexo). Daremos agora métodos de determinação aproximada das raízes reais.

Localização e número de raízes.*

PRIMEIRO MÉTODO. Construído o gráfico de $f(x)$, isto é, o lugar de

$$(2) \qquad y = f(x),$$

as interseções dele com o eixo dos xx são as raízes. A figura nos diz logo, portanto, o número de raízes e os seus valores aproximados.

* *Localizar* (*ou separar*) as raízes reais de uma equação é determinar intervalos em cada um dos quais exista uma só das raízes reais da equação (N. T.).

Exemplo ilustrativo. Localize todas as raízes reais de

(3) $x^3 - 9x^2 + 24x - 7 = 0.$

x	$f(x)$
0	7
1	9

SOLUÇÃO. O gráfico foi construído no § 58, Problema 1. Ele cruza o eixo dos xx entre 0 e 1. Logo, existe uma raiz real entre estes valores e não há outras raízes reais.

O quadro dá os valores de $f(0)$ e $f(1)$, mostrando uma mudança de sinal.

O quadro de valores de x e y usados no desenho do gráfico podem localizar uma raiz exatamente, precisamente, se $y = 0$ para algum valor de x. Isto acontece quando os valores de y para dois valores sucessivos $x = a$ e $x = b$ tem sinais opostos. Realmente, neste caso, os pontos correspondentes $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ estão em lados opostos do eixo dos xx e o gráfico de (2), ligando estes pontos, corta, portanto, o eixo dos xx. Neste caso existe, pois, uma raiz e esta está compreendida entre a e b. Precisamente, tem-se o seguinte resultado:

Se uma função contínua $f(x)$ muda de sinal num intervalo (a, b) e se a sua derivada não muda de sinal nesse intervalo, então a equação $f(x) = 0$ tem uma, e sòmente uma, raiz compreendida entre a e b.

A localização, por tentativas, de uma raiz depende deste resultado. Se a distância entre a e b não é muito grande, uma aproximação ulterior pode ser achada *por interpolação. Isto importa em determinar-se a interceção da corda PQ com o eixo dos xx,* isto é, a porção do gráfico ligando P a A é substituída, como uma aproximação, pela corda.

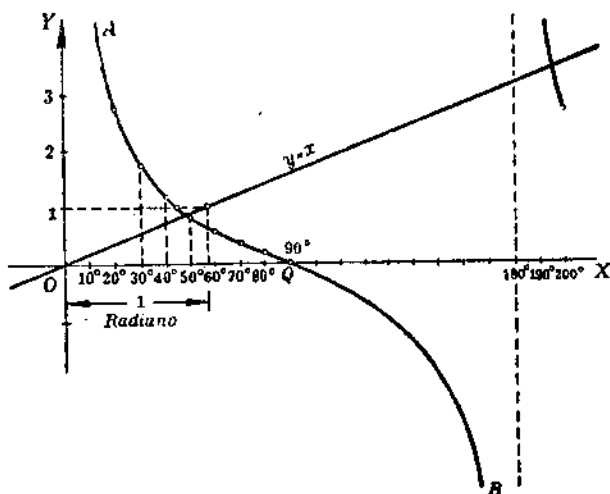
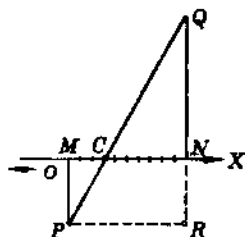
Exemplo ilustrativo (continuação). A raiz entre 0 e 1 pode ser localizada pelo cálculo com mais justeza entre 0,3 e 0,4; ver quadro. Seja $0,3 + z$ esta raiz. Então, por interpolação (proporção)

	x	$f(x) = y$
	0,4	1,224
	$0,3 + z$ (raiz)	0
	0,3	$-0,583$
Dif.	0,1	1,807

$$\frac{z}{0,1} = \frac{0,583}{1,807}, \quad z = 0,032.$$

Logo $x = 0,332$ é uma segunda aproximação. Esta é a interseção com o eixo dos xx da reta ligando os pontos $Q(0,4\,;\,1,224)$ e $P(0,3\,;\,-0,583)$, que estão sobre o gráfico de (3). Na figura, $MP = -0,583$, $NQ = 1,224$, de acordo com a escala. As abscissas de M e N são 0,3 e 0,4 respectivamente. Ainda, $MC = z$ e os lados homólogos dos triângulos semelhantes MPC e PQR dão a proporção acima.

Para uma equação algébrica, de que (3) é um exemplo, o método de Horner é melhor adaptado ao cálculo numérico de uma raiz com o grau desejado de aproximação como o explicam os livros de álgebra.

88. — Segundo método de localização das raízes reais. O método do § 58 adapta-se melhor à construção rápida do gráfico de $f(x)$. Por este gráfico as raízes são localizadas e o número delas determinado. Em muitos exemplos, contudo, obtém-se o mesmo resultado mais ràpidamente traçando-se certas curvas interceptantes. O exemplo a seguir mostra como se faz isto.

Exemplo ilustrativo. Determinar o número de raízes reais (x em radianos) da equação

(1) $$\operatorname{ctg} x - x = 0,$$

e localizar a menor raiz.

SOLUÇÃO. Escrevamos (1) do modo abaixo

(2) $$\operatorname{ctg} x = x.$$

Traçando-se as curvas

(3) $$y = \operatorname{ctg} x \quad \text{e} \quad y = x,$$

com um mesmo sistema de eixos, *as abscissas dos pontos de interseção serão raízes* de (1). Realmente, a eliminação de y em (3) dá a equação (1), da qual devem ser obtidos os valores de x dos pontos de interseção.

$y = \operatorname{ctg} x$		
x (graus)	x (radianos)	y
0	0	∞
10	0,175	5,67
20	0,349	2,75
30	0,524	1,73
40	0,698	1,19
45	0,785	1,000
50	0,873	0,839
60	1,047	0,577
70	1,222	0,364
80	1,396	0,176
90	1,571	0,0

No desenho é bom marcar cuidadosamente ambas as escalas (graus e radianos) sôbre OX.

Número de soluções. A curva $y = \text{ctg } x$ consiste de um número infinito de ramos congruentes a AQB da figura (V. § 70). A reta $y = x$ corta òbviamente cada ramo. Logo, a equação (1) tem um número infinito de soluções.

Usando tábuas de cotangentes naturais e os equivalentes radianos dos graus, podemos localizar a menor raiz com mais precisão, como mostra o quadro. Por interpolação achamos $x = 0{,}860$. *Resp.*

x (graus)	x (radianos)	ctg x	ctg $x - x$
50	0,873	0,839	−0,034
	raiz		
49	0,855	0,869	+0,014
Dif.	0,018		−0,048

O segundo método pode ser descrito como segue.

Muda-se de membro, convenientemente, certos termos de $f(x) = 0$, obtendo-se, digamos, a equação

$$f_1(x) = f_2(x)\,. \tag{4}$$

Desenha-se as curvas

$$y = f_1(x)\,, \quad y = f_2(x)\,, \tag{5}$$

usando os mesmos eixos e com uma escolha conveniente de escalas (não necessàriamente a mesma para os dois eixos).

O número de pontos de interseção destas curvas é igual ao número de raízes reais de $f(x) = 0$ e as abscissas destes pontos são as raízes.

Os termos escolhidos em (4) muitas vezes são tais que uma ou ambas as curvas (5) são de tipo conhecido.

Por exemplo, para localizar as raízes reais de

$$x^3 + 4x - 5 = 0$$

escrevemos a equação sob a forma $x^3 = 5 - 4x$.

As curvas (5) são então as curvas conhecidas

$$y = x^3\,, \quad y = 5 - 4x,$$

uma *parábola cúbica* e uma reta.

Como segundo exemplo, consideremos

$$2 \operatorname{sen} 2x + 1 - x^2 = 0,$$

que podemos escrever sob a forma $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

Então as curvas (5) são nêste caso a conhecida curva $y = \operatorname{sen} 2x$ e a parábola $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

89. — Método de Newton. Tendo localizado uma raiz, o método de Newton fornece um meio de calcular o valor aproximado dela.

A figura mostra dois pontos

$$P(a, f(a)), \quad Q(b, f(b))$$

sôbre o gráfico de $f(x)$, um de cada lado do eixo dos xx. Seja PT a tangente em P (Fig. a). A interseção a' desta reta com o eixo dos xx é, òbviamente, um valor aproximado da interseção do gráfico com o eixo dos xx e portanto da correspondente raiz de $f(x) = 0$. O método de Newton determina a interseção de PT com o eixo dos xx.

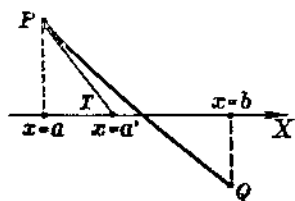
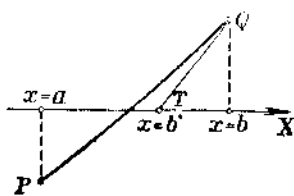



Fig. a Fig. b

Achamos a interseção a' como segue. As coordenadas de P são $x_1 = a$, $y_1 = f(a)$. O coeficiente angular de PT é $m_1 = f'(a)$. Logo, a equação de PT é ((1), § 43)

$$(1) \qquad y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Fazendo $y = 0$ e achando $x\,(= a')$, temos a *fórmula de aproximação de Newton*.

$$(K) \qquad a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Depois de achar a' por (K), podemos substituir a por a' no segundo membro, obtendo

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}$$

como segunda aproximação. O processo pode ser continuado, dando uma sucessão de valores

$$a, a', a'', a''', \ldots,$$

aproximando-se da raiz exata.

A tangente pode também ser traçada em Q (Fig. b). Então, substituindo, em (K), a por b, obtemos b' e de b' obtemos b'', etc., ou seja, valores

$$b', b'', b''', \ldots,$$

aproximando-se da raiz exata.

Exemplo ilustrativo. Achar a menor raiz de

$$\text{ctg}\, x - x = 0$$

pelo método de Newton.

SOLUÇÃO. Aqui $f(x) = \text{ctg}\, x - x$,

$$f'(x) = -\text{cossec}^2 x - 1 = -2 - \text{ctg}^2 x.$$

Pelo exemplo ilustrativo do § 88, tomamos $a = 0{,}855$; logo, pela tabela do § 88,

$$f(a) = 0{,}014.$$

Tem-se também $\qquad f'(a) = -2 - (0{,}869)^2 = -2{,}76.$

Logo, por (K), $a' = 0{,}855 + \dfrac{0{,}014}{2{,}76} = 0{,}860$. *Resp.*

Se usássemos $b = 0{,}873$ em (K), teríamos

$$b' = 0{,}873 - \frac{0{,}034}{2{,}704} = 0{,}861.$$

Por interpolação achamos $x = 0{,}860$. Os resultados acima são válidos até a terceira casa decimal.

Nas figuras da página 159 observamos que o gráfico atravessa o eixo dos xx entre a tangente PT e a corda PQ. Logo, *a raiz exata está entre o valor achado pelo método de Newton e o achado por interpolação.* Este resultado vale, contudo, com a ressalva de que $f''(x) = 0$ não tenha raiz entre a e b, isto é, com a ressalva de que *não exista ponto de inflexão sobre o arco PQ.*

PROBLEMAS

Determinar gràficamente o número e a posição aproximada das raízes reais de cada uma das equações abaixo. Calcular cada raiz até a segunda casa decimal.

1. $x^3 + 2x - 8 = 0$. *Resp.* 1,67.
2. $x^3 - 4x + 2 = 0$. − 2,21; 0,54; 1,67.
3. $x^3 - 8x - 5 = 0$. − 2,44; − 0,66; 3,10.
4. $x^3 - 3x - 1 = 0$. − 1,53; − 0,35; 1,88.
5. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$. − 0,88; 1,35; 2,53.
6. $x^3 + 3x^2 - 10 = 0$. 1,49.
7. $x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0$. − 1,71; 1,14; 3,57.
8. $x^3 + 2x^2 - 5x - 8 = 0$. − 2,76; − 1,36; 2,12.
9. $2x^3 - 14x^2 + 2x + 5 = 0$. − 0,51; 0,71; 6,80
10. $x^4 + 8x - 12 = 0$. − 2,36; 1,22.
11. $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 20x + 9 = 0$. − 2,16; − 0,41; 2,41; 4,16.
12. $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 20x - 23 = 0$. − 4,60; 2,60.

Determinar gràficamente o número de raízes reais de cada uma das seguintes equações. Calcular a menor raiz (diferente de zero), usando a fórmula de interpolação e a de Newton.

13. $\cos x + x = 0$. *Resp.* Uma raiz; $x = -0,739$.
14. $\operatorname{tg} x - x = 0$. Número infinito de raízes.
15. $\cos 2x - x = 0$. Uma raiz; $x = 0,515$.
16. $3 \operatorname{sen} x - x = 0$. *Resp.* Três raízes; $x = 2,279$.
17. $2 \operatorname{sen} x - x^2 = 0$. Duas raízes; $x = 1,404$.
18. $\cos x - 2x^2 = 0$. Duas raízes; $x = 0,635$.
19. $\operatorname{ctg} + x^2 = 0$. Número infinito de raízes; $x = 3,032$.
20. $2 \operatorname{sen} 2x - x = 0$. Três raízes; $x = 1,237$.
21. $\operatorname{sen} x + x - 1 = 0$. Uma raiz; $x = 0,511$.
22. $\cos x + x - 1 = 0$. Uma raiz; $x = 0$.
23. $e^{-x} - \cos x = 0$. Número infinito de raízes; $x = 1,29$.

24. $\operatorname{tg} x - \log x = 0.$ Número infinito de raízes; $x = 3{,}65.$

25. $e^x + x - 3 = 0.$ Uma raiz; $x = 0{,}792.$

26. $\operatorname{sen} 3x - \cos 2x = 0.$ Número infinito de raízes; $x = 0{,}314.$

27. $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x - \cos 2x = 0.$ Número infinito de raízes; $x = 0{,}517.$

28. $\operatorname{tg} x - 2e^x = 0.$ Número infinito de raízes; $x = 1{,}44.$

29. O raio interior r e o exterior R, em polegadas, do volante de uma máquina a vapor, que transmite H cavalos força com a velocidade de N rotações por minuto, satisfazem a relação $R^4 - r^4 = \frac{33\,HR}{N\pi^2}$. Se $H = 2500$, $N = 160$ e $r = 6$, achar R.

30. Uma cuba cilíndrica de fundo hemisférico tem d polegadas de diâmetro e uma capacidade de V polegadas cúbicas. Sabendo que o comprimento da parte cilíndrica é de h polegadas, mostrar que $d^3 + 3\,hd^2 = \frac{12\,V}{\pi}$. Dados $h = 20$, $V = 800$, achar d.

Resp. $d = 6{,}77.$

31. Se sôbre um açude de B pés de largura, caem Q pés cúbicos de água por segundo, tem-se

$$Q = 3{,}3\,(B - 0{,}2\,H)\,H^{\frac{3}{2}} \text{ (fórmula de Francis).}$$

onde H é a altura da água acima da crista do açude. Dados $Q = 12{,}5$ e $B = 3$, achar H. (Tire $H^{\frac{3}{2}}$ da fórmula e depois desenhe)

Resp.: $H = 1{,}23.$

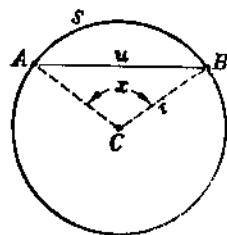
32. Se V pés cúbicos é o volume de uma libra de vapor à temperatura de $T°$ F. e à pressão de P libras por polegada quadrada,

$$V = 0{,}6490\,\frac{T}{P} - \frac{22{,}58}{P^{\frac{3}{4}}}.$$

Dados $V = 2{,}8$, $T = 420°$, achar P.

33. A corda c de um arco s de um círculo de raio r é dada aproximadamente pela fórmula

$$c = s - \frac{s^3}{24\,r^2}.$$

Se $r = 4$ pés, $c = 5{,}60$ pés, achar s. *Resp.* $s = 6{,}23$ pés.

34. A área u de um segmento circular cujo arco s subtende o ângulo cêntrico x (em radianos) é $u = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x)$. Achar o valor de x se $r = 8$ polegadas e $u = 64$ polegadas quadradas.

Resp. $x = 2{,}554$ radianos.

35. O volume V de um segmento esférico de uma base, de altura $CD = h$ é

$$V = \pi \left(rh^2 - \tfrac{1}{3} h^3\right)$$

Achar h se $r = 4$ pés, $V = 150$ pés cúbicos.

Resp. $h = 4{,}32$ pés.

36. O volume V de uma coroa esférica de raio R e espessura t é

$$V = 4 \pi t \left(R^2 - Rt + \tfrac{1}{3} t^2\right)$$

Deduza êste resultado. Se $R = 4$ pés e V é a metade do volume de uma esfera de igual raio, achar t.

Resp. $t = 0{,}827$ pés.

37. Uma esfera de madeira de peso específico S e diâmetro d mergulha na água a uma profundidade h. Seja $x = h/d$ e mostre que $2x^3 - 3x^2 + S = 0$. (Ver problema 35). Achar x para $S = 0{,}786$. *Resp.* 0,702.

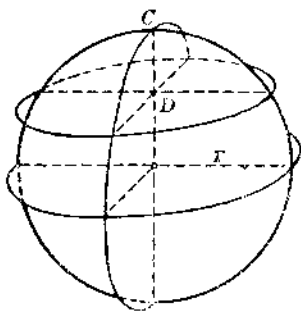
38. Ache o menor valor positivo de θ para o qual as curvas $\rho = \cos\theta$ e $\rho = e^{-\theta}$ se cortam. Ache o ângulo de interseção nêste ponto. *Resp.* 1,29 radianos; 29°.

OUTROS PROBLEMAS

1. Achar o ângulo de interseção das curvas $\rho = 2 \cos\theta$ e $\rho = e^{\theta}$ no ponto de interseção mais afastado da origem

Resp. O ponto de interseção é $\theta = 0{,}54$ radiano; 75° 56′.

2. Mostre que a curva $\rho = a \operatorname{sen}^4 \frac{1}{4}\theta$ corta-se a si mesma em ângulos retos.

3. Um raio vetor da cardióide $\rho = a(1 + \cos\theta)$ é OP. Do centro C do círculo $\rho = a\cos\theta$ tira-se um raio CQ paralelo a OP e do mesmo sentido. Prove que PQ é normal à cardióide.

4. Um quadrado tem uma das diagonais ao longo do eixo polar. Está circunscrito à cardióide $\rho = a(1 - \cos\theta)$. Mostre que sua área é $\frac{27}{16}(2 + \sqrt{3})\, a^2$.

5. A trajetória de uma partícula é a elipse $\rho = \dfrac{e\, p}{1 - e \cos\theta}$.

A partícula move-se de modo que o raio vetor ρ descreve área com velocidade de variação constante. Ache a razão entre as velocidades da partícula nos extremos do eixo maior.

Resp. $\dfrac{1 - e}{1 + e}$.

CAPÍTULO IX

DIFERENCIAIS

90. — Introdução. Até agora representamos a derivada de $y = f(x)$ pelo símbolo

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Com insistência chamamos a atenção do leitor para o fato de que o símbolo

$$\frac{dy}{dx}$$

devia ser considerado não como uma fração de numerador dy e denominador dx e sim como um todo, um único símbolo para indicar o limite de

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

quando Δx tende a zero.

Há problemas onde é importante dar sentido a dx e dy separadamente e outros onde isto é muito útil, como veremos nas aplicações do cálculo integral. Como fazê-lo é o que vai ser explicado a seguir.

91. — Definições. Se $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$ para um particular valor de x e Δx é um acréscimo arbitràriamente escolhido de x, então a diferencial de $f(x)$, que se indica pelo símbolo $df(x)$, é definida pela equação

$$(A) \qquad df(x) = f'(x)\,\Delta x = \frac{dy}{dx}\,\Delta x\,.$$

Para $f(x) = x$, temos $f'(x) = 1$ e (A) reduz-se a

$$dx = \Delta x.$$

Logo, quando x é a variável independente, a diferencial de x $(=dx)$ é igual a Δx. Portanto, pode-se escrever a equação (A) sob forma a

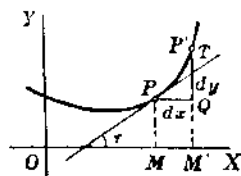
$$(B) \qquad dy = f'(x)\, dx^* = \frac{dy}{dx}\, dx\,.$$

A diferencial de uma função é igual à sua derivada multiplicada pela diferencial da variável independente.

Vejamos o significado geométrico disto.

Tracemos a curva $y = f(x)$.

Seja $f'(x)$ o valor da derivada em P.

Tomemos $dx = PQ$; então

$$dy = f'(x)\, dx = \operatorname{tg} \tau \,.\, PQ = \frac{QT}{PQ} \,.\, PQ = QT\,.$$

Logo dy, ou $df(x)$, é o acréscimo $(= QT)$ da ordenada da tangente correspondente ao acréscimo dx.

Isto dá a seguinte interpretação do símbolo da derivada como fração.

Se um acréscimo arbitràriamente escolhido da variável independente x relativo à abscissa x de um ponto $P(x, y)$ sobre a curva $y = f(x)$ é indicado com dx, então a derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg} \tau\,,$$

indica o correspondente acréscimo da ordenada da tangente em P.

Observe o estudante que a diferencial $(= dy)$ e o acréscimo $(= \Delta y)$ da função correspondentes ao mesmo valor de dx $(= \Delta x)$ não são em geral iguais. Assim, na figura, $dy = QT$ mas $\Delta y = QP'$.

---

* Em virtude da posição que a derivada $f'(x)$ ocupa em (B), costuma-se chamá-la, algumas vêzes, de coeficiente diferencial de $f(x)$.

92. — Aproximação de acréscimos por diferenciais. Pela figura do § precedente vê-se que Δy (QP' na figura) e dy ($=QT$) são aproximadamente iguais quando dx ($= PQ$) é pequeno. Portanto, quando se quer apenas um *valor aproximado* do acréscimo de uma função é mais fácil usualmente calcular o valor da correspondente diferencial e usar êste valor.

Exemplo ilustrativo 1. Achar, aproximadamente, o volume de uma coroa esférica de diâmetro exterior igual a 10 pés e de espessura igual a 1/16 de pé.

SOLUÇÃO. O volume V de uma esfera de diâmetro x é

$$V = \frac{1}{6}\pi x^3. \tag{1}$$

Òbviamente, o volume exato da coroa é a diferença ΔV entre os volumes de duas esferas com diâmtreos 10 pés e $9\frac{7}{8}$ pés, respectivamente. Como se quer apenas um valor aproximado de ΔV, podemos achar dV. De (1) e (B),

$$dV = \tfrac{1}{2}\pi x^2\,dx, \quad \text{pois} \quad \frac{dV}{dx} = \tfrac{1}{2}\pi x^2.$$

Pondo $x = 10$, $dx = -\frac{1}{8}$, obtemos $dV = 19{,}63$ polegadas cúbicas, aproximadamente, onde desprezamos o sinal que significa meramente que V decresce quando x decresce. O valor exato é $\Delta V = 19{,}4$ pol. cub. Note-se que a aproximação é acentuada porque dx é relativamente pequeno, isto é, pequeno comparado com x ($= 10$). O método não valeria a pena, do contrário.

Exemplo ilustrativo 2. Calcular tg 46°, aproximadamente, usando diferenciais, dados tg 45° = 1, sec 45° = $\sqrt{2}$, 1° = 0,01745 radiano.

SOLUÇÃO. Seja $y = \operatorname{tg} x$. Então, por (B),

$$dy = \sec^2 x\,dx. \tag{1}$$

Quando x muda para $x + dx$, y muda para $y + dy$, aproximadamente. Em (1) façamos $x = \frac{1}{4}\pi$ (45°), $dx = 0{,}0175$. Então $dy = 0{,}0350$. Como $y = \operatorname{tg} 45° = 1$, $y + dy = 1{,}0350 = \operatorname{tg} 46°$, aproximadamente. *Resp.*

(Tábuas de 4 decimais dão tg 46° = 1.0355).

93. — Erros pequenos. Uma segunda aplicação das diferenciais apresenta-se quando se quer computar pequenos erros nos cálculos.

Exemplo ilustrativo 1. Mediu-se o diâmetro de um círculo e achou-se 5,2 polegadas, com um erro máximo de 0,05 pol. Achar o máximo erro aproximado da área quando calculada pela fórmula

$$A = \tfrac{1}{4}\pi x^2 \qquad (x = \text{diâmetro})$$

SOLUÇÃO. O máximo erro exato em A é, òbviamente, a diferença (ΔA) entre o valor dado por (1) quando $x = 5{,}25$ e o valor dado por (1) quando $x = 5{,}2$ O erro aproximado é o correspondente valor de dA. Logo

$$dA = \tfrac{1}{2}\pi\,dx = \tfrac{1}{2}\pi \times 5{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}41 \text{ pol. quadr.} \tag{1}$$ ***Resp.***

Erro relativo e erro per centum. Se du é o erro em u, então

$$(2) \qquad \frac{du}{u} = \text{êrro relativo;}$$

$$(3) \qquad 100\,\frac{du}{u} = \text{êrro per centum.}$$

Por derivação logarítmica (§ 66) pode-se achar diretamente o erro relativo.

Exemplo ilustrativo. Achar os erros relativo e per centum no exemplo precedente.

SOLUÇÃO. Tomando, em (1), os logaritmos naturais,

$$\log A = \log \tfrac{1}{4}\pi + 2 \log x.$$

Derivando, $\qquad \dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{2}{x}$, e $\dfrac{dA}{A} = \dfrac{2\,dx}{x}$.

Pondo $x = 5{,}2$; $dx = 0{,}05$, achamos

Erro relativo em $A = 0{,}0192$; erro per centum $= 1{,}92\%$. *Resp.*

Os erros em cálculo considerados aqui são devidos a pequenos erros nos dados sobre os quais se basea o cálculo. Estes últimos são devidos à falta de precisão nas medidas ou podem também resultar de outras causas.

PROBLEMAS

1. Sendo A a área do quadrado de lado x, ache dA. Desenhe uma figura mostrando o quadrado, dA e ΔA. *Resp.* $dA = 2x dx$.

2. Ache uma fórmula aproximada para a área de uma coroa circular de raio r e largura dr. Qual a fórmula exata?

Resp. $dA = 2\pi r\, dr$; $\Delta A = \pi (2r + \Delta r)\, \Delta r$.

3. Quais os erros aproximados no volume e área de um cubo de aresta igual a 6 polegadas se um erro de 0,02 pol. foi feito ao se medir a aresta?

Resp. Volume, $\pm$ 2,16 pol. cub; área, $\pm$ 1,44 pol. quad.

4. As fórmulas para a área e o volume de uma esfera são, respectivamente, $A = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Mediu-se o raio e achou-se 3 polegadas. Pergunta-se: (a) qual o máximo erro aproximado

em A e V se se mediu com a aproximação de 0,01 pol.? (b) qual o máximo erro per centum em cada caso?

Resp. (a) A, $0{,}24\,\pi$ pol. quad.; V, $0{,}36\,\pi$ pol. cub.;
(b) A, $\frac{2}{3}\%$; V, 1%.

5. Mostre com o uso de diferenciais que

$$\frac{1}{x+dx} = \frac{1}{x} - \frac{dx}{x^2} \qquad \text{(aproximadamente)}$$

6. Ache uma fórmula aproximada para o volume de uma delgada coroa cilíndrica de raio r, altura h e espessura t.

Resp. $2\,\pi rht$ (t muito pequeno).

7. Deve-se construir uma caixa de forma cúbica com a capacidade de 1000 pés cub. Qual a precisão da medida da aresta interior afim de que o volume seja correto a menos de 3 pés cub.?

Resp. Erro $\leq$ 0,01 pé.

8. Se $y = x^{\frac{2}{3}}$ e o possível erro na medida de x é 0,9 quando $x = 27$, qual o erro possível no valor de y? Use este resultado para obter valores aproximados de $(27{,}9)^{\frac{2}{3}}$ e $(26{,}1)^{\frac{2}{3}}$. *Resp.* 0,2; 9,2; 8,8.

Use diferenciais para achar um valor aproximado de cada uma das seguintes expressões

9. $\sqrt{66}$. 11. $\sqrt[3]{120}$. 13. $\frac{1}{96}$. 15. $\sqrt[5]{35}$.

10. $\sqrt{98}$. 12. $\sqrt[3]{1010}$. 14. $\frac{1}{\sqrt{51}}$. 16. $\sqrt[4]{15}$.

17. Se ln 10 = 2,303, aproxime ln 10,2 por diferenciais.

Resp. 2,323.

18. Se $e^2 = 7{,}29$, aproxime $e^{2{,}1}$ por diferenciais. *Resp.* 8,13.

19. Dados sen 60° = 0,86603, cos 60° = 0,5 e 1° = 0,01745 radiano, use diferenciais para o cômputo dos valores de cada uma das expressões abaixo, com quatro decimais: (a) sen 62°; (b) cos 61°; (c) sen 59°; (d) cos 58°.

Resp. (a) 0,8835; (b) 0,4849; (c) 0,8573; (d) 0,5302.

20. O tempo de uma oscilação de um pêndulo é dado pela fórmula $t^2 = \frac{\pi^2 l}{g}$ onde t é medido em segundos, $g = 32{,}2$ e l, o comprimento do pêndulo, é medido em pés. Achar (a) o comprimento de um pêndulo oscilando uma vez por segundo; (b) a mu-

dança em t quando o pêndulo de (a) é alongado de 0,01 pé; (c) de quanto se atrazará ou se adiantará por dia um relógio com este erro.

Resp. 3,26 pés; (b) 0,00153 seg; (c) $-$ 2 min., 12 seg.

21. Com que exatidão deve ser medido o diâmetro de um círculo afim de que a área seja exata a menos de 1 por cento?

Resp. Êrro $\leq \frac{1}{2}\%$.

22. Mostre que o erro relativo no volume de uma esfera, devido a um erro na medida do diâmetro, é três vezes o erro relativo no raio.

23. Mostre que o erro relativo na n-égesima potência de um número é n vezes o erro relativo no número.

24. Mostre que o erro relativo na raiz n-egésima de um número é $1/n$ vezes o erro relativo no número.

25. Quando um bloco cúbico de metal é aquecido, cada aresta cresce 1/10 por cento por grau de aumento na temperatura. Mostrar que a superfície cresce 2/10 por cento por grau e que o volume cresce 3/10 por cento por grau.

94. — Fórmulas para achar as diferenciais das funções. Como a diferencial de uma função é igual à derivada multiplicada pela diferencial da variável independente, resulta logo que as fórmulas para achar diferenciais são as mesmas que as para achar derivadas dadas nos § § 29 e 60, se multiplicarmos cada uma delas por dx.

Isto dá

I $\qquad d(c) = 0.$

II $\qquad d(x) = dx.$

III $\qquad d(u + v - w) = du + dv - dw.$

IV $\qquad d(cv) = c\,dv.$

V $\qquad d(uv) = u\,dv + v\,du.$

VI $\qquad d(v^n) = nv^{n-1}\,dv.$

VI a $\qquad d(x^n) = nx^{n-1}\,dx.$

VII $\qquad d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$

VII a $\qquad d\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{du}{c}.$

X $\qquad d(\ln v) = \dfrac{dv}{v}.$

XI $\qquad d(a^v) = a^v \ln a\,dv.$

XI a $\qquad d(e^v) = e^v\,dv.$

XII $\qquad d(u^v) = vu^{v-1}\,du + \ln u \,.\, u^v\,dv.$

XIII $\qquad d(\text{sen } v) = \cos v\,dv.$

XIV $\qquad d(\cos v) = -\text{sen } v\,dv.$

XV $\qquad d(\text{tg } v) = \sec^2 v\,dv.$ Etc.

XX $\qquad d(\text{arc sen } v) = \dfrac{dv}{\sqrt{1-v^2}}.$ Etc.

O termo "diferenciação" é usado para indicar a operação de achar as diferenciais. Na diferenciação de uma função, acha-se a derivada desta do modo usual e depois multiplica-se-a por dx.

Exemplo ilustrativo 1. Achar a diferencial de

$$y = \frac{x+3}{x^2+3}.$$

Solução.
$$dy = d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)\,d(x+3) - (x+3)\,d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)\,dx - (x+3)\,2\,x\,dx}{(x^2+3)^2} = \frac{(3-6\,x-x^2)\,dx}{(x^2+3)^2}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Ache dy em

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Solução.
$$2\,b^2x\,dx - 2\,a^2y\,dy = 0\,.$$

$$\therefore \quad dy = \frac{b^2x}{a^2y}dx\,. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 3. Ache $d\rho$ em

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\,\theta\,.$$

Solução.
$$2\,\rho\,d\rho = -\,a^2 \text{ sen } 2\,\theta\,.\,2\,d\theta\,.$$

$$\therefore \quad d\rho = -\frac{a^2 \text{ sen } 2\,\theta}{\rho}\,d\theta. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 4. Ache $d\,[\text{arc sen } (3\,t - 4\,t^3)\,]$.

Solução. $d\,[\text{arc sen } (3\,t-4\,t^3)] = \dfrac{d\,(3\,t-4\,t^3)}{\sqrt{1-(3\,t-4\,t^3)^2}} = \dfrac{3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$ *Resp.*

PROBLEMAS

Ache a diferencial de cada uma das seguintes funções

1. $y = x^3 - 3x.$ *Resp.* $dy = 3(x^2 - 1)\,dx.$

2. $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}.$ $dy = \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\right)dx.$

3. $y = \sqrt{ax + b}.$ $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax + b}}.$

4. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}.$ $dy = \frac{(a^2 - 2x^2)\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

5. $s = ae^{bt}.$ $ds = abe^{bt}\,dt.$

6. $u = \ln cv.$ $dy = \frac{dv}{v}.$

7. $\rho = \operatorname{sen} a\theta.$ $d\rho = a\cos a\theta\, d\theta.$

8. $y = \ln \operatorname{sen} x.$ $dy = \operatorname{ctg} x\, dx.$

9. $\rho = \theta \cos\theta.$ $d\rho = (\cos\theta - \theta \operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$

10. $s = e^t \cos \pi t.$ $ds = e^t(\cos\pi t - \pi \operatorname{sen}\pi t)dt$

Achar a diferencial de cada uma das seguintes funções.

11. $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}.$

12. $u = \sqrt{e^v + 1}.$

13. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

14. $y = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$

15. $\rho = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}.$

16. $s = e^{-at}\operatorname{sen} bt.$

17. $\rho = \sqrt{\operatorname{ctg}\theta}.$

18. $y = \ln\sqrt[3]{\frac{6x - 5}{4 - 3x}}.$

19. Se $x^2 + y^2 = a^2$, mostre que $dy = -\frac{xdx}{y}.$

Ache dy em têrmos de x, y e dx de cada uma das seguintes equações.

20. $2x^2 + 3xy + 4y^2 = 20$. *Resp.* $dy = -\dfrac{(4x + 3y)\,dx}{3x + 8y}$.

21. $x^3 + 6xy^2 + 2y^3 = 10$.

22. $x + 4\sqrt{xy} + 2y = a$.

23. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

25. $x - y = e^{x+y}$.

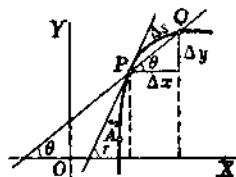
26. $\operatorname{sen}(x-y) = \cos(x+y)$.

27. A medida dos catetos de um triângulo forneceu 14,5 pés para um deles e 21,4 pés para o outro. O máximo erro em cada medida é $\pm$ 0,1 pé. Achar o máximo erro em graus no cálculo do ângulo oposto ao lado menor, usando a fórmula que dá a tangente desse ângulo.

95. — Diferencial do arco em coordenadas retangulares. Seja s o comprimento do arco AP medido de um ponto fixo A da curva. Seja Δs o acréscimo de s (= arco PQ). A demonstração a seguir pressupõe que quando Q tende a P

$$\lim \left(\frac{\text{corda } PQ}{\text{arco } PQ} \right) = 1 .$$

Da figura,

(1) $(\text{corda } PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

Multiplicando e dividindo por $(\Delta s)^2$ no primeiro membro e dividindo ambos os membros por $(\Delta x)^2$, obtemos

$$\text{(2)} \qquad \left(\frac{\text{corda } PQ}{\Delta s} \right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 .$$

Façamos agora Q tender a P; então $\Delta x \to 0$ e temos

$$\text{(3)} \qquad \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 .$$

Multiplicando ambos os membros por dx^2, obtemos

$$(C) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Ora, se extrairmos a raiz quadrada em (3) e multiplicarmos ambos os membros por dx,

$$(D) \qquad ds = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

De (C) resulta também

$$(E) \qquad ds = \left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dy\,.$$

como se vê fàcilmente.

Tôdas estas fórmulas são úteis

De (D) obtemos $ds = \sec\tau\, dx$, supondo que τ seja um ângulo agudo, pois

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\tau = \sec^2\tau\,.$$

Logo, pode-se fàcilmente demonstrar que

$$(F) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos\tau, \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\tau\,.$$

$$\left[\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \operatorname{tg}\tau\cos\tau = \operatorname{sen}\tau\right]$$

Para referência posterior, acrescentamos as fórmulas

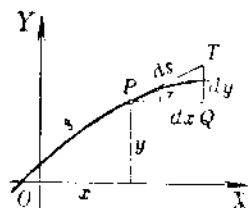
$$(G) \qquad \cos\tau = \frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{sen}\tau = \frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

onde $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Se o ângulo τ é obtuso ($y' < 0$), deve-se colocar um sinal negativo antes dos denominadores em (G) e antes de $\cos\tau$ em (F).

Na figura ao lado, $PQ = \Delta x = dx$, PT é tangente em P e τ é agudo. O ângulo PQT é reto.

Temos pois $QT = \operatorname{tg} \tau \, dx = dy$. Por § 91.

Então, $PT = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$. Por (C).

A figura ajuda a memorizar as relações acima.

A hipótese feita no princípio deste parágrafo é provada no § 99.

95. — Diferencial do arco em coordenadas polares. Das relações

$$(1) \qquad x = \rho \cos \theta \,, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

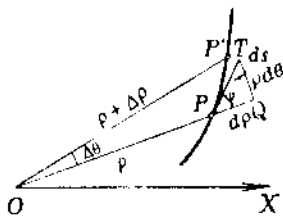
entre as coordenadas retangulares e polares de um ponto, obtemos, por V, XIII e XIV do § 94,

$$(2) \quad dx = \cos \theta \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta \, d\theta \,, \quad dy = \operatorname{sen} \theta \, d\rho + \rho \cos \theta \, d\theta \,.$$

Substituindo em (C), § 95, reduzindo e extraindo a raiz quadrada, obtemos o resultado

$$(H) \qquad ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2} \,,$$

ou, escrito de outro modo,

$$(I) \qquad ds = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \,.$$

A figura foi feita de modo que o ângulo ψ compreendido entre o raio vetor OP e a tangente PT seja agudo (§ 85) e também ρ, $\Delta\theta$ e $\Delta\rho$ $(= OP' - OP)$, positivos. Tomemos ρ como variável independente. Então, $\Delta\rho = d\rho$. No triângulo retângulo PQT, tomemos $PQ = d\rho$. Então $QT = \operatorname{tg} \psi \, d\rho$. Mas

$$\operatorname{tg} \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho} \,. \qquad \text{Por } (H), \text{ § 85.}$$

Logo $$QT = \rho \frac{d\theta}{d\rho}\, d\rho = \rho\, d\theta\,; \qquad \text{por } (B)$$

portanto $$PT = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2} = ds. \qquad \text{Por } (H)$$

Exemplo ilustrativo 1. Achar a diferencial do arco do círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

SOLUÇÃO. Derivando, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Para achar ds em termos de x substituímos em (D), obtendo

$$ds = \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{r^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{r\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Para achar ds em têrmos de y substituímos em (E), obtendo

$$ds = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{r\, dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar a diferencial do arco da ciclóide $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ em termos de θ e $d\theta$. (Ver exemplo ilustrativo 2, § 81).

SOLUÇÃO. Diferenciando,

$$dx = a(1 - \cos\theta)\, d\theta\,, \quad dy = a\, \text{sen}\,\theta\, d\theta\,.$$

Substituindo em (C),

$$ds^2 = a^2(1 - \cos\theta)^2\, d\theta^2 + a^2\, \text{sen}^2\,\theta\, d\theta^2 = 2\,a^2(1 - \cos\theta)\, d\theta^2.$$

De (5), § 2, $1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2\,\frac{1}{2}\theta$. Logo $ds = 2\,a\,\text{sen}\,\frac{1}{2}\theta\, d\theta$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 3. Achar a diferencial do arco da cardióide $\rho = a(1 - \cos\theta)$ em função de θ.

SOLUÇÃO. Diferenciando, $\dfrac{d\rho}{d\theta} = a\,\text{sen}\,\theta$.

A substituição em (I) dá

$$ds = [a^2(1 - \cos\theta)^2 + a^2\,\text{sen}^2\,\theta]^{\frac{1}{2}}\, d\theta = a(2 - 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta =$$

$$= a\left(4\,\text{sen}^2\,\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2\,a\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

PROBLEMAS

Para cada uma das curvas abaixo achar ds em termos de x e dx.

1. $2y = x^2$. *Resp.* $ds = \sqrt{1 + x^2}\, dx$.

2. $y^2 = 2\,px$. $\qquad ds = \sqrt{\dfrac{2\,x + p}{2\,x}}\,dx$.

3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\qquad ds = \sqrt{\dfrac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}}\,dx$.

4. $6\,xy = x^4 + 3$. $\qquad ds = \dfrac{(x^4 + 1)}{2\,x^2}\,dx$.

5. $y = \ln \sec x$. $\qquad ds = \sec x\,dx$.

6. $a^2y = x^3$.

7. $ay^2 = x^3$.

8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

9. $2\,y = e^x + e^{-x}$.

10. $y = \operatorname{sen} x$.

11. $y = \cos^2 x$.

Para cada uma das curvas seguintes ache ds em termos de y e dy.

12. $y^2 = 2\,px$. $\qquad$ *Resp.* $ds = \dfrac{\sqrt{y^2 + p^2}\,dy}{p}$.

13. $ay^2 = x^3$. $\qquad ds = \dfrac{\sqrt{9\,y^{\frac{2}{3}} + 4\,a^{\frac{2}{3}}}\,dy}{3\,y^{\frac{1}{3}}}$.

14. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\qquad ds = \sqrt[3]{\dfrac{a}{y}}\,dy$.

15. $a^2y = x^2$.

16. $y^2 - 2\,x - 3\,y = 0$.

17. $2\,xy^2 - y^2 - 4 = 0$.

Para cada uma das curvas abaixo ache ds, sen τ e cos τ em têrmos de t e dt,

18. $x = 2\,t + 3,\ y = t^2 - 2$.

19. $x = 3\,t^2,\ y = 2\,t^3$.

20. $x = a \operatorname{sen} t,\ y = a \cos t$.

21. $x = 4 \cos t,\ y = 3 \operatorname{sen} t$.

Para cada uma das curvas seguintes achar ds em termos de θ e $d\theta$.

22. $\rho = a \cos \theta$. $\qquad ds = a\,d\theta$.

23. $\rho = 5 \cos \theta + 12 \operatorname{sen} \theta$. $\qquad ds = 13\,d\theta$.

24. $\rho = 1 - \operatorname{sen} \theta$. $\qquad ds = \sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}\,d\theta$.

25. $\rho = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta.$

26. $\rho = 1 + \cos \theta.$

27. $\rho = \sec^2 \dfrac{\theta}{2}.$

28. $\rho = 2 - \cos \theta.$

29. $\rho = 2 + 3 \operatorname{sen} \theta.$

30. $\rho = a \cos n\theta.$

31. $\rho = 4 \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}.$

32. $\rho = \dfrac{4}{1 + \cos \theta}.$

33. $\rho = \dfrac{4}{3 - \cos \theta}.$

34. $\rho = \dfrac{4}{1 - 3 \cos \theta}.$

97. — Velocidade como rapidez de variação do arco. No estudo do movimento curvilíneo (§ 83), a velocidade v foi dada por (E),

$$(1) \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Por (C) e (D) do § 83, $\quad v_x = \dfrac{dx}{dt}, \quad v_y = \dfrac{dy}{dt}.$

Substituindo em (1), usando diferenciais e (C), § 95, obtemos

$$(2) \qquad v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada, e tomando o sinal positivo, temos

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Logo, *num movimento curvilíneo, a velocidade de um ponto móvel é a rapidez de variação do comprimento do arco da trajetória.*

Este resultado deve ser confrontado com a definição de velocidade no movimento retilíneo como a rapidez de variação da distância (§ 51).

98. — Diferenciais como infinitésimos. Em matemática aplicada a diferencial é muitas vezes tratada como infinitésimo (§ 20), isto é, como variável que tende a zero. Reciprocamente, relações

entre infinitésimos são frequentemente substituídas por relações entre diferenciais. Este "princípio da permuta" é muito útil.

Se x é a variável independente, vimos que $\Delta x = dx$ e portanto *Δx pode ser substituído por dx em qualquer equação.* Se $\Delta x \to 0$, então também $dx \to 0$. Contràriamente, Δy e dy não são, em geral, iguais. Mas, quando x tem um valor fixo e Δx ($= dx$) é um infinitésimo, então Δy também o é, e, de (B), § 91, dy também é infinitésimo. Ainda mais, é fácil provar a igualdade

$$(1) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Demonstração. Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

podemos escrever $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + i, \text{ se } \lim_{\Delta x \to 0} i = 0.$$

Daqui resulta, em virtude de (B),

$$\Delta y = dy + i\,\Delta x$$

Dividindo ambos os membros por Δy e trazendo o último têrmo para o primeiro membro,

$$\frac{dy}{\Delta y} = 1 - i\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Logo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{dy}{\Delta y} = 1$, ou também $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$. Q.E.D.

Damos agora, sem demonstração, o

Teorema da substituição. *Em problemas que envolvam sòmente razões entre infinitésimos simultâneos, isto é, funções que tendem a zero quando a variável independente tende a um mesmo valor, pode-se substituir um infinitésimo por outro simultâneo sempre que este e o o primeiro sejam tais que o limite da razão entre eles iguale* 1.

Pelo teorema acima, Δy pode ser substituído por dy e, em geral, todo acréscimo pela correspondente diferencial.

Numa equação que seja homogênea em infinitésimos, o teorema acima é de fácil aplicação.

Exemplo ilustrativo 1. Por (5), p. 3, se $x = \frac{1}{2}i$, $1 - \cos i = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$. Seja i um infinitésimo. Então, por (*B*), § 68, sen i pode ser substituído por i, $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$ por $\frac{1}{4} i^2$ e por conseguinte $1 - \cos i$ por $\frac{1}{2} i^2$. Também tg i ($=$ sen i/cos i) pode ser substituída por i.

Exemplo ilustrativo 2. Em (1), § 95, todas as grandezas são infinitésimos, se $\Delta x \to 0$. A equação é homogênea, sendo cada termo do segundo grau. Pelo teorema, podemos substituir os infinitésimos como segue:

Corda PQ por arco $PQ = \Delta s$ e Δs por ds; Δy por dy; Δx por dx. Então (1) torna-se $ds^2 = dx^2 + dy^2$, isto, é (*C*).

99.—Ordem de infinitésimos. Diferenciais de ordem superior. Sejam i e j infinitésimos simultâneos, isto é, funções que tendem a zero quando x tende a um certo valor $x = a$. Seja também

$$\lim_{x \to a} \frac{j}{i} = L.$$

Se $L \neq 0$, diz-se que i e j *têm a mesma ordem.*

Se $L = 0$, diz-se que j é de *ordem superior a i.*

Se $L = \infty$, diz-se que j é de *ordem inferior a i.*

Seja $L = 1$. *Então $j - i$ é de ordem superior a i.*

$$\left[\lim \left(\frac{j - i}{i}\right) = \lim \left(\frac{j}{i} - 1\right) = \lim \frac{j}{i} - 1 = 0\right].$$

A recíproca também vale. Neste caso ($L = 1$), diz-se que j *difere de i por um infinitésimo de ordem superior*.

Por exemplo, dy e Δx são de mesma ordem se $f'(x)$ é diferente de zero e de infinito, pois Δy e Δx são, com a hipótese feita, de mesma ordem, mas $\Delta y - dy$ é de ordem superior a Δx. Por esta razão, dy diz-se "parte principal de Δy". Òbviamente, potências de um infinitésimo i são de ordem superior a i.

Exemplo ilustrativo. Prove a hipótese do § 95,

$$\lim \frac{\text{corda } PQ}{\text{arco } PQ} = 1.$$

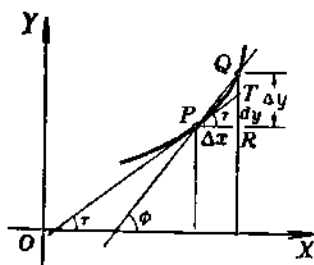
Solução. Da figura resulta, por geometria,

$$\text{corda } PQ < \text{arco } PQ < PT + TQ.$$

Portanto, dividindo,

$$1 < \frac{\text{arco } PQ}{\text{corda } PQ} < \frac{PT}{\text{corda } PQ} + \frac{TQ}{\text{corda } PQ}.$$

Mas, corda $PQ = \sec\phi\,\Delta x$, $PT = \sec\,\tau\,\Delta x$,

$$TQ = \Delta y - dy;$$

logo

$$\frac{PT}{\text{corda } PQ} = \frac{\sec\tau}{\sec\phi}, \quad \frac{TQ}{\text{corda } PQ} = \cos\phi\,\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}.$$

Portanto

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{PT}{\text{corda } PQ}\right) = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{TQ}{\text{corda } PQ}\right) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\text{arco } PQ}{\text{corda } PQ}\right) = 1.$$

Diferenciais de ordem superior. Seja $y = f(x)$. A equação

$$d^2y = f''(x)\,\Delta x^2 = y''\,\Delta x^2$$

define a *diferencial segunda de y*. Se $y'' \neq 0$ e $\neq \infty$, d^2y é de mesma ordem que Δx^2, e portanto de ordem superior a dy. Semelhantemente, podem ser definidos $d^3y, \ldots, d^ny$.

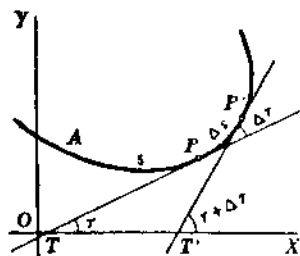
PROBLEMA

Num triângulo ABC os lados a, b e c são infinitésimos simultâneos e c é de ordem superior a b. Prove que $\lim \dfrac{a}{b} = 1$.

CAPÍTULO X

CURVATURA. RAIO E CÍRCULO DE CURVATURA

100. — Curvatura. No § 55 estudamos o comportamento da concavidade de uma curva. Vimos que ela depende da *velocidade de direção da curva.* Esta velocidade chama-se, quando calculada num dado ponto da curva, *curvatura da curva no ponto* e se indica por K. Vejamos a sua expressão matemática

Na figura, P' é um ponto da curva próximo do ponto P, onde vamos calcular K. Quando P descreve o arco PP' ($= \Delta s$), a tangente PT varia, tomando a posição $P'T'$ quando P está sôbre P'. Portanto, o ângulo τ que a tangente PT faz com OX recebe um acréscimo $\Delta\tau$ quando P passa a P'. Pois bem, por definição

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \textit{curvatura média do arco } PP'.$$

A curvatura em P ($= K$) *é o limite da curvatura média quando* P' *tende a* P*, movendo-se sôbre a curva,* isto é,

$$\text{(A)} \qquad K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} = \textit{curvatura em } P.$$

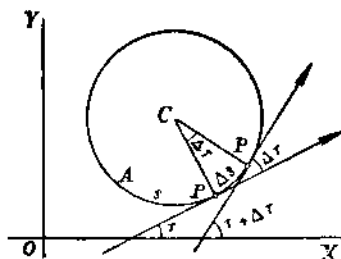
Formalmente, a curvatura é a *velocidade de variação da inclinação em relação ao arco* (confronte § 50).

Como o ângulo $\Delta\tau$ é medido em radianos e o comprimento do arco Δs em unidades de comprimento, resulta que *a unidade de curvatura num ponto é um radiano por unidade de comprimento.*

101. — Curvatura de um círculo.

TEOREMA. *A curvatura de um círculo num ponto qualquer é o recíproco do raio e, portanto, é a mesma em todos os pontos.*

DEMONSTRAÇÃO. O ângulo $\Delta\tau$, da figura, compreendido entre as tangentes em P e em P' é igual ao ângulo cêntrico PCP' compreendido entre os raios CP e CP'. Logo.

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\text{âng. } PCP'}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

pois o ângulo PCP' é medido em radianos, isto é, a curvatura média do arco PP' é igual a uma constante. Fazendo $\Delta s \to 0$, temos o resultado desejado.

Do ponto de vista da curvatura, o círculo é a mais simples das curvas, pois que se encurva com velocidade de curvatura uniforme. Òbviamente, a curvatura de uma reta é zero em todos os pontos.

102. — Fórmulas para a curvatura, coordenadas retangulares.

TEOREMA. *Quando a equação de uma curva é dada em coordenadas retangulares, então*

$$(B) \qquad K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

onde y' e y'' são, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de y em relação a x.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\tau = \text{arc tg } y'$ $\qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$

temos, derivando,

$$(1) \qquad \frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}. \qquad \text{Por XXII, § 60}$$

Mas

$$(2) \qquad \frac{ds}{dx} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{Por (3), § 95}$$

Dividindo (1) por (2), obtemos (*B*). Q.E.D.

EXERCÍCIO. Se y for a variável independente, mostre que

$$(C) \qquad K = \frac{-x''}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

onde x' e x'' são, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de x em relação a y.

A fórmula (*C*) é usada nos casos em que a derivação em relação a y é mais simples. A fórmula (*B*) não vale quando y' é infinita, isto é, quando a tangente em P é vertical. Neste caso, usa-se também, a (*C*), que fornece

$$x' = 0 \quad \text{e} \quad K = -x''.$$

Sinal de K. Escolhendo o sinal positivo no denominador de (*B*), vemos que K e y'' tem sinais iguais, isto é, K é positivo ou negativo, segundo a curva é côncava para cima ou para baixo.

Exemplo ilustrativo 1. Achar a curvatura da parábola $y^2 = 4x$ (*a*) no ponto (1, 2,), (*b*) no vértice.

SOLUÇÃO. $$y' = \frac{2}{y}, \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{y}\right) = -\frac{2y'}{y^2}$$

(*a*) Quando $x = 1$ e $y = 2$, temos $y' = 1$, $y'' = -\frac{1}{2}$. Substituindo em (*B*), $K = -\frac{1}{8}\sqrt{2} = -0{,}177$. Logo, em (1, 2) a curva é côncava para baixo e a inclinação da tangente varia na razão de 0,177 radiano por unidade de arco. Como 0,177 radiano = 10°7′, o ângulo entre as tangentes em P (1, 2) e num ponto Q, tal que arco $PQ = 0{,}1$ unidade, é aproximadamente 1°.

(*b*) No vértice (0, 0), y' é infinita. Logo, usa-se (*C*).

$$x' = \frac{1}{2}y, \quad x'' = \frac{1}{2}\frac{dy}{dy} = \frac{1}{2}. \quad K = -\frac{1}{2}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar K para a ciclóide (V. § 81).

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$

Solução. No exemplo ilustrativo 2, § 81, achamos

$$y' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Logo $$1 + y'^2 = \frac{2}{1 - \cos\theta}.$$

No exemplo ilustrativo do § 82 mostrou-se também que

$$y'' = -\frac{1}{a(1 - \cos\theta)^2}.$$

Substituindo em (B),

$$K = -\frac{1}{2a\sqrt{2 - 2\cos\theta}} = -\frac{1}{4a\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}. \quad \textit{Resp.}$$

103. — Fórmula especial para equações paramétricas. Da equação (A), § 81, temos, por derivação

$$(1) \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Logo, usando (B), § 82, substituindo em (B), § 102, e reduzindo, obtemos

$$(D) \qquad K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

onde as linhas indicam derivadas em relação a t, isto é,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

A fórmula (D) é cômoda, mas é melhor muitas vezes proceder como no exemplo ilustrativo 2, § 102, achando y' como no § 81, y'' como no § 82, e substituindo diretamente em (B).

104. — Fórmula para a curvatura; coordenadas polares.

TEOREMA. Quando a equação de uma curva é dada em coordenadas polares,

$$(E) \qquad K = \frac{\rho^2 + 2\,\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

onde ρ' e ρ'' são, respectivamente, as derivadas primeira e segunda de ρ em relação a θ.

DEMONSTRAÇÃO. Por (I), § 85, $\tau = \theta + \psi$.

Logo

$$(1) \qquad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 + \frac{d\psi}{d\theta}.$$

Por (H), § 85, $\qquad \psi = \text{arc tg}\,\frac{\rho}{\rho'}.$

Logo $\qquad \dfrac{d\psi}{d\theta} = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2}.$

Consequentemente, por (1),

$$(2) \qquad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

De (I), § 96,

$$(3) \qquad \frac{ds}{d\theta} = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dividindo (2) por (3), obtém-se (E) Q.E.D.

Exemplo ilustrativo. Achar a curvatura da espiral logarítmica $\rho = e^{a\theta}$ num ponto qualquer.

SOLUÇÃO. $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho' = ae^{a\theta} = a\rho\,; \quad \dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho'' = a^2e^{a\theta} = a^2\rho\,.$

Substituindo em (E), $K = \dfrac{1}{\rho\sqrt{1 + a^2}}$. *Resp.*

105. — Raio de curvatura. O raio de curvatura R num ponto de uma curva é igual ao recíproco da curvatura nesse ponto. Logo, de (B),

$$(F) \qquad R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Exemplo ilustrativo. Achar o raio de curvatura num ponto qualquer da catenária $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (figura no capítulo XXVI).

SOLUÇÃO. $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $y'' = \dfrac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \dfrac{y}{a^2}$.

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2} \quad \therefore \quad R = \frac{y^2}{a}.$$

Resp.

106. — Curvas de transição (estradas). As curvas nas estradas devem ser construídas de modo a permitirem uma passagem suave de um trecho em linha reta para outro de direção diferente, afim de ser possível o uso das mesmas com velocidade razoável. Além de tornar gradativa a mudança de curvatura, os engenheiros fazem uso de *curvas de transição* para ligar as partes retas do trajeto. Estas curvas devem ter curvatura nula nos pontos de junção. Geralmente, empregam-se para este fim arcos de parábolas cúbicas.

Exemplo ilustrativo. Uma curva de transição numa estrada tem a forma de um arco da parábola cúbica $y = \frac{1}{3}x^3$. Com que rapidez muda de direção um carro que percorre este trecho da estrada, quando passa (a) pelo ponto $(3,9)$? (b) pelo ponto $(2, \frac{8}{3})$? (c) pelo ponto $(1, \frac{1}{3})$? (A unidade de comprimento é uma milha).

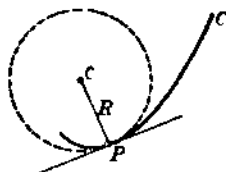
SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = x^2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x$.

Substituindo em (B), $K = \dfrac{2x}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}$.

(a) Em (3,9), $K = \frac{6}{(82)^{3/2}}$ radiano por milha = 28′ por milha. *Resp.*

(b) Em $(2, \frac{8}{3})$, $K = \frac{4}{(17)^{3/2}}$ radiano por milha = 3°16′ por milha. *Resp.*

(c) Em $(1, \frac{1}{3})$, $K = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ radiano por milha = 40° 30′ por milha. *Resp.*

107. — Círculo de curvatura. Consideremos um ponto P da curva C. A tangente à curva em P tem o mesmo coeficiente angular que a curva em P (§ 42). Podemos também construir, em cada ponto da curva, um círculo tangente cuja curvatura seja a mesma que a da própria curva no ponto. Para isto, procedemos como segue. Traçamos a normal à curva em P, do lado côncavo da curva. Sobre ela marcamos um ponto c tal que distância Pc = raio de curvatura (= R) em P. Com c como centro desenhamos um círculo passando por P. A curvatura deste círculo é então

$$K = \frac{1}{R},$$

isto é, a curvatura do círculo é igual a da curva em P. O círculo assim construído chama-se *círculo de curvatura* no ponto P da curva.

Em geral, o círculo de curvatura de uma curva num ponto corta a curva no ponto. Isto está ilustrado pela figura acima. (confronte com a tangente num ponto de inflexão (§ 57)).

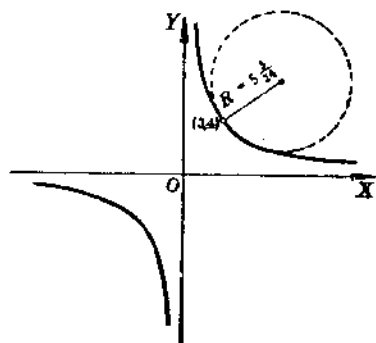
Assim como a tangente em P mostra a direção da curva em P, o círculo de curvatura em P ajuda-nos a, materialmente, formar uma idéia geométrica da curvatura da curva em P, pois são iguais em P as velocidades de variação da direção da curva e da direção do círculo.

Num próximo parágrafo (§ 114), o círculo de curvatura será definido como a posição limite de um círculo secante, uma definição análoga à de tangente dada no § 28.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o raio de curvatura no ponto (3, 4) da hipérbole equilátera $xy = 12$ e traçar o correspondente círculo de curvatura.

SOLUÇÃO. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$

Para (3, 4), $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}$. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{9}$

$$R = \frac{\left[1 + \frac{16}{9}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{8}{9}} = \frac{125}{24} = 5\tfrac{5}{24}$$

O círculo de curvatura cruza a curva em dois pontos

Exemplo ilustrativo 2. Achar R em (2, 1) para a hipérbole

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = 10.$$

SOLUÇÃO. Derivando, tomando y como função implícita de x, obtemos

$$x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0.$$

Derivando de novo, tomando y e y' como funções implícitas de x, obtemos

$$1 + 4y' - 2y'^2 + 2(x - y)y'' = 0.$$

Substituindo os valores dados $x = 2$, $y = 1$, achamos $y' = -2$, $y'' = \frac{15}{2}$.

Logo, por (F), $R = \frac{2}{3}\sqrt{5}$. *Resp.*

O método deste exemplo (precisamente, tomar y e y' como funções implícitas de x) é usado, de preferência, quando se quer sòmente os valores numéricos de y' e y'' e não expressões gerais para eles em têrmos de x e y.

PROBLEMAS

Ache o raio de curvatura de cada uma das curvas seguintes, no ponto indicado. Trace a curva e o correspondente círculo de curvatura.

1. $2y = x^2$; (0, 0). *Resp.* $R = 1$.

2. $6y = x^3$; $(2, \frac{4}{3})$. $R = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

3. $y^2 = x^3$; $(1, 1)$. $R = \frac{13}{6}\sqrt{13}$,

4. $y = \operatorname{sen} x$; $(\frac{1}{2}\pi, 1)$, $R = 1$.

5. $y = e^x$; $(0, 1)$. $R = 2\sqrt{2}$.

6. $x^2 - 4y^2 = 9$; $(5, 2)$.

7. $y^2 = x^3 + 8$; $(1, 3)$.

8. $y = 2 \operatorname{sen} 2x$; $(\frac{1}{4}\pi, 2)$.

9. $y = \operatorname{tg} x$; $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

Calcule o raio de curvatura no ponto (x_1, y_1) de cada uma das curvas abaixo.

10. $y = x^3$. *Resp.* $R = \dfrac{(1 + 9x_1^4)^{\frac{3}{2}}}{6x_1}$.

11. $y^2 = 2px$.

12. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. $R = \dfrac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$.

13. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

14. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. $R = \dfrac{2(x_1 + y_1)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$.

15. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $R = 3(ax_1y_1)^{\frac{1}{3}}$.

16. $x = r \operatorname{arc\,vers} \dfrac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$. $R = 2\sqrt{2ry_1}$.

17. $y = \ln \sec x$. $R = \sec x_1$.

18. Se o ponto de contato da tangente em (2, 4) à parábola $y^2 = 8x$ move-se ao longo da curva uma distância $\Delta s = 0{,}1$, sob que ângulo, aproximadamente, dará a tangente uma volta? (Use diferenciais).

19. A inclinação da curva $27y = x^3$ no ponto $A\,(3, 1)$ é 45°. Use diferenciais para achar aproximadamente a inclinação da curva no ponto B da curva tal que a distância, ao longo da curva, entre A e B seja $\Delta s = 0{,}2$ unidades.

Calcule o raio de curvatura no ponto (ρ_1, θ_1) de cada uma das curvas abaixo.

20. O círculo $\rho = a \operatorname{sen}\theta$. *Resp.* $R = \frac{1}{2} a$.

21. A espiral de Arquimedes $\rho = a\theta$. $R = \dfrac{(\rho_1^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2 + 2a^2}$.

22. A cardióide $\rho = a(1 - \cos\theta)$. $R = \frac{2}{3}\sqrt{2a\rho_1}$.

23. A lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. $R = \dfrac{a^2}{3\rho_1}$.

24. A parábola $\rho = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$. $R = 2a \sec^3 \frac{1}{2}\theta_1$.

25. A curva $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$. $R = \frac{3}{4} a \operatorname{sen}^2 \frac{1}{3}\theta_1$.

26. A trissetriz $\rho = 2a\cos\theta - a$. $R = \dfrac{a(5 - 4\cos\theta_1)^{\frac{3}{2}}}{9 - 6\cos\theta_1}$.

27. A hipérbole equilateral $\rho^2 \cos 2\theta = a^2$. $R = \dfrac{\rho_1^3}{a^2}$.

28. A cônica $\rho = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$. $R = \dfrac{a(1-e^2)(1 - 2e\cos\theta_1 + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e\cos\theta_1)^3}$.

Achar o raio de curvatura de cada uma das curvas abaixo, no ponto indicado. Desenhar a curva e o correspondente círculo de curvatura.

29. $x = 2t,\ y = t^2 - 1;\ t = 1$. *Resp.* $R = 4\sqrt{2}$.

30. $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3;\ t = 1$. $R = 6$.

31. $x = 2e^t,\ y = 2e^{-t};\ t = 0$. $R = 2\sqrt{2}$.

32. $x = a\cos t,\ y = a \operatorname{sen} t;\ t = t_1$. $R = a$.

33. $x = 2t,\ y = \dfrac{4}{t};\ t = 1$.

34. $x = t^2 + 1,\ y = t^3 - 1;\ t = 1$.

35. $x = 4\cos t,\ y = 2\operatorname{sen} t;\ y = 1$.

36. $x = 2\operatorname{sen} t,\ y = \cos 2t;\ t = \frac{1}{6}\pi$.

37. $x = \operatorname{tg} t,\ y = \operatorname{ctg} t;\ t = \frac{1}{4}\pi$.

38. $x = t - \operatorname{sen} t,\ y = 1 - \cos t;\ t = \pi$.

39. Achar o raio de curvatura no ponto $t = t_1$ da hipociclóide $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

Resp. $R = 3a \operatorname{sen} t_1 \cos t_1$.

40. Achar o raio de curvatura no ponto $t = t_1$ da involuta do círculo

$$x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t),$$

$$y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t).$$ *Resp.* $R = at_1$.

41. Achar o ponto da curva $y = e^x$ onde a curvatura é máxima.

Resp. $x = -0{,}347$.

42. Achar os pontos da curva $3y = x^3 - 2x$ onde a curvatura é máxima.

Resp. $x = \pm 0{,}931$.

43. Mostrar que o raio de curvatura é infinito num ponto de inflexão.

44. Dada a curva $y = 3x - x^3$,

(a) Achar o raio de curvatura no ponto máximo da curva (cuja ordenada é máxima) e desenhar o correspondente círculo de curvatura.

(b) Provar que o ponto máximo da curva não é o ponto de máxima curvatura.

(c) Achar a menos de centésimos a abscissa do ponto de máxima curvatura. *Resp.* $x = 1{,}01$.

45. Achar o raio de curvatura em cada ponto máximo ou mínimo da curva $y = x^4 - 2x^2$. Desenhar a curva e os círculos de curvatura. Achar os pontos da curva onde o raio de curvatura é mínimo.

46. Mostrar que num ponto de mínimo raio de curvatura, sôbre a curva $y = f(x)$, tem-se

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \frac{d^3y}{dx^3}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

47. Mostrar que a curvatura da parábola cúbica $3a^2y = x^3$ cresce de zero a um máximo quando x cresce de zero a $\frac{1}{5}a\sqrt[4]{125}$. Achar o mínimo valor do raio de curvatura. *Resp.* $0{,}983\,a$.

108. — Centro de curvatura. A tangente em $P(x, y)$ a uma curva $y = f(x)$ tem a propriedade de serem x, y e y' iguais em P para a tangente e para a curva. O círculo de curvatura em P tem uma propriedade semelhante; precisamente, x, y, y' e y'' tem os mesmos valores em P para o círculo de curvatura e para a curva.

DEFINIÇÃO. *O centro de curvatura* (α, β) *em um ponto* $P(x, y)$ *sobre a curva é o centro do círculo de curvatura.*

Teorema. *As coordenadas* α, β *do centro de curvatura em* $P(x, y)$ são

$$(G) \qquad \alpha = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{(1 + y'^2)}{y''}.$$

DEMONSTRAÇÃO. A equação do círculo de curvatura é

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

onde R é dado por (F). Derivando (1),

$$(2) \qquad y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}, \quad y'' = -\frac{R^2}{(y - \beta)^3}.$$

Da segunda destas equações, obtemos, substituindo o valor de R dado por (F).

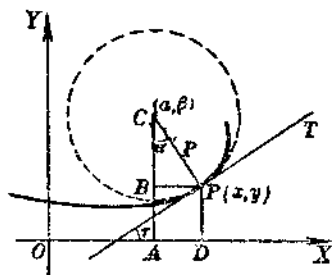
$$(3) \qquad (y - \beta)^3 = -\frac{(1 + y'^2)^3}{y''^3} \quad \therefore \quad y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Da primeira das equações (2) obtemos, usando (3),

$$(4) \qquad x - \alpha = -y'(y - \beta) = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}.$$

Achando β em (3), α em (4), obtemos (G), Q.E.D.

EXERCÍCIO 1. Calcule (G) diretamente da figura, usando (G), §95, ($\alpha = x - R \operatorname{sen} \tau$, $\beta = y + \cos \tau$, etc.).

EXERCÍCIO 2. Se x' e x'' são, respectivamente, a derivada primeira

e segunda de x em relação a y, deduza (G) sob a forma

$$(H) \qquad \alpha = x + \frac{1 + x'^2}{x''}, \quad \beta = y - \frac{x'(1 + x'^2)}{x''}.$$

As fórmulas (H) podem ser usadas quando y' é infinita ou a derivação em relação a y é mais simples.

Exemplo ilustrativo. Achar as coordenadas do centro de curvatura da parábola $y^2 = 4\,px$ correspondente (a) a um ponto qualquer da curva; (b) ao vértice.

Solução. Usando (H), temos $x' = \dfrac{y}{2\,p}$, $x'' = \dfrac{1}{2\,p}$.

Logo $\qquad \alpha = x + \dfrac{y^2 + 4\,p^2}{2\,p} = 3\,x + 2\,p,$

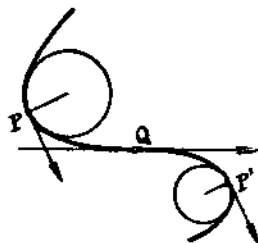
$$\beta = y - \frac{y\,(y^2 + 4\,p^2)}{4\,p^2} = -\frac{y^3}{4\,p^2}.$$

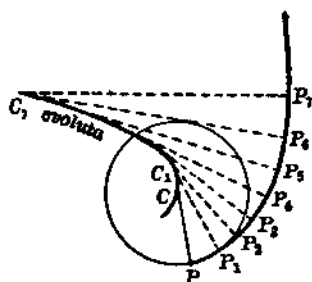
Portanto (a) $\left(3\,x + 2\,p,\ -\dfrac{y^3}{4\,p^2}\right)$ é o centro de curvatura correspondente a um ponto qualquer da curva.

(b) $(2\,p, 0)$ é o centro de curvatura correspondente ao vértice $(0, 0)$.

Sabemos, pelo § 57, que num ponto de inflexão (como Q na figura abaixo).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Logo, por (B), § 102, a curvatura $K = 0$; por (F), § 105, e (G), § 108, vemos que, em geral, α, β e R crescem indefinidamente quando a derivada segunda tende a zero, a menos que a tangente seja vertical, isto é, supondo que P se move com a tangente ao longo da curva até P', no ponto de inflexão Q a curvatura é zero, pára momentâneamente a rotação da tangente e como a direção desta rotação muda, o centro de curvatura se distancia indefinidamente e, portanto, o raio de curvatura tende ao infi-nito.

109. — Evolutas. O lugar dos centros de curvatura de uma dada curva chama-se a *evoluta* da curva. Consideremós o círculo de curvatura em um ponto P da curva. Se P

se move sobre a curva, podemos supor o correspondente círculo de curvatura rolando sobre a curva com o ponto, com o seu raio variando de modo a ser sempre igual ao raio de curvatura da curva no ponto P. A curva CC_7 descrita pelo centro do círculo é a evoluta de PP_7.

As fórmulas (G) e (H), § 108, dão as coordenadas α, β de um ponto qualquer da evoluta em termos das coordenadas x, y do correspondente ponto sobre a curva. Mas y é uma função de x; logo, estas fórmulas dão logo *as equações paramétricas da evoluta em termos do parametro* x.

Para achar a equação retangular da evoluta, eliminamos x e y entre as duas expressões e a equação dada da curva. Não existe um processo de eliminação que possa ser aplicado em todos os casos, dependendo o método a ser adotado da forma da dada equação. Num grande número de casos, contudo, o leitor pode achar a equação retangular da evoluta seguindo os passos abaixo.

Primeiro Passo. *Ache* α *e* β *de* (G) *ou* (H), § 108.

Segundo Passo. *Ache* x *e* y *em têrmos de* α *e* β *nas duas equações obtidas.*

Terceiro Passo. *Substitua estes valores de* x *e* y *na dada equação e reduza. Isto dá uma relação entre as variáveis* α *e* β, *que é a equação da evoluta.*

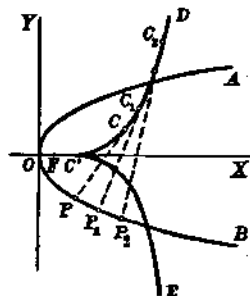
Exemplo ilustrativo 1. Achar a equação da evoluta da parábola $y^2 = 4\,px$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,p}{y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4\,p^2}{y^3}$,

Primeiro passo. $\alpha = 3\,x + 2\,p$, $\beta = -\dfrac{y^3}{4\,p^2}$.

Segundo passo. $$x = \frac{\alpha - 2\,p}{3},$$

$$y = -\,(4\,p^2\beta)^{\frac{1}{3}}$$

Terceiro passo. $$(4\,p^2\beta)^{\frac{2}{3}} = 4\,p\left(\frac{\alpha - 2\,p}{3}\right)$$

ou $$p\beta^2 = \frac{4}{27}\,(\alpha - 2\,p)^3.$$

Lembrando que α denota a abscissa e β a ordenada de um sistema de coordenadas retangulares, vemos que a evoluta da parábola AOB é a parábola semi-cúbica $DC'E$, sendo C', C, C_1, C_2 os centros de curvatura, respectivamente, em O, P, P_1, P_2.

Exemplo ilustrativo 2. Achar a equação da evoluta da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2\,b^2$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}$

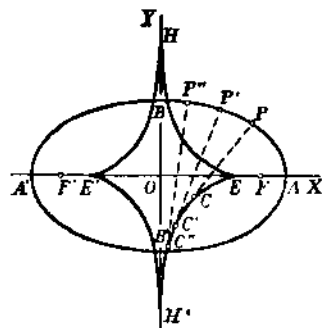
Primeiro passo. $$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)\,x^3}{a^4}$$

$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)\,y^3}{b^4}$$

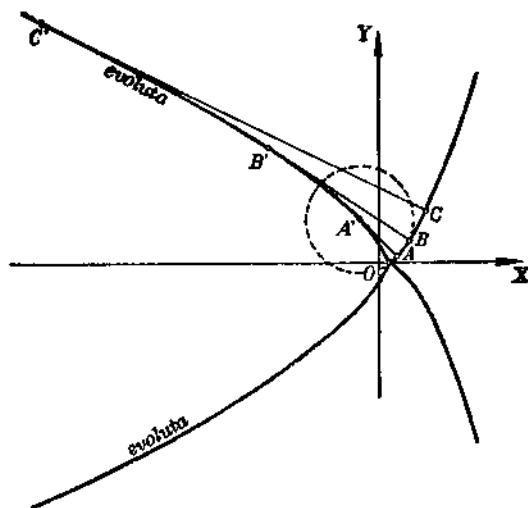
Segundo passo. $$x = \left(\frac{a^4\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$y = -\left(\frac{b^4\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Terceiro passo. $$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

equação da evoluta $EHE'H'$ da elipse $ABA'B'$. E, E', H', H são os centros de curvatura correspondentes aos pontos A, A', B, B' da curva e C, C', C'' correspondem aos pontos P, P', P''.

Exemplo ilustrativo 3. As equações paramétricas de uma curva são:

$$(1) \qquad x = \frac{t^2 + 1}{4},\quad y = \frac{t^3}{6}$$

Ache a equação da evoluta em forma paramétrica, desenhe a curva e a evoluta, ache o raio de curvatura no ponto onde $t = 1$ e trace o correspondente círculo de curvatura.

SOLUÇÃO. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{2}, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t^2. \quad \therefore \quad y' = t$ Por (*A*), § 81.

$\dfrac{dy'}{dt} = 1 \quad \therefore \quad y'' = \dfrac{2}{t}.$ Por (*B*), § 82.

Substituindo em (*G*) e reduzindo, temos

(2) $$\alpha = \frac{1 - t^2 - 2t^4}{4}, \qquad \beta = \frac{4t^3 + 3t}{6},$$

que são as equações paramétricas da evoluta. Dando valores ao parâmetro t calculamos x, y de (1) e α, β de (2), tabulando os resultados.

t	x	y	α	β
-3	$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$		
-2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{35}{4}$	$-\frac{19}{3}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{13}{16}$	$-\frac{9}{16}$	$-\frac{91}{32}$	-3
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{6}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{9}{16}$	$-\frac{91}{32}$	3
2	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{35}{4}$	$\frac{19}{3}$
3	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$		

Desenhemos a curva e a sua evoluta.

O ponto $(\frac{1}{4}, 0)$ é comum à curva e à evoluta. A curva (parábola semi-cúbica) está inteiramente a direita e a evoluta inteiramente a esquerda de $x = \frac{1}{4}$.

O círculo de curvatura em $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$, onde $t = 1$, terá o centro em $A'\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$ sôbre a evoluta e raio $= AA'$. Para uma verificação, achemos o raio de curvatura em A. De (*F*), § 105, obtemos

$$R = \frac{t(1 + t^2)^{3/2}}{2} = \sqrt{2} \text{ quando } t = 1.$$

Isto deve ser igual à distância.

$$AA' = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}-\frac{7}{7}\right)^2} = \sqrt{2} \qquad \text{Por (1), § 3.}$$

Exemplo ilustrativo 4. Achar as equações paramétricas da evoluta da ciclóide

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a\,(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a\,(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solução. Como no exemplo ilustrativo do § 82, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\,(1-\cos t)^2}.$$

Substituindo estes resultados nas fórmulas (*G*), § 108, obtemos

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = a\,(t + \operatorname{sen} t), \\ \beta = -a\,(1 - \cos t). \quad \textit{Resp.} \end{cases}$$

Nota. Se eliminarmos t nas equações (4), resultará a equação retangular da evoluta $OO'Q^v$ referida aos eixos $O'\alpha$ e $O'\beta$. As coordenadas de O em relação a estes eixos são $(-\pi a, -2a)$. Transformemos as equações (4) mudando as coordenadas e usando OX, OY como novos eixos. Então

$$\alpha = x - \pi a, \qquad \beta = y - 2a.$$

Seja também $t = t' - \pi$.

Substituindo em (4) e reduzindo, as equações da evoluta tornam-se

$$(5) \qquad \begin{cases} x = a\,(t' - \operatorname{sen} t'), \\ y = a\,(1 - \cos t'). \end{cases}$$

Como (5) e (3) são idênticas em forma, temos

A evoluta de uma ciclóide é também uma ciclóide cujo círculo gerador é igual ao da ciclóide dada.

110. — Propriedades da evoluta. A evoluta tem duas propriedades interessantes.

Teorema 1. *A normal em um ponto $P(x, y)$ de uma curva é tangente à evoluta no centro de curvatura $C(\alpha, \beta)$ de P. (Ver figuras no parágrafo precedente).*

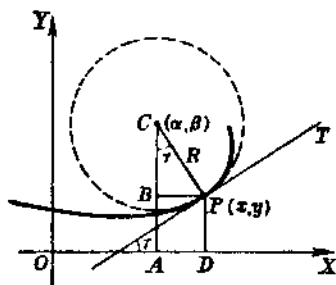
DEMONSTRAÇÃO. Da figura,

$$(1) \qquad \alpha = x - R \operatorname{sen} \tau, \qquad \beta = y + R \cos \tau.$$

A reta PC está sobre a normal em P e

(2) Coeficiente angular de

$$PC = \frac{y-\beta}{x-\alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \tau}$$

= coeficiente angular da normal em P.

Vamos mostrar que o coeficiente angular da evoluta é igual ao coeficiente angular de PC. Notemos que

$$\text{coeficiente angular da evoluta} = \frac{d\beta}{d\alpha},$$

pois α e β são as coordenadas retangulares de um ponto qualquer da evoluta.

Escolhamos como variável independente o comprimento do arco da dada curva; então, x, y, R, τ, α e β são funções de s. Derivando (1) em relação a s obtemos

$$(3) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - R \cos \tau \frac{d\tau}{ds} - \operatorname{sen} \tau \frac{dR}{ds},$$

$$(4) \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - R \operatorname{sen} \tau \frac{d\tau}{ds} + \cos \tau \frac{dR}{ds}.$$

Mas $\frac{dx}{ds} = \cos \tau$, $\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \tau$, pelo § 95; e $\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}$.

Substituindo em (3) e (4) e reduzindo, obtemos

$$(5) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = -\operatorname{sen} \tau \frac{dR}{ds}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \cos \tau \frac{dR}{ds}.$$

Dividindo a segunda equação em (5) pela primeira, temos

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\operatorname{ctg}\tau = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = \text{coeficiente angular de } PC.$$

Q.E.D.

Teorema 2. *O comprimento de um arco da evoluta de uma curva é igual à diferença entre os raios de curvatura da dada curva nos pontos em que ela encontra as tangentes às extremidades do arco da evoluta, posto que ao longo do arco da dada curva, R cresça ou decresça.*

DEMONSTRAÇÃO. Quadrando as equações (5) e somando, obtemos

$$(7) \qquad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Mas, se s' = comprimento do arco da evoluta,

$$ds'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

por (*C*), § 95, sendo $s = s'$, $x = \alpha$, $y = \beta$. Logo, (7) afirma que

$$(8) \qquad \left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2, \quad \text{ou} \quad \frac{ds'}{ds} = \pm\frac{dR}{ds}.$$

Limitando-nos a um arco da dada curva para o qual o segundo membro não muda de sinal, podemos escrever

$$(9) \qquad \frac{ds'}{dR} = +1 \quad \text{ou} \quad \frac{ds'}{dR} = -1.$$

Em outras palavras, *a velocidade de variação do arco da evoluta em relação a R é* $+1$ ou -1. Logo, pelo § 50, acréscimos correspondentes de s' e R são iguais em valor absoluto, ou seja,

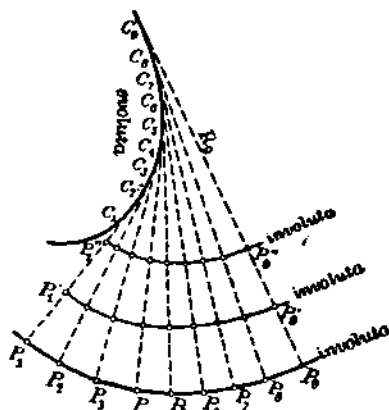
$$(10) \qquad s' - s'_0 = \pm(R - R_0),$$

ou (ver figura, p. 195) arco $CC_1 = \pm(P_1C_1 - PC)$.

Fica, assim, provado o teorema.

No exemplo ilustrativo 4, § 109, observamos que em O', $R = 0$; em P', $R = 4a$. Logo, arco $O'QQ' = 4a$.

O comprimento de um arco da ciclóide (como $OO'Q'$) *é oito vezes o comprimento do raio do círculo gerador.*

111. — Involutas e sua construção mecânica. Torçamos convenientemente uma lâmina flexível de modo que ela tome a forma da curva C_1C_9, evoluta da curva P_1P_9, e suponhamos que um barbante de comprimento R_9, com uma extremidade presa em C_9, seja extendido ao longo da lâmina (ou curva). Dos resultados do último parágrafo decorre que se levantarmos o barbante, mantendo-o sempre distendido, pela extremidade livre, esta descreverá a curva P_1P_9. Daí o nome *evoluta*.

Diz-se que a curva P_1P_9 é uma *involuta* de C_1C_9. Obviamente, todo ponto do barbante descreverá uma involuta, isto é, uma dada curva tem um número infinito de involutas, mas uma só evoluta.

As involutas P_1P_9, $P_1'P_9'$, $P_1''P_9''$ são chamadas *curvas paralelas*, pois a distância entre duas quaisquer dessas curvas, medida ao longo das normais comuns a elas, é constante.

Observe o leitor que a parábola e a elipse das páginas 195 e 196 podem ser construídas deste modo a partir de suas evolutas.

PROBLEMAS

Ache o raio e centro de curvatura de cada uma das seguintes curvas, no ponto dado. Verifique os resultados provando (a) que o centro de curvatura está sobre a normal à curva no dado ponto e (b) que a distância entre o dado ponto e o centro de curvatura é igual ao raio de curvatura.

1. $2py = x^2$; $(0, 0)$. *Resp.* $(0, p)$
2. $x^2 + 4y^2 = 25$; $(3, 2)$. $\left(\frac{81}{100}, -\frac{96}{25}\right)$.
3. $x^3 - y^3 = 19$; $(3, 2)$. $\left(\frac{519}{76}, \frac{17}{57}\right)$.
4. $xy = 6$; $(2, 3)$. $\left(\frac{63}{12}, \frac{31}{6}\right)$.
5. $y = e^x$; $(0, 1)$. $(-2, 3)$.
6. $y = \cos x$; $(0, 1)$. $(0, 0)$.
7. $y = \ln x$; $(1, 0)$. $(3, -2)$.
8. $y = 2 \operatorname{sen} 2x$; $(\frac{1}{4}\pi, 2)$. $\left(\frac{1}{4}\pi, \frac{15}{8}\right)$.
9. $(x + 6)^3 + xy^2 = 0$; $(-3, 3)$. $(-13, 8)$.
10. $2y = x^2 - 4$; $(0, -2)$.
11. $xy = x^2 + 2$; $(2, 3)$.
12. $y = \operatorname{sen} \pi x$; $(\frac{1}{2}, 1)$.
13. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$; $(\frac{1}{8}\pi, \frac{1}{2})$.

Achar as coordenadas do centro de curvatura num ponto qualquer (x, y) de cada uma das seguintes curvas

14. $y^2 = 2px$. *Resp.* $\alpha = \dfrac{3y^2 + 2p^2}{2p}$, $\beta = -\dfrac{y^3}{p^2}$.

15. $y^3 = a^2x$. $\alpha = \dfrac{a^4 + 15y^4}{6a^2y}$, $\beta = \dfrac{a^4y - 9y^5}{2a^4}$.

16. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. $\alpha = \dfrac{(a^2 + b^2)x^3}{a^4}$,

$$\beta = -\frac{(a^2 + b^2)y^3}{b^4}$$

17. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\alpha = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$,

$$\beta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

18. Achar os raios e centros de curvatura da curva $xy = 4$ nos pontos $(1, 4)$ e $(2, 2)$. Desenhar o arco da evoluta entre êstes centros. Qual é o comprimento deste?

Resp. Em $(1, 4)$, $R_1 = \frac{17}{8}\sqrt{17}$, $\alpha = \frac{19}{2}$, $\beta = \frac{49}{8}$;
em $(2, 2)$, $R_2 = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 4$, $\beta = 4$;
$R_1 - R_2 = 5{,}933$.

Achar as equações paramétricas da evoluta de cada uma das seguintes curvas, em função do parâmetro t. Desenhar a curva e a sua evoluta e, pelo menos, um círculo de curvatura.

19. $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3$. *Resp.* $\alpha = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4),\ \beta = -4t^3$.

20. $x = 3t,\ y = t^2 - 6$. $\alpha = -\frac{4}{3}t^3,\ \beta = 3t^2 - \frac{3}{2}$.

21. $x = 6 - t^2,\ y = 2t$. $\alpha = 4 - 3t^2,\ \beta = -2t^3$.

22. $x = 2t,\ y = t^2 - 2$. $\alpha = -2t^3,\ \beta = 3t^2$.

23. $x = 4t,\ y = 3 + t^2$. $\alpha = -t^3,\ \beta = 11 + 3t^2$.

24. $x = 9 - t^2,\ y = 2t$. $\alpha = 7 - 3t^2,\ \beta = -2t^3$.

25. $x = 2t,\ y = \dfrac{3}{t}$. $\alpha = \dfrac{12t^4 + 9}{4t^3},\ \beta = \dfrac{27 + 4t^4}{6t}$.

26. $x = a\cos t,\ y = b\,\mathrm{sen}\,t$. $\alpha = \dfrac{(a^2 - b^2)}{a}\cos^3 t,$

$\beta = \dfrac{(b^2 - a^2)}{b}\,\mathrm{sen}^3\,t$.

27. $x = a\cos^3 t,$ $\alpha = a\cos^3 t + 3a\cos t\,\mathrm{sen}^2\,t,$

$y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$. $\beta = 3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\,t + a\,\mathrm{sen}^3\,t$.

28. $x = a(\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t),$ $\alpha = a\cos t,\ \beta = a\,\mathrm{sen}\,t$.

$y = a(\mathrm{sen}\,t - t\cos t)$.

29. $x = 4 - t^2,\ y = 2t$.

30. $x = 2t,\ y = 16 - t^2$.

31. $x = t^2,\ y = \frac{1}{6}t^3$.

32. $x = 1 - \cos t,\ y = t - \mathrm{sen}\,t$.

33. $x = \cos^4 t,\ y = \mathrm{sen}^4\,t$.

34. $x = a\sec t,\ y = b\,\mathrm{tg}\,t$.

35. $x = \cos t,\ y = t$.

36. $x = 6\,\mathrm{sen}\,t,\ y = 3\cos t$.

37. $x = 3\,\mathrm{cossec}\,t,\ y = 4\,\mathrm{ctg}\,t$.

38. $x = a(t + \mathrm{sen}\,t)$.

$y = a(1 - \cos t)$.

39. $x = 2\cos t + \cos 2t$.

$y = 2\,\mathrm{sen}\,t + \mathrm{sen}\,2t$.

112. — Transformação de derivadas. Algumas das fórmulas deduzidas acima podem ser obtidas de outras fórmulas estabelecendo relações entre derivadas. Dois casos serão vistos aqui.

Troca das variáveis dependente e independente.

NOTAÇÃO. Seja $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, etc.,

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad x'' = \frac{dx'}{dy} = \frac{d^2x}{dy^2}, \quad \text{etc.}$$

Por *IX*, § 29,

$$(I) \qquad y' = \frac{1}{x'}.$$

Temos $$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dy}}{x'}.$$

Usando (*I*), obtemos

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{x''}{x'^2}.$$

$$(J) \qquad \therefore\ y'' = -\frac{x''}{x'^3}.$$

Temos $$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dy}}{x'}.$$

Usando (*J*), $$\frac{dy''}{dy} = -\frac{x'x''' - 3\,x''^2}{x'^4}.$$

$$(K) \qquad \therefore\ y''' = -\frac{x'x''' - 3\,x''^2}{x'^5}.$$

Prosseguindo, obtém-se relações entre derivadas de ordem mais alta. Por estas fórmulas, equações em y', y'', y''', etc. podem ser transformadas em equações em x', x'', x''', etc.

Exemplo ilustrativo. Transforme (*B*), § 102, em (*C*) do mesmo parágrafo.

SOLUÇÃO. Usando (*I*) e (*J*) acima,

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\frac{x''}{x'^3}}{\left(1 + \frac{1}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x''}{(x'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad \textit{Resp.}$$

Transformação de coordenadas retangulares em polares. Dadas as relações

$$(1) \qquad x = \rho \cos\theta\,, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

entre as coordenadas retangulares e polares de um ponto, se a equação polar de uma curva é $\rho = f(\theta)$, então as equações (1) são as equações paramétricas da curva, sendo θ o parâmetro.

Sendo θ a variável independente e indicando com x', x'', y', y'', ρ', ρ'' as derivadas sucessivas destas variáveis em relação a θ, temos, derivando (1),

$$(2) \qquad x' = -\rho \operatorname{sen}\theta + \rho' \cos\theta, \qquad y' = \rho\cos\theta + \rho' \operatorname{sen}\theta;$$

$$(3) \qquad x'' = -2\rho' \operatorname{sen}\theta + (\rho'' - \rho)\cos\theta,$$
$$y'' = 2\rho'\cos\theta + (\rho'' - \rho)\operatorname{sen}\theta.$$

Equações em x, y, x', y', x'', y'' podem, pelas fórmulas (1), (2) e (3), ser transformadas em equações em ρ, θ, ρ', ρ''.

Exemplo ilustrativo. Deduza (E), § 104, diretamente de (D), § 103.

SOLUÇÃO. Tomando separadamente o numerador e denominador de (D), substituindo com base em (2) e (3) e reduzindo, obtemos os resultados

$$x'y'' - y'x'' = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''; \quad x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2.$$

A substituição destes valores em (D) dá (E).

PROBLEMAS

Nos exercícios 1-5 troque as variáveis dependente e independente.

1. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} = 0.$ *Resp.* $x\dfrac{d^2x}{dy^2} - y\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = 0.$

2. $\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + (y-2)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$ $1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 - (y-2)\dfrac{d^2x}{dy^2} = 0.$

3. $(y-4)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$ $\dfrac{d^2x}{dy^2} + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 + y - 4 = 0.$

4. $xy\dfrac{d^3y}{dx^3} + y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4.$

5. $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right) = y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4.$

6. Transforme $\dfrac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}$ tomando $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$.

Resp. $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(\dfrac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}$.

7. Transforme a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{x}{1 - x^2}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{1 - x^2} = 0$, tomando $x = \cos t$. *Resp.* $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$.

8. Transforme a equação $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{a^2}{x^2}y = 0$ tomando $x = \dfrac{1}{t}$. *Resp.* $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$.

OUTROS PROBLEMAS

1. Achar as equações paramétricas da evoluta da curva $x = 3 \cos t + \cos 3t$, $y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t$. Achar também o centro de curvatura para $t = 0$ e mostrar que ele coincide com o correspondente ponto da dada curva.

Resp. $\alpha = 6 \cos t - 2 \cos 3t$, $\beta = 6 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 3t$.

2. Se R é o raio de curvatura num ponto da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e D é a distância da origem à tangente à curva no ponto, prove que $RD^3 = a^2b^2$.

3. Achar as equações da evoluta da parábola $y^2 = 4x$, usando x como parâmetro. Achar os pontos da parábola para os quais os correspondentes centros de curvatura são também pontos da parábola. Achar, finalmente, o comprimento da parte da evoluta interna à parábola.

Resp. $(2, \pm 2\sqrt{2})$; $4(\sqrt{27} - 1)$.

4. (a) Em cada ponto (x, y) de certa curva, o coeficiente angular dela é igual a $\dfrac{x(1 + y)}{\sqrt{5 - x^2}}$. A curva passa pelo ponto (2,0). Mostrar que a equação da curva é $\log(1 + y) = 1 - \sqrt{5 - x^2}$.

(b) Achar a curvatura da curva no ponto (2,0) e desenhar uma porção da curva próxima dêle *Resp.* $K = \frac{9}{25}\sqrt{5}$.

(c) Traçar o círculo de curvatura no ponto

$$\textit{Resp.} \quad \alpha = \frac{8}{9}\,;\ \beta = \frac{5}{9}.$$

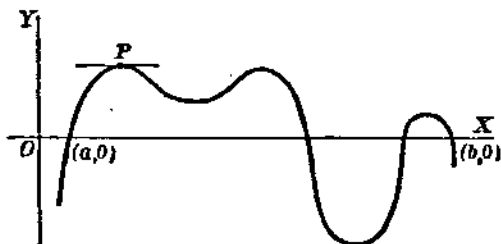
5. O coeficiente angular da tangente a certa curva C no ponto P é dado por $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$, onde s é o comprimento do arco (medido de algum ponto fixo) e a é uma constante. O centro de curvatura de C em P é P'. Indicando com R o raio de curvatura de C em P e com R' o raio de curvatura da evoluta de C em P', mostrar que

$$\text{(a)} \quad R = \frac{s^2 + a^2}{a}\,; \quad \text{(b)}\ R' = \frac{2\,s\,(s^2 + a^2)}{a^2}.$$

Capítulo XI

TEOREMA DO VALOR MÉDIO E SUAS APLICAÇÕES

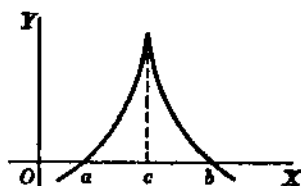
113. Teorema de Rolle Um teorema fundamental no desenvolvimento teórico do cálculo será explicado agora.

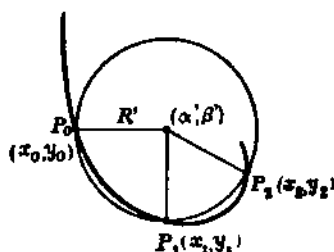
Seja $y = f(x)$ uma função de x, de um só valor, contínua no intervalo $[a, b]$, (§ 7) e nula nos extremos deste intervalo ($f(a) = 0, f(b) = 0$). Suponhamos também que $f(x)$ tenha uma derivada finita $f'(x)$ em cada ponto

interior ($a < x < b$) do intervalo. A função será, então, representada gràficamente por uma curva contínua, como na figura. A intuição geométrica mostra logo que para *ao menos um valor de x* compreendido entre a e b a tangente é paralela ao eixo dos xx (como em P), isto é, tem o coeficiente angular igual a zero. Isto ilustra o

Teorema de Rolle. *Se $f(x)$, contínua no intervalo (a, b), é nula nas extremidades e tem uma derivada $f'(x)$ finita em cada ponto interno ao intervalo, então $f'(x)$ deve se anular para ao menos um valor de x compreendido entre a e b.*

A demonstração é simples. Realmente, ou $f(x)$ é nula em todos os pontos de $[a, b]$ e o teorema está demonstrado, ou não é. Neste segundo caso, podemos fazer duas hipóteses: ou $f(x)$ começa crescendo ou começa decrescendo. Vejamos a primeira hipótese: $f(x)$ não pode crescer sempre, pois é nula em b; logo, há um dado ponto c interno ao intervalo, de onde ela passa a decrescer. Neste ponto

$f(x)$ tem um máximo e portanto $f'(c) = 0$. Vejamos a segunda hipótese: $f(x)$ não pode decrescer sempre, pois é nula em b; logo, há um ponto c' interno a $[a, b]$ de onde a função passa a crescer. Neste ponto, ela tem um mínimo e portanto $f'(c') = 0$.

A figura ilustra um caso em que não vale o teorema de Rolle porque $f'(x)$ é infinita num ponto $x = c$ interno a (a, b). Em nenhum ponto do gráfico é a tangente paralela ao eixo dos xx.

Vamos dar duas aplicações do teorema de Rolle à geometria.

114. Círculo osculador. Se um círculo passa por três pontos vizinhos P_0, P_1, P_2 de uma curva e se se faz P_1 e P_2 tender a P_0, movendo-se sobre a curva, então o círculo tenderá, em geral, a uma figura limite, a qual é também um círculo. Este diz-se *círculo osculador à curva no ponto* P_0.

Teorema. *O círculo osculador coincide com o de curvatura.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$y = f(x) \tag{1}$$

a equação da curva; sejam x_0, x_1, x_2 as abscissas dos pontos P_0, P_1, P_2 respectivamente, (α', β') o centro e R' o raio do círculo passando pelos três pontos. Então a equação do círculo é

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = R'^2\,;$$

como as coordenadas dos pontos P_0, P_1, P_2 devem satisfazer esta equação, temos

$$\left\{\begin{array}{l} (x_0 - \alpha')^2 + (y_0 - \beta')^2 - R'^2 = 0\,, \\ (x_1 - \alpha')^2 + (y_1 - \beta')^2 - R'^2 = 0\,, \\ (x_2 - \alpha')^2 + (y_2 - \beta')^2 - R'^2 = 0\,. \end{array}\right. \tag{2}$$

Consideremos a função de x definida por

$$F(x) = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - R'^2,$$

na qual y é definido por (1).

Das equações (2) obtemos

$$F(x_0) = 0, \quad F(x_1) = 0, \quad F(x_2) = 0.$$

Logo, pelo teorema de Rolle (§ 113), $F'(x)$ deve se anular para ao menos dois valores de x, um compreendido entre x_0 e x_1, digamos x', outro compreendido entre x_1 e x_2, digamos x'', isto é,

$$F'(x') = 0, \quad F'(x'') = 0.$$

Daqui resulta, pela mesma razão, que $F''(x)$ deve se anular para algum valor de x compreendido entre x' e x'', digamos x_3; logo

$$F''(x_3) = 0.$$

Portanto os elementos α', β' e R' do círculo passando pelos pontos P_0, P_1 e P_2 devem satisfazer as três equações.

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x') = 0, \quad F''(x_3) = 0.$$

Façamos agora os pontos P_1 e P_2 tender a P_0, movendo-se sobre a curva; então x_1, x_2, x', x'' e x_3 tenderão a x_0 e os elementos α, β e R do círculo osculador serão, pois, determinados pelas três equações

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \quad F''(x_0) = 0,$$

ou, desprezando os índices, pelas equações

(3) $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

(4) $$(x - \alpha) + (y - \beta)\, y' = 0, \text{ derivando (3).}$$

(5) $$1 + y'^2 + (y - \beta)\, y'' = 0, \text{ derivando (4).}$$

De (4) e (5) deduzimos, supondo $y'' \neq 0$,

$$(6) \qquad x - \alpha = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Tirando α e β destas duas últimas equações, obtemos o resultado expresso por (G), § 108. Substituindo os valores (6) em (3) e do resultado tirando R, obtemos a (F) do § 105. Logo, o círculo osculador coincide com o de curvatura.

No § 28 definimos a tangente em P como a posição limite de uma reta passando por P e por um ponto Q sobre a curva, próximo de P, quando Q tende a P, movendo-se sobre a curva. Vemos agora que o círculo de curvatura em P é a posição limite de um círculo passando por P e por dois pontos próximos, sobre a curva, quando estes últimos tendem a P.

115. — Ponto limite da interseção de normais consecutivas.

TEOREMA. *O centro de curvatura C num ponto P de uma curva é a posição limite da interseção entre a normal à curva em P e a normal à curva num ponto próximo a P, quando o ponto próximo tende a P.*

C(α,β)
C'(α',β')
$P_1(x_1, y_1)$
$P_0(x_0\ y_0)$

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$(1) \qquad y = f(x)$$

a equação da curva.

As equações das normais à curva em dois pontos próximos P_0 e P_1 são

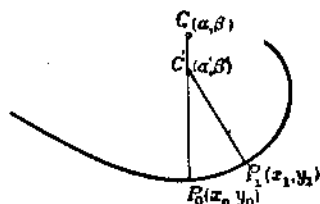
$$(x_0 - x) + (y_0 - y) f'(x_0) = 0,$$
$$(x_1 - x) + (y_1 - y) f'(x_1) = 0.$$

Se as normais se cortam em $C'(\alpha', \beta')$, as coordenadas deste ponto devem satisfazer as duas equações, isto é,

$$(2) \qquad \begin{cases} (x_0 - \alpha') + (y_0 - \beta') f'(x_0) = 0, \\ (x_1 - \alpha') + (y_1 - \beta') f'(x_1) = 0. \end{cases}$$

Consideremos agora a função de x definida por

$$\phi(x) = (x - \alpha') + (y - \beta') y',$$

na qual y é definida por (1).

Então, as equações (2) mostram que

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi(x_1) = 0.$$

Logo, pelo teorema de Rolle (§ 113), $\phi'(x)$ anula-se para algum valor de x compreendido entre x_0 e x_1, digamos x'. Consequentemente, α' e β' são determinadas pelas duas equações

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x') = 0.$$

Fazendo agora P_1 tender a P_0, temos que x' tende a x_0, dando

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x_0) = 0,$$

e $C'(\alpha', \beta')$ tenderá a um ponto $C(\alpha, \beta)$ sôbre a normal em P_0.

Tirados os índices e tiradas as linhas, as duas últimas equações são

$$(x - \alpha) + (y - \beta) y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y - \beta) y'' = 0.$$

Achando os valores de α e β nestas equações, obtemos resultados idênticos aos expressos por (G) do § 108. Q.E.D.

116. — Teoremas do valor médio (Leis da média). Para aplicações posteriores necessitamos do

TEOREMA. *Se $f(x)$, $F(x)$ e suas derivadas primeiras são contínuas no intervalo $[a, b]$ e se, ainda, $F'(x)$ não se anula no interior de $[a, b]$, então para algum valor $x = x_1$ compreendido entre a e b,*

$$(A) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}. \qquad (a < x_1 < b)$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a função

$$(1) \qquad \phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)] - [f(x) - f(a)].$$

Temos $\phi(a) = \phi(b) = 0$ e por conseguinte pode-se aplicar o teorema de Rolle, § 113. Ora,

$$\text{(2)} \qquad \phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F'(x) - f'(x).$$

Logo, existe algum valor $x = x_1$ compreendido entre a e b tal que

$$\text{(3)} \qquad \therefore \quad \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F'(x_1) - f'(x_1) = 0.$$

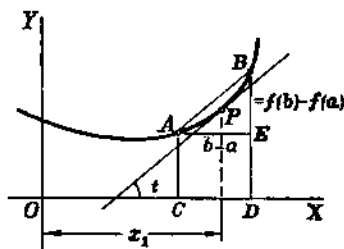
Dividindo por $F'(x_1)$ (pois, lembremos, $F'(x_1) \neq 0$) e transpondo, obtemos (A). Q.E.D.

Se $F(x) = x$, (A) torna-se

$$(B) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1) \qquad (a < x_1 < b)$$

Nesta forma o teorema tem uma interpretação geométrica simples. Na figura, a curva é o gráfico de $f(x)$, e

$$OC = a, \quad CA = f(a),$$

$$OD = b, \quad DB = f(b).$$

Logo

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{coeficiente angular da reta } AB.$$

Como $f'(x_1)$ é o coeficiente angular da curva num ponto do arco AB, (B) diz que o coeficiente angular nesse ponto é igual ao coeficiente angular da reta AB. Logo, há ao menos um ponto sobre o arco AB no qual a tangente à curva é paralela à corda AB.

O leitor deve desenhar curvas (como a primeira do § 113) que mostrem poder existir mais de um tal ponto no intervalo e curvas que, por outro lado, mostrem que o teorema pode não ser verda-

deiro se $f(x)$ é descontínua para algum valor de x compreendido entre a e b ou então $f'(x)$ é descontínua (como na segunda figura do § 113.)

A fórmula (B) pode também ser escrita sob a forma

$$(C) \qquad f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1).$$

Seja $b = a + \Delta a$; então $b - a = \Delta a$ e, como x_1 é um número compreendido entre a e b, podemos escrever

$$x_1 = a + \theta \, \Delta a,$$

onde θ é positivo e menor que 1. Substituindo em (C), obtemos *outra forma do teorema do valor médio*:

$$(D) \qquad f(a + \Delta a) - f(a) = \Delta a \, f'(a + \theta \, \Delta a) \qquad (0 < \theta < 1)$$

PROBLEMAS

1. Verificar o teorema de Rolle achando os valores de x para os quais $f(x)$ e $f'(x)$ se anulam em cada um dos casos seguintes.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$.
(b) $f(x) = 6x^2 - x^3$.
(c) $f(x) = a + bx + cx^2$.
(d) $f(x) = \operatorname{sen} x$.
(e) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x - \cos \pi x$.
(f) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.
(g) $f(x) = x \ln x$.
(h) $f(x) = xe^x$.

2. Dado $f(x) = \operatorname{tg} x$, então $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 0$. Pergunta-se: vale o teorema de Rolle para a função $f(x)$, isto é, $f'(x)$ anula-se alguma vez entre 0 e π? Explicar a resposta.

3. Para $(y + 1)^3 = x^2$, tem-se $y = 0$ para $x = -1$ e $y = 0$ para $x = 1$. Pergunta-se: vale o teorema de Rolle, isto é, y' anula-se alguma vez no interior do intervalo $[-1, 1]$? Explicar a resposta.

4. Em cada um dos seguintes casos achar x_1 tal que

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1).$$

(a) $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 2$. *Resp.* $x_1 = 1{,}5$.
(b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 4$. $x_1 = 2{,}25$.
(c) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$. $x_1 = \ln(e - 1) = 0{,}54$.

(d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $a = 1$, $b = 2$.

(e) $f(x) = \ln x$, $a = 0{,}5$, $b = 1{,}5$.

(f) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$, $a = 0$, $b = 1$.

5. Dado $f(x) = 1/x$, $a = -1$, $b = 1$, existe valor x_1 tal que

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1)?$$

6. Dado $f(x) = x^{2/3}$, $a = -1$, $b = 1$, existe valor x_1 tal que

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1)?$$

117. — Formas indeterminadas. Quando, para um particular valor da variável independente, uma função toma uma das formas

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \; 1^\infty,$$

diz-se que ela é *indeterminada* e que a função *não* é definida para aquêle valor da variável independente. Por exemplo, seja

$$y = \frac{f(x)}{F(x)}$$

e suponhamos que para algum valor, a, da variável, se tenha

$$f(a) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Para este valor de x nossa função *não* é definida, mas é imediato, pelo que já se viu (Caso II, § 17), que podemos atribuir à função, para $x = a$, um valor tal que ela resulte contínua para $x = a$, sempre que existir o limite da função quando x tende a a.

118. — Funções indeterminadas. Se a função f (x) é indeterminada para $x = a$, isto é, se para $x = a$, ela toma uma das formas indeterminadas acima e se

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

existe e é finito, então atribuímos êste valor à função para $x = a$, com o que a função torna-se, pois, contínua para $x = a$ (§ 17).

O limite pode, algumas vezes, ser achado depois de transformações simples como mostram os exemplos seguintes.

Exemplo ilustrativo 1. Dado $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, prove que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Solução. $f(2)$ é indeterminada, mas, dividindo o numerador pelo denominador, $f(x) = x + 2$, e $\lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$.

Exemplo ilustrativo 2. Dado $f(x) = \sec x - \operatorname{tg} x$, prove que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f(x) = 0$.

Solução. $f(x)$ é indeterminada $(\infty - \infty)$. Transformemos como segue:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Logo, o limite é zero.

Veja também o § 18. Métodos gerais para levantar as indeterminações apresentadas pelas formas do § 117 dependem do cál culo.

119. — Forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Dada uma função da forma $\frac{f(x)}{F(x)}$, onde $f(a) = 0$ e $F(a) = 0$, (portanto uma função indeterminada para $x = a$), quer-se achar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Provaremos que

$$(E) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Demonstração. Em virtude de (A), § 116, e pondo $b = x$, temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} \qquad (a < x_1 < x) \tag{1}$$

pois $f(a) = 0$, $F(a) = 0$.

Se $x \to a$, também $x_1 \to a$; logo, se o segundo membro de (1) tende a um limite quando $x_1 \to a$, então o primeiro membro terá ó mesmo limite. Com isto fica provada a igualdade (E).

De (E) resulta, se $f'(a)$ e $F'(a)$ não são simultâneamente nulas

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}. \tag{2}$$

Regra para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$. *Derive o numerador e o denominador. As derivadas obtidas serão, respectivamente, o numerador e o denominador de uma nova fração cujo valor no ponto de indeterminação da primitiva fração é o limite desta quando a variável independente tende para o ponto de interminação.*

No caso em que $f'(a) = 0$ e $F'(a) = 0$, isto é, no caso de serem nulas as derivadas primeiras para $x = a$, então (E) pode ser aplicada à razão

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

e a regra dará $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}$.

Pode ser necessário repetir o processo várias vezes.

Chamamos a atenção do estudante para o erro muito comum de se derivar a expressão toda como uma fração, por VII.

Se $a = \infty$, a substituição $x = \frac{1}{z}$ reduz o problema ao cálculo do limite para $z = 0$. Assim,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{-f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-F'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Portanto, a regra vale também nêste caso.

Exemplo ilustrativo 1. Prove que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} n x}{x} = n$.

Solução. Seja $f(x) = \operatorname{sen} nx$, $F(x) = x$. Então $f(0) = 0$, $F(0) = 0$. Logo, por (E).

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{n \cos nx}{1} = n. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Prove que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \frac{3}{2}$.

Solução. Seja $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Então $f(1) = 0$. $F(1) = 0$. Logo, por (E),

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{0}{0}. \quad \therefore \text{ indeterminada.}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{f''(x)}{F''(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{6x - 2} = \frac{3}{2}. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Exemplo ilustrativo 3. Prove que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x} = 2$.

Solução. Seja $f(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, $F(x) = x - \operatorname{sen} x$. Então $f(0) = 0$ $F(0) = 0$. Logo, por (E),

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}. \quad \therefore \text{ indeterminada.}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{F''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}. \quad \therefore \text{ indeterminada.}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'''(x)}{F'''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

PROBLEMAS

Usando as derivadas *, calcular os limites abaixo.

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$. *Resp.* $\frac{8}{9}$.

2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x - a}{x^n - a^n}$. $\dfrac{1}{na^{n-1}}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$. 1.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$. 2.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$. 2.

6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi - 2x)^2}$. $-\frac{1}{8}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$. $\ln \dfrac{a}{b}$.

8. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{arc\,sen} \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta}$. $-\frac{1}{6}$.

9. $\lim\limits_{x \to \phi} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \phi}{x - \phi}$. $\cos \phi$.

10. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y + \operatorname{sen} y - 1}{\ln(1 + y)}$. 2.

11. $\lim\limits_{\phi \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 \phi - 2 \operatorname{tg} \phi}{1 + \cos 4\phi}$. $\frac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{r \to a} \dfrac{r^3 - ar^2 - a^2 r + a^3}{r^2 - a^2}$.

13. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$.

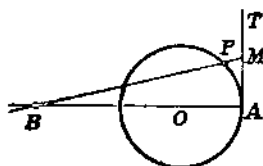
14. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{16x - x^4} - 2\sqrt[3]{4x}}{2 - \sqrt[4]{2x^3}}$.

15. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \theta + \sec \theta - 1}{\operatorname{tg} \theta - \sec \theta + 1}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$.

* Depois de derivar, deve o estudante, em cada caso, reduzir a expressão obtida à forma mais simples antes de substituir o valor da variável.

18. São dados (V. figura) um círculo de centro O e raio r e uma reta tangente ao círculo no ponto A. Sendo AM = arco AP (V. figura), achar a posição limite de B quando P tende a A, movendo-se sôbre a curva. *Resp.* $OB = 2r$.

120. — Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Para achar

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$$

quando $f(x)$ e $F(x)$ tendem ao infinito, para $x \to a$, seguimos a mesma regra que a dada no § 119 para o levantamento da indeterminação $\frac{0}{0}$, precisamente:

Derivamos o numerador e o denominador e as derivadas obtidas vão ser, respectivamente, o numerador e o denominador de uma nova fração. O limite da nova fração, quando existe, é igual ao da primitiva fração.

Uma demonstração deste resultado está fora do escopo deste livro.

Exemplo ilustrativo. Prove que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\text{cossec}\, x} = 0$.

Solução. Seja $f(x) = \ln x$, $F(x) = \text{cossec}\, x$. Então $f(0) = -\infty$, $F(0) = \infty$. Logo, pela regra,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\text{cossec}\, x \,\text{ctg}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}.$$

Então, por (E),

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\text{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\,\text{sen}\, x \cos x}{\cos x - x\,\text{sen}\, x} = 0. \qquad \text{Q.E.D.}$$

121. — Forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Se uma função $f(x) \cdot \phi(x)$ toma a forma indeterminada $0 \cdot \infty$ para $x = a$, escrevemos a dada função como abaixo

$$f(x) \cdot \phi(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{\phi(x)}} \left(\text{ou} = \frac{\phi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \right),$$

que, assim posta, toma uma das formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ quando $x = a$ e é, portanto, conduzida a casos já vistos no § 119 ou § 120.

Como se viu, o produto $f(x) \cdot \phi(x)$ pode ser posto sob uma de duas formas. Qual seja a mais cômoda delas para os cálculos vai depender das funções dadas.

Exemplo ilustrativo. Prove que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (\sec 3x \cos 5x) = -\frac{5}{3}$.

Solução. Como $\sec \frac{3}{2}\pi = \infty$, $\cos \frac{5}{2}\pi = 0$, escrevemos

$$\sec 3x \cos 5x = \frac{1}{\cos 3x} \cdot \cos 5x = \frac{\cos 5x}{\cos 3x}.$$

Seja $f(x) = \cos 5x$, $F(x) = \cos 3x$. Então $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $F(\frac{1}{2}\pi) = 0$.

Logo, por (E), $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{-5 \operatorname{sen} 5x}{-3 \operatorname{sen} 3x} = -\frac{5}{3}$. Q.E.D.

122. — Transformação da forma indeterminada $\infty - \infty$. Em geral é possível transformar a forma indeterminada $\infty - \infty$ em uma das duas outras $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplo ilustrativo. Provar que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (\sec x - \operatorname{tg} x) = 0$.

Solução. Temos $\sec \frac{1}{2}\pi - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi = \infty - \infty$. $\therefore$ indeterminado.

Por (2), p. 2, $\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$.

Seja $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$, $F(x) = \cos x$. Então $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $F(\frac{1}{2}\pi) = 0$
Logo, por (E),

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

PROBLEMAS

Calcular os limites seguintes:

	Resp.		*Resp.*
1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$.	0.	15. $\lim_{\phi\to 0} \left[\frac{2}{\operatorname{sen}^2\phi} - \frac{1}{1-\cos\phi}\right]$.	$\frac{1}{2}$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$.	2.	16. $\lim_{y\to 1} \left[\frac{y}{y-1} - \frac{1}{\ln y}\right]$.	$\frac{1}{2}$.
3. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3\theta}{\operatorname{tg}\theta}$.	$\frac{1}{3}$.	17. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right]$.	$\frac{1}{3}$.
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\epsilon^x}$.	0.	18. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\ln x}{x\ln x}$.	
5. $\lim_{x\to\infty} \frac{\epsilon^x}{\ln x}$.	∞.	19. $\lim_{\theta\to 0} \theta \operatorname{cossec} 2\theta$.	
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$.	$-\infty$.	20. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x}$.	
7. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x}$.	1.	21. $\lim_{\phi\to a} (a^2-\phi^2) \operatorname{tg}\frac{\pi\phi}{2a}$.	
8. $\lim_{x\to 0} x \ln \operatorname{sen} x$.	0.	22. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} (\sec 5\theta - \operatorname{tg}\theta)$.	
9. $\lim_{\phi\to 0} \frac{\pi}{\phi} \operatorname{tg}\frac{\pi\phi}{2}$.	$\frac{1}{2}\pi^2$.	23. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(\epsilon^{\pi x}+1)}\right]$.	
10. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{a}{x}$.	a.	24. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\operatorname{tg} x}\right]$.	
11. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)\operatorname{tg} x$.	2.	25. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[x\operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2}\sec x\right]$.	
12. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} (1-\operatorname{tg}\theta)\sec 2\theta$.	1.	26. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$.	
13. $\lim_{x\to 1} \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right]$.	$-\frac{1}{2}$.	27. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right]$.	
14. $\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right]$.	-1.	28. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{1}{x^3}\right]$.	

123. — Sobre as formas indeterminadas 0^0, 1^∞ e ∞^0. Para que a função

$$f(x)^{\phi(x)}$$

tome uma das formas indeterminadas acima num dado ponto x, devemos ter

$$f(x) = 0, \quad \phi(x) = 0, \quad \text{dando} \quad 0^0,$$

ou
$$f(x) = 1, \quad \phi(x) = \infty, \quad \text{dando} \quad 1^\infty,$$

ou
$$f(x) = \infty, \quad \phi(x) = 0, \quad \text{dando} \quad \infty^0.$$

Seja
$$y = f(x)^{\phi(x)}.$$

Tomando os logaritmos naturais de ambos os membros.

$$\ln y = \phi(x) \ln f(x).$$

Em qualquer dos casos acima, a função $\ln y$ toma no ponto x a forma indeterminada.

$$0 \, . \, \infty \, .$$

Calculada esta pelo modo ilustrado no § 121, obtemos o limite do logaritmo da função. Sendo este igual ao logaritmo do limite da função, é conhecido o limite da função, pois da igualdade $\ln y = a$ resulta $y = e^a$.

Exemplo ilustrativo 1. Prove que $\lim_{x \to 0} x^x = 1$.

Solução. A função toma a forma indeterminada 0^0 quando $x = 0$.

Seja
$$y = x^x;$$

então
$$\ln y = x \ln x = 0 \, . - \infty, \qquad \text{quando } x = 0$$

Pelo § 121
$$\ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}, \qquad \text{quando } x = 0$$

Pelo § 120,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Logo
$$\lim_{x \to 0} \ln y = 0, \text{ e } \lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} x^x = e^0 = 1. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Prove que $\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

Solução. A função toma a forma indeterminada 1^∞ quando $x = 1$;

Então $\qquad \ln y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x \ln (2 - x) = \infty \cdot 0, \qquad$ quando $x = 1$

Pelo § 121, $\qquad \ln y = \dfrac{\ln (2 - x)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi x} = 0, \qquad$ quando $x = 1$

Pelo § 119, $\qquad \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln (2 - x)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-\dfrac{1}{2 - x}}{-\frac{1}{2} \pi \operatorname{cossec}^2 \frac{1}{2} \pi x} = \dfrac{2}{\pi}.$

Logo $\qquad \lim\limits_{x \to 1} \ln y = \dfrac{2}{\pi}, \quad$ e $\quad \lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

Q.E.D.

Exemplo ilustrativo 3. Prove que $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = 1.$

Solução. A função toma a forma indeterminada ∞^0 quando $x = 0$.

Seja $\qquad y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x};$

então $\qquad \ln y = \operatorname{sen} x \ln \operatorname{ctg} x = 0 \cdot \infty, \qquad$ quando $x = 0$

Pelo § 121, $\qquad \ln y = \dfrac{\ln \operatorname{ctg} x}{\operatorname{cossec} x} = \dfrac{\infty}{\infty}, \qquad$ quando $x = 0$

Pelo § 120, $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ctg} x}{\operatorname{cossec} x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{-\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{ctg} x}}{-\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0.$

Logo $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \ln y = 0, \quad$ e $\quad \lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$ Q.E.D.

PROBLEMAS

Calcule cada um dos limites abaixo:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}.$ *Resp.* 1.
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2}{x} + 1\right)^x.$ e^2.
3. $\lim\limits_{n \to 1} x^{\frac{1}{1 - x}}.$ $\dfrac{1}{e}$.
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{y}\right)^y.$ e^a.
5. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{ctg} x}.$ e.
6. $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}.$ e^2.
7. $\lim\limits_{t \to 0} (1 + nt)^{\frac{1}{t}}.$ e^n.
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \dfrac{2}{x}\right)^x.$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \dfrac{2}{x}\right)^{x^2}.$
10. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \dfrac{2}{x}\right)^{x^3}.$
11. $\lim\limits_{x \to 0} (e^{2x} + 2x)^{\frac{1}{4x}}.$
12. $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)^{\operatorname{ctg} x}.$
13. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}.$
14. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\ln x}.$

124. Teorema geral do valor médio. Seja a constante R definida pela equação

$$(1) \qquad f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) - \tfrac{1}{2}(b - a)^2 . R = 0.$$

Seja $F(x)$ a função obtida do primeiro membro de (1) substituindo-se b por x, isto é,

$$(2) \qquad F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) f'(a) - \tfrac{1}{2}(x - a)^2 . R.$$

De (1), $F(b) = 0$ e de (2), $F(a) = 0$; logo, pelo teorema de Rolle (§ 113), para ao menos um valor x_1 de x, compreendido entre a e b, temos $F'(x_1) = 0$. Ora,

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) - (x - a) R ;$$

logo $$F'(x_1) = f'(x_1) - f'(a) - (x_1 - a) R = 0.$$

Como $F'(x_1) = 0$ e $F'(a) = 0$, podemos aplicar de novo o teorema de Rolle: a função $F'(x)$ anula-se em ao menos um ponto x_2 compreendido entre a e x_1. Ora,

$$F''(x) = f''(x) - R; \quad \text{logo} \quad F''(x_2) = f''(x_2) - R = 0$$

e portanto $$R = f''(x_2).$$

Substituindo este resultado em (1), obtemos

$$(F) \qquad f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{1}{\underline{|2}}(b - a)^2 f''(x_2). \qquad (a < x_2 < b)$$

Continuando este processo vamos obter o resultado

$$(G) \quad f(b) = f(a) + \frac{(b - a)}{\underline{|1}} f'(a) + \frac{(b - a)^2}{\underline{|2}} f''(a) + \frac{(b - a)^3}{\underline{|3}} f'''(a) + \ldots + \frac{(b - a)^{n-1}}{\underline{|n - 1}} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b - a)^n}{\underline{|n}} f^n(x_1). \qquad (a < x_1 < b)$$

A equação (G) exprime o *teorema geral do valor médio* e é chamada *a lei geral da média.*

125. — Máximos e mínimos pelo método analítico. Usando os resultados dos § § 116 e 124, podemos fazer um estudo geral dos *máximos e mínimos das funções de uma só variável independente.*

Dada a função $f(x)$, seja h um número positivo tão pequeno quanto se queira; então, as definições dadas no § 46 podem ser formuladas como segue.

Se para todos os valores de x, diferentes de a, do intervalo $(a - h, a + h)$,

$$f(x) - f(a) = \text{número negativo}, \tag{1}$$

então $f(x)$ *tem um máximo* quando $x = a$. Se, pelo contrário,

$$f(x) - f(a) = \text{número positivo}, \tag{2}$$

então, $f(x)$ *tem um mínimo* quando $x = a$.

Começaremos com uma demonstração analítica do critério dado no parágrafo 45.

Uma função é crescente quando a derivada é positiva, decrescente quando a derivada é negativa.

Realmente, seja $y = f(x)$. Quando Δx é pequeno, o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e a derivada $f'(x)$ tem o mesmo sinal (§ 24). Seja $f'(x) > 0$. Então, sendo Δx positivo, também é positivo Δy e, sendo Δx negativo, também é negativo Δy, isto é, $f(x)$ é crescente. Uma demonstração semelhante pode ser feita quando $f'(x) < 0$.

Vê-se fàcilmente agora que

Se $f(a)$ é um máximo ou mínimo de $f(x)$, então $f'(a) = 0$.

Realmente, se $f'(a)$ fosse diferente de zero, $f(x)$ seria crescente ou decrescente quando x é próximo de a e portanto $f(a)$ não seria nem máximo nem mínimo.

Procuremos condições suficientes gerais para a existência de máximos ou mínimos. Consideremos, para isso, os seguintes casos.

I. Seja $f'(a) = 0$ e $f''(a) \neq 0$.

De (F), § 124, trocando b por x e transpondo $f(a)$, obtemos

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} f''(x_2). \qquad (a < x_2 < x) \tag{3}$$

Como $f''(a) \neq 0$ e se supõe $f''(x)$ contínua, podemos escolhe um intervalo $[a - h, a + h]$ tão pequeno que nele $f''(a)$ e $f''(x)$ tenham o mesmo sinal. Como $(x - a)^2$ não muda de sinal, o segundo membro de (3) também não muda e portanto a diferença

$$f(x) - f(a)$$

não muda de sinal quando x varia no intervalo $[a - h, a + h]$. Ora, *o sinal desta diferença é o mesmo de* $f''(a)$; logo, tendo em vista (1) e (2) acima,

(4) $f(a)$ *é um máximo se* $f'(a) = 0$ *e* $f''(a) =$ *número negativo;*

(5) $f(a)$ *é um mínimo se* $f'(a) = 0$ e $f''(a) =$ *número positivo.*

Estas condições são as mesmas que as do § 56.

II. Seja $f'(a) = f''(a) = 0$ e $f'''(a) \neq 0$.

De (G), § 124, pondo $n = 3$, substituindo b por x e mudando $f(a)$ de membro,

$$(6) \qquad f(x) - f(a) = \frac{1}{\underline{|3}} (x - a)^3 f'''(x_3). \qquad (a < x_3 < x)$$

Como antes, $f'''(x)$ terá o mesmo sinal que $f'''(a)$. Mas $(x-a)^3$ muda do sinal $-$ para $+$ quando x cresce atravessando a. Logo, a diferença

$$f(x) - f(a)$$

deve mudar de sinal e portanto $f(a)$ não é máximo nem mínimo.

III. Seja $f'(a) = f''(a) \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Continuando o processo como ilustrado em I e II, vê-se que se a primeira das derivadas de $f(x)$ que não se anula para $x = a$ é de *ordem par* $(= n)$, então

(H) $f(a)$ é um máximo se $f^{(n)}(a) =$ número negativo;

(I) $f(a)$ é um mínimo se $f^{(n)}(a) =$ número positivo.

Se a primeira das derivadas de $f(x)$ que não se anula para $x = a$ é de *ordem ímpar*, então $f(a)$ *não será nem um máximo nem um mínimo.*

PROBLEMAS

Examine cada uma das seguintes funções no que concerne a máximos e mínimos, usando o método do último parágrafo.

1. $x^4 - 4x^3 + 5$. *Resp.* $x = 0$, nem um nem outro. $x = 3$, dá mínimo $= -22$.

2. $x^3 + 3x^2 + 3x$. $x = -1$, nem um nem outro.

3. $x^3(x-2)^2$. $x = 0$, nem um nem outro. $x = \frac{6}{5}$, dá máximo $= 1{,}11$.

4. $x(x-1)^2(x+1)^3$. $x = 2$, dá mínimo $= 0$.

5. Investigue $4x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 10x^2$ em $x = 1$.

6. Mostre que se a primeira derivada de $f(x)$ que não se anula para $x = a$ é de ordem ímpar ($= n$), então $f(x)$ é uma função crescente ou decrescente quando $x = a$, segundo seja $f^{(n)}(a)$ positiva ou negativa.

OUTROS PROBLEMAS

1. Se $y = e^x + e^{-x}$, ache dx em têrmos de y e dy. *Resp.* $dx = \frac{\pm dy}{\sqrt{y^2-4}}$.

2. Prove que $\frac{d}{dx}\ln(3x+2+\sqrt{9x^2+12x}) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+12x}}$.

3. Prove que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{4}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{8}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right] = x^2\sqrt{x^2+1}.$$

4. Prove que a curva $x = t^3 + 2t^2$, $y = 3t^2 + 4t$ não tem ponto de inflexão.

5. Prove que os pontos de interseção das curvas $2y = x \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ são pontos de inflexão da primeira curva. Trace as duas curvas, usando um só sistema de referências.

6. Dado o movimento harmônico amortecido

$$s = ae^{-bt}\operatorname{sen} ct,$$

onde a, b e c são constantes positivas, provar que os sucessivos valores de t para os quais $v = 0$ formam uma progressão aritmética e que os correspondentes valores de s formam uma progressão geométrica decrescente.

7. A abscissa de um ponto P móvel sôbre a parábola $y = ax^2$ cresce à razão de uma unidade por segundo. Sejam 0 a origem e T a interseção do eixo dos xx com a tangente à parábola em P. Mostrar que a velocidade de variação do comprimento do arco OP é, em valor absoluto, igual à razão $\frac{TP}{OT}$.

8. Seja MP a ordenada num ponto P da catenária (ver Cap XXVI). Seja MA a perpendicular à tangente em P. Prove que o comprimento de MA é constante e igual a a.

9. A curva $x^2y + 12\,y = 144$ tem um máximo e dois pontos de inflexão. Ache a área do triângulo formado pelas tangentes à curva nêstes três pontos. *Resp.* 1.

10. Dados $\ln 6 = 1{,}792$ e $\ln 7 = 1{,}946$, calcular $\ln 6{,}15$ primeiro por interpolação e depois por diferenciais. Mostre gràficamente que o valor exato está compreendido entre as duas aproximações.

11. Dada a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, achar o menor dos comprimentos dos segmentos interceptados sôbre as tangentes pelos eixos coordenados. *Resp.* $a + b$.

12. É dada a área limitada, no primeiro quadrante, pelas curvas $y^2 = x$ e $y^2 = x^3$. Um retângulo com lados paralelos aos eixos é desenhado dentro dos limites da área. A largura do retângulo é $\frac{1}{8}$ e uma das diagonais tem uma extremidade em cada curva. Achar a área do retângulo de máxima área que pode ser construído dêste modo. *Resp.* 0,019.

13. Dão-se retângulos com um lado sôbre o eixo dos xx, um segundo sôbre a reta $x = \frac{1}{2}$ e um vértice sôbre a curva $y = e^{-x^2}$. Achar a área do maior dêstes retângulos. *Resp.* $e^{-0{,}25} = 0{,}7788$.

14. Achar os máximos e mínimos de

$$y = ae^{\frac{x}{a}} - 3\,x - 2\,ae^{-\frac{x}{a}}.$$

Resp. Máx. $= -\,a$; mín. $= a\,(1 - 3 \log 2)$.

15. Achar os máximos e mínimos de y em

$$x^2 + 3\,xy + 2\,y^2 + 5\,x - 6\,y + 5 = 0\,.$$

Resp. Máx. = 1; mín. = 5.

CÁLCULO INTEGRAL

CAPÍTULO XII

INTEGRAÇÃO — INTEGRAIS IMEDIATAS

126 — Integração. O leitor já está familiarizado com as operações mutuamente inversas de adição e subtração, multiplicação e divisão, potenciação e radiciação. Nos exemplos que seguem, os segundos membros de uma coluna são, respectivamente, as funções inversas dos segundos membros da outra coluna.

$$y = x^2 + 1\,, \qquad x = \pm\sqrt{y-1}\,;$$
$$y = a^x, \qquad x = \log_a y\,;$$
$$y = \operatorname{sen} x\,, \qquad x = \operatorname{arc\,sen} y\,.$$

No cálculo diferencial aprendemos como calcular a derivada $f'(x)$ de uma dada função $f(x)$, uma operação indicada por

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)\,,$$

ou, se usarmos diferenciais, por

$$df(x) = f'(x)\,dx\,.$$

Os problemas do cálculo integral dependem da *operação inversa*, precisamente:

Achar uma função $f(x)$ cuja derivada

$$f'(x) = \phi(x) \tag{1}$$

é dada.

Ou, já que é usual usar diferenciais no cálculo integral, podemos escrever

$$(2) \qquad df(x) = f'(x)\,dx = \phi(x)\,dx$$

e pôr o problema como segue:

Dada a diferencial de uma função, achar a função.

A função $f(x)$ assim achada chama-se uma *integral* da dada função, o processo de achá-la chama-se *integração* e a operação de integração é indicada pelo *sinal de integração** $\int$ posto antes da dada expressão diferencial; assim,

$$(3) \qquad \int f'(x)\,dx = f(x),$$

lê-se *integral de* $f'(x)\,dx$ *igual a* $f(x)$. A diferencial dx indica que x é a *variável de integração*. Por exemplo,

(a) se $f(x) = x^3$, então $f'(x)\,dx = 3\,x^2dx$ e

$$\int 3\,x^2dx = x^3.$$

(b) se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $f'(x)\,dx = \cos x\,dx$ e

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x.$$

(c) se $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, então $f'(x)\,dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$ e

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Como é aparente das explicações acima, *a derivação e a integração são operações inversas uma da outra*. Vamos pôr isto em destaque.

Diferenciando (3), temos

$$(4) \qquad d\int f'(x)\,dx = f'(x)\,dx.$$

---

*Diz a História que este sinal proveio da distorção de S, primeira letra da palavra soma

Substituindo o valor de $f'(x)\,dx$ [$= df(x)$] de (2) em (3), obtemos

$$(5) \qquad \int df(x) = f(x)\,.$$

Portanto, considerados como símbolos de operação, $\frac{d}{dx}$ e $\int \ldots dx$ são inversos um do outro, ou, se estamos usando diferenciais, d e $\int$ são inversos um do outro.

Quando d é seguido por $\int$, eles se neutralizam, como em (4), mas quando $\int$ é seguido por d, como em (5), isto não se dá em geral. A razão disto será vista no próximo parágrafo, quando dermos a definição de constante de integração.

127. — Constante de integração. Integral indefinida. Do parágrafo precedente resulta que

$$\int 3\,x^2dx = x^3, \qquad \text{pois} \qquad d\,(x^3) = 3\,x^2dx\,;$$

$$\int 3\,x^2dx = x^3 + 2 \qquad \text{pois} \qquad d\,(x^3 + 2) = 3\,x^2\,dx\,;$$

$$\int 3\,x^2dx = x^3 - 7 \qquad \text{pois} \qquad d\,(x^3 - 7) = 3\,x^2\,dx\,.$$

De fato, como $\qquad d\,(x^3 + C) = 3\,x^2\,dx\,,$

onde C é uma constante arbitrária, temos

$$\int 3\,x^2dx = x^3 + C.$$

Uma constante C surgida deste modo diz-se uma *constante de integração*; é um número independente da *variável de integração*. Como podemos dar a C tantos valores quantos quizermos, resulta que se uma dada expressão diferencial tem uma integral, ela tem uma infinidade, duas quaisquer delas diferindo apenas por uma constante. Logo

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C\,;$$

como C não é definida, a expressão

$$f(x) + C$$

chama-se *integral indefinida* de $f'(x)\,dx$.

É evidente que se $\phi(x)$ é uma função cuja derivada é $f(x)$, então $\phi(x) + C$, onde C é uma constante qualquer, é também uma função cuja derivada é $f(x)$. Temos, pois, o

TEOREMA. *Se duas funções diferem por uma constante, elas tem a mesma derivada.*

Não é óbvio, contudo, que se $\phi(x)$ é uma função cuja derivada é $f(x)$, então toda função tendo $f(x)$ por derivada seja de forma

$$\phi(x) + C\,,$$

onde C é uma constante. Em outras palavras, resta demonstrar o

TEOREMA RECÍPROCO. *Se duas funções tem a mesma derivada, elas diferem por uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ duas funções tendo mesma derivada $f(x)$. Ponhamos

$F(x) = \phi(x) - \psi(x)$; então, por hipótese,

$$(1) \qquad F'(x) = \frac{d}{dx}[\phi(x) - \psi(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

Mas, pelo teorema do valor médio (*D*), § 116, temos

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x\, F'(x + \theta.\ \Delta x)\,. \quad (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \quad F(x + \Delta x) - F(x) = 0\,,$$

pois, por (1), a derivada de $F(x)$ é nula para todo valor de x.

Logo $$F(x + \Delta x) = F(x)\,,$$

o que mostra que a função

$$F(x) = \phi(x) - \psi(x)$$

não muda de valor quando x varia, isto é, que $\phi(x)$ e $\psi(x)$ diferem só por uma constante.

A constante C pode ser determinada quando conhecermos o valor da integral para algum valor da variável. Isto será ilustrado por numerosos exemplos no próximo capítulo; no presente nos dedicaremos apenas a mostrar como se acha a integral indefinida de uma dada função.

No que se segue, admitiremos que *tôda função contínua tem uma integral indefinida*, resultado êste cuja demonstração está fora do escopo deste livro. A sua validade para as funções elementares, contudo, vai aparecer claramente nos estudos dos próximos capítulos.

Em todos os casos de integração indefinida pode-se verificar a exatidão dos resultados obtidos pela propriedade seguinte: *a diferencial da integral deve ser igual à dada expressão diferencial.*

128. — Integrais imediatas. O cálculo diferencial fornece uma Regra Geral de derivação (§ 27). No cálculo integral não existe, porém, uma regra para integrar qualquer função*. Cada caso de integração requer um processo específico no qual intervêm resu - tados, já obtidos, sobre a derivação, precisamente, devemos estar aptos a responder a perguntas: Que função, quando derivada, dá a função que quero integrar? Essencialmente, a integração procede, pois, por tentativas. Há, contudo, tabelas que facilitam o trabalho, como a que damos a seguir, chamada das *integrais imediatas*. Para o cômputo de uma integral qualquer, comparamos a dada expressão diferencial com as da tabela. Se ela for igual a uma das da tabela, o resultado é conhecido; se não for, procuramos reduzí-la a uma das da tabela com o emprego de determinadas regras e também de artifícios, que só a prática pode sugerir. Por isto, grande parte de nosso texto será dedicado à explicação de métodos para integrar as funções que mais frequentemente aparecem na resolução dos problemas práticos.

De cada resultado de derivação pode ser sempre obtida uma fórmula de integração. Assim, de III, § 94, obtém-se

(a) a integral de uma soma algébrica de funções é a soma algébrica das integrais das parcelas.

---

* Embora se saiba que a integral de uma dada função existe, pode não ser possível exprimí-la em termos das funções que conhecemos.

Demonstração. Derivando a expressão

$$\int du + \int dv - \int dw ,$$

sendo u, v e w funções de uma única variável, obtemos

$$du + dv - dw . \qquad \text{Por III, § 94}$$

$$(1) \quad \therefore \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw .$$

De IV, § 94, obtém-se

(b) *Um fator constante pode ser escrito antes ou depois do sinal de integração.*

Demonstração. Diferenciando a expressão

$$a \int dv$$

obtemos $$adv . \qquad \text{Por IV, § 94}$$

$$(2) \quad \therefore \int a\, dv = a \int dv .$$

Pela importância que tem, as duas regras acima encabeçarão a lista abaixo das *integrais imediatas.*

INTEGRAIS IMEDIATAS

$$(1) \qquad \int (dy + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw .$$

$$(2) \qquad \int adv = a \int dv .$$

$$(3) \qquad \int dx = x + C .$$

$$(4) \qquad \int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C . \qquad (n \neq -1)$$

$$(5) \qquad \int \frac{dv}{v} = \ln v + C$$

$$= \ln v + \ln c = \ln cv .$$

[pondo $C = \ln c$].

(6) $$\int a^v\,dv = \frac{a^v}{\ln a} + C\,.$$

(7) $$\int e^v\,dv = e^v + C\,.$$

(8) $$\int \operatorname{sen} v\,dv = -\cos v + C\,.$$

(9) $$\int \cos v\,dv = \operatorname{sen} v + C\,.$$

(10) $$\int \sec^2 v\,dv = \operatorname{tg} v + C.$$

(11) $$\int \operatorname{cossec}^2 v\,dv = -\operatorname{ctg} v + C$$

(12) $$\int \sec v \operatorname{tg} v\,dv = \sec v + C\,.$$

(13) $$\int \operatorname{cossec} v \operatorname{ctg} v\,dv = -\operatorname{cossec} v + C\,.$$

(14) $$\int \operatorname{tg} v\,dv = -\ln \cos v + C = \ln \sec v + C\,.$$

(15) $$\int \operatorname{ctg} v\,dv = \ln \operatorname{sen} v + C\,.$$

(16) $$\int \sec v\,dv = \ln(\sec v + \operatorname{tg} v) + C\,.$$

(17) $$\int \operatorname{cossec} v\,dv = \ln(\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v) + C\,.$$

(18) $$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C\,.$$

(19) $$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v - a}{v + a} + C\,. \qquad (v^2 > a^2)$$

(19a) $$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + v}{a - v} + C\,. \qquad (v^2 < a^2)$$

(20) $$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{a} + C\,.$$

(21) $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C\,.$$

(22) $$\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{a} + C.$$

(23) $$\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm$$

$$\pm \frac{a^2}{2} \ln (v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + C.$$

129. — Fórmulas (3), (4) e (5). Estas são demonstradas fàcilmente.

DEMONSTRAÇÃO de (3). Como $d(x + C) = dx$, II, § 94 obtemos

$$\int dx = x + C.$$

DEMONSTRAÇÃO DE (4). Como

$$d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1} + C\right) = v^n\, dv, \qquad \text{VI, § 94}$$

obtemos $$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

Isto é verdadeiro para todos os valores de n exceto $n = -1$, pois quando $n = -1$, (4) envolve divisão por zero.

O caso em que $n = -1$ vem sob (5).

DEMONSTRAÇÃO DE (5). Como

$$d(\ln v + C) = \frac{dv}{v}, \qquad X, \text{ § 94}$$

obtemos $$\int \frac{dv}{v} = \ln v + C.$$

O resultado obtido pode também ser posto sob a forma

$$\int \frac{dv}{v} = \ln c\, v,$$

indicando-se a constante C de integração por $\ln c$.

A fórmula (5) diz que *se a expressão sob o sinal de integração é uma fração cujo numerador é a diferencial do denominador, então a integral é o logaritmo natural do denominador.*

EXEMPLOS ILUSTRATIVOS *

Calcule as integrais abaixo

1. $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$, por (4), onde $v = x$ e $n = 6$.

2. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$, por (4), onde $v = x$ e $n = \frac{1}{2}$.

3. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$, por (4), onde $v = x$ e $n = -3$.

4. $\int ax^5 dx = a\int x^5 dx = \frac{ax^6}{6} + C$. por (2) e (4)

5. $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx$

$= \int 2x^3\,dx - \int 5x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 4\,dx$ por (1)

$= 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 4\int dx$ por (2)

$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C$.

Nota. Embora cada integração requeira uma constante arbitrária, escrevemos apenas uma constante que é, pois, a soma das demais.

6. $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2}\right) dx$

$= \int 2ax^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int bx^{-2}\,dx + \int 3cx^{\frac{2}{3}}\,dx$ por (1)

$= 2a\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - b\int x^{-2}\,dx + 3c\int x^{\frac{2}{3}}\,dx$ por (2)

$= 2a \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3c \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C$ por (4)

$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}} + C$.

7. $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\,dx = a^2x + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3} + C$.

---

* Quando aprendendo a integrar, o estudante deve exercitar-se, oralmente, integrando funções simples.

Sugestão. Desenvolva primeiro.

$$8. \qquad \int (a^2 + b^2x^2)^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,b^2} + C\,.$$

Solução. Esta pode ser conduzida à forma (4). De fato, basta inserir o fator $2\,b^2$ depois do sinal de integração e antes de xdx e $\frac{1}{2b^2}$ antes do sinal de integração, pois estas operações se neutralizam por (2).

Confronto com (4): $v = a^2 + b^2x^2$, $n = \frac{1}{2}$
$dv = 2\,b^2x\,dx$.

$$\int (a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{2b^2}\int (a^2+b^2x^2)^{\frac{1}{2}} (2\,b^2x\,dx) \left[= \frac{1}{2b^2}\int v^{\frac{1}{2}}\,dv = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{3\,b^2} + C, \text{por}(4) \right]$$

$$= \frac{(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,b^2} + C.$$

Nota. Chama-se a atenção do leitor para não transferir uma função da variável de um lado para outro do sinal de integração, pois isto muda o valor do resultado.

$$9 \qquad \int \frac{3\,ax\,dx}{b^2 + c^2x^2} = \frac{3\,a}{2\,c^2} \ln (b^2 + c^2x^2) + C\,.$$

Solução. $$\int \frac{3\,ax\,dx}{b^2 + c^2x^2} = 3\,a \int \frac{x\,dx}{b^2 + c^2x^2} \qquad \text{Por (2)}$$

Esta se assemelha a (5). Se inserimos o fator $2\,c^2$ depois do sinal de integração e o fator $\frac{1}{2\,c^2}$ antes, o valor da expressão não mudará

Confronto com (5): $v = b^2 + c^2x^2$, $dv =$
$= 2\,c^2x\,dx$.

$$\text{Logo } 3\,a \int \frac{x\,dx}{b^2 + c^2x^2} = \frac{3\,a}{2\,c^2}\int \frac{2\,c^2x\,dx}{b^2 + c^2x^2} \left[= \frac{3\,a}{2\,c^2}\int \frac{dv}{v} = \right.$$

$$\left. = \frac{3\,a}{2\,c^2} \ln v + C, \text{ por (5)} \right]$$

$$= \frac{3\,a}{2\,c^2} \ln (b^2 + c^2x^2) + C\,.$$

$$10. \qquad \int \frac{x^3\,dx}{x+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln (x+1) + C\,.$$

Solução. Dividamos primeiro o numerador pelo denominador. Temos

$$\frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

Substituindo na integral, usando (1) e integrando, obtemos a resposta.

11. $$\int \frac{2x-1}{2x+3}\,dx = x - \ln(2x+3)^2 + C.$$

SOLUÇÃO. Dividindo, $\frac{2x-1}{2x+3} = 1 - \frac{4}{2x-3}$. Substituindo e usando (1), etc.

A função a ser integrada diz-se *integrando*. Assim, no exemplo ilustrativo 1, p. 238, o integrando é x^6.

PROBLEMAS

Verificar as integrações abaixo.

1. $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

3. $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$

6. $\int 3ay^2\,dy = ay^3 + C.$

7. $\int \frac{2\,dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C.$

8. $\int \sqrt{ax}\,dx = \frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} + C.$

10. $\int \sqrt[3]{3t}\,dt = \frac{(3t)^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$

11. $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{x} - 3\right)dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{10x^{\frac{3}{2}}}{3} - 3x + C$

12. $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2x^2 - 4\sqrt{x} + C.$

13. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + C.$

14. $\int \sqrt{x}\,(3x-2)\,dx = \frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$

15. $\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x}\,dx = \frac{x^3}{3} - 6x + 5\ln x + C.$

16. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{3b} + C.$

17. $\int \frac{dy}{\sqrt{a-by}} = -\frac{2\sqrt{a-by}}{b} + C.$

18. $\int (a + bt)^2 \, dt = \frac{(a + bt)^3}{3b} + C.$

19. $\int x (2 + x^2)^2 \, dx = \frac{(2 + x^2)^3}{6} + C.$

20. $\int y (a - by^2) \, dy = -\frac{(a - by^2)^2}{4b} + C.$

21. $\int t \sqrt{2t^2 + 3} \, dt = \frac{(2t^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}{6} + C.$

22. $\int x (2x + 1)^2 \, dx = x^4 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$

23. $\int \frac{4x^2 \, dx}{\sqrt{x^3 + 8}} = \frac{8\sqrt{x^3 + 8}}{3} + C.$

24. $\int \frac{6z \, dz}{(5 - 3z^2)^2} = \frac{1}{5 - 3z^2} + C.$

25. $\int (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \, dx = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$

26. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \, dx}{\sqrt{x}} = -\frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{x})^3}{3} + C.$

27. $\int \sqrt{x} (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \, dx = \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C.$

28. $\int \frac{t^3 \, dt}{\sqrt{a^4 + t^4}} = \frac{\sqrt{a^4 + t^4}}{2} + C.$

29. $\int \frac{dy}{(a + by)^3} = -\frac{1}{2b(a + by)^2} + C.$

30. $\int \frac{x \, dx}{(a + bx^2)^3} = -\frac{1}{4b(a + bx^2)^2} + C.$

31. $\int \frac{t^2 \, dt}{(a + bt^3)^2} = -\frac{1}{3b(a + bt^3)} + C.$

32. $\int z (a + bz^3)^2 \, dz = \frac{a^2 z^2}{2} + \frac{2abz^5}{5} + \frac{b^2 z^8}{8} + C.$

33. $\int x^{n-1} \sqrt{a + bx^n} \, dx = \frac{2(a + bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3nb} + C.$

34. $\int \frac{(2x + 3) \, dx}{\sqrt{x^2 + 3x}} = 2\sqrt{x^2 + 3x} + C.$

35. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{x^3+3\,x}} = \frac{2\sqrt{x^3+3\,x}}{3} + C\,.$

36. $\displaystyle\int \frac{(2+\ln x)\,dx}{x} = \frac{(2+\ln x)^2}{2} + C\,.$

37. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx = \int (\operatorname{sen} x)^2 \cos x\,dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

Sugestão. Use (4), pondo $v = \operatorname{sen} x$, $dv = \cos x\,dx$, $n = 2$.

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2\,a} + C\,.$

39. $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2\,x \cos^2 2\,x\,dx = -\frac{\cos^3 2\,x}{6} + C\,.$

40. $\displaystyle\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C\,.$

41. $\displaystyle\int \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{b+\operatorname{sen} ax}} = \frac{2\sqrt{b+\operatorname{sen} ax}}{a} + C\,.$

42. $\displaystyle\int \left(\frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^2 dx = -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C\,.$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3\,x} = \frac{\ln(2+3\,x)}{3} + C\,.$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{2+x^3} = \frac{\ln(2+x^3)}{3} + C\,.$

45. $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{a+bt^2} = \frac{\ln(a+bt^2)}{2\,b} + C\,.$

46. $\displaystyle\int \frac{(2\,x+3)\,dx}{x^2+3\,x} = \ln(x^2+3\,x) + C\,.$

47. $\displaystyle\int \frac{(y+2)\,dy}{y^2+4\,y} = \frac{\ln(y^2+4\,y)}{2} + C\,.$

48. $\displaystyle\int \frac{e^\theta\,d\theta}{a+be^\theta} = \frac{\ln(a+be^\theta)}{b} + C\,.$

49. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1-\cos x} = \ln(1-\cos x) + C\,.$

50. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 y\,dy}{a+b\operatorname{tg} y} = \frac{1}{b}\ln(a+b\operatorname{tg} y) + C\,.$

51. $\displaystyle\int \frac{(2\,x+3)\,dx}{x+2} = 2\,x - \ln(x+2) + C\,.$

52. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + 3\ln(x+1) + C$.

53. $\int \frac{(x+4)\,dx}{2x+3} = \frac{x}{2} + \frac{5\ln(2x+3)}{4} + C$.

54. $\int \frac{e^{2s}\,ds}{e^{2s}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2s}+1) + C$.

55. $\int \frac{ae^{\theta}+b}{ae^{\theta}-b}\,d\theta = 2\ln(ae^{\theta}-b) - \theta + C$.

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

56. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}$.

Solução. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = -\frac{1}{5}\int (6-5x^2)^{-\frac{1}{3}}(-10x\,dx) = -\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C$.

Verificação. $d\{-\frac{3}{10}(6-5x^2)^{\frac{2}{3}} + C\} = -\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}(6-5x^2)^{-\frac{1}{3}}(-10x)dx$.

$$= \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}.$$

57. $\int (x^3+3x^2)\,dx$.

58. $\int \frac{(x^2-4)\,dx}{x^4}$.

59. $\int \left(\frac{\sqrt{5x}}{5} + \frac{5}{\sqrt{5x}}\right)dx$.

60. $\int \sqrt[3]{by^2}\,dy$.

61. $\int \frac{dt}{t\sqrt{2t}}$.

62. $\int \sqrt[3]{2-3x}\,dx$.

63. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

64. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-5}}$.

65. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{3+2x}}$.

66. $\int \frac{3\,dx}{2+3x}$.

67. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

68. $\int \frac{t\,dt}{3t^2+4}$.

69. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

70. $\int \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^3 dy$.

74. $\int \frac{(2x+7)\,dx}{x+3}$.

75. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x+2}$.

76. $\int \frac{(x^3+3x)\,dx}{x^2+1}$.

77. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{\sqrt[3]{1+3x+2x^2}}$.

78. $\int \frac{(e^t+2)\,dt}{e^t+2t}$.

71. $\int \frac{\operatorname{sen} a\theta \, d\theta}{\cos a\theta + b}$.

72. $\int \frac{\operatorname{cossec}^2 \phi \, d\phi}{\sqrt{2 \operatorname{ctg} \phi + 3}}$.

73. $\int \frac{(2x + 5)\, dx}{x^2 + 5x + 6}$.

79. $\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)\, dx}{\sqrt{e^x - \cos x}}$.

80. $\int \frac{\sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta \, d\theta}{3 \sec 2\theta - 2}$.

81. $\int \frac{\sec^2 2t \, dt}{\sqrt{5 + 3 \operatorname{tg} 2t}}$.

130. – Demonstrações de (6) e (7) Resultam imediatamente das fórmulas correspondentes de derivação, XI e XI a, § 94.

Exemplo ilustrativo. Prove que $\int ba^{2x}\, dx = \frac{ba^{2x}}{2 \ln a} + C$.

SOLUÇÃO. $\int ba^{2x}\, dx = b \int a^{2x}\, dx$.

Esta se assemelha a (6). Ponhamos $v = 2x$; tem-se $dv = 2\,dx$. Inserindo o fator 2 antes de dx e o fator $\frac{1}{2}$ antes do sinal de integração, temos

$$b \int a^{2x}\, dx = \frac{b}{2} \int a^{2x}\, 2\, dx = \frac{b}{2} \int a^{2x}\, d\,(2x) \left[= \frac{b}{2} \int a^v\, dv = \frac{b}{2} \frac{a^v}{2 \ln a} \right] =$$

$$= \frac{b}{2} \cdot \frac{a^{2x}}{\ln a} + C. \qquad \text{Por (6).}$$

PROBLEMAS

Calcule as seguintes integrais

1. $\int 6\, e^{3x}\, dx = 2\, e^{3x} + C$.

2. $\int e^{\frac{x}{n}}\, dx = ne^{\frac{x}{n}} + C$.

3. $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C$.

4. $\int 10^x\, dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$.

5. $\int a^{ny}\, dy = \frac{a^{ny}}{n \ln a} + C$.

6. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}} = 2\, e^{\sqrt{x}} + C$.

7. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + C$.

8. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) - 2x + C$.

9. $\int xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + C$.

10. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx = e^{\operatorname{sen} x} + C.$

11. $\int e^{\operatorname{tg} \theta} \sec^2 \theta \, d\theta = \epsilon^{\operatorname{tg} \theta} + C.$

12. $\int \sqrt{e^t} \, dt = 2 \sqrt{e^t} + C.$

13. $\int a^x e^x \, dx = \dfrac{a^x e^x}{1 + \ln a} + C.$

14. $\int a^{2x} \, dx = \dfrac{a^{2x}}{2 \ln a} + C.$

15. $\int (e^{5x} + a^{5x}) \, dx = \dfrac{1}{5} \left(e^{5x} + \dfrac{a^{5x}}{\ln a} \right) + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados, por derivação.

16. $\int 5 \, e^{ax} \, dx.$

17. $\int \dfrac{3 \, dx}{e^x}.$

18. $\dfrac{4 \, dt}{\sqrt{e^t}}.$

19. $\int e^{ax} \, dx.$

20. $\int \dfrac{dx}{4^{2x}}.$

21. $\int x^2 \, e^{x^3} \, dx.$

22. $\int \left(\dfrac{e^x + 4}{\epsilon^x} \right) dx.$

23. $\int \dfrac{e^x \, dx}{e^x - 2}.$

24. $\int x \, (\epsilon^{x^2} + 2) \, dx.$

25. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}} \, dx.$

26. $\int 2t^2 \, dt.$

27. $\int \dfrac{a \, d\theta}{b^{3\theta}}.$

28. $\int 6 \, x e^{-x^2} \, dx.$

29. $\int (e^{2x})^2 \, dx.$

30. $\int \epsilon^{\cos 2x} \operatorname{sen} 2x \, dx.$

31. $\int \dfrac{x^2 \, dx}{\epsilon^{x^3}}.$

131. Demonstrações de (8)—(17). As fórmulas (8)—(13) resultam logo das fórmulas correspondentes de derivação, XIII, etc. § 94.

DEMONSTRAÇÃO DE (14). $\int \operatorname{tg} v \, dv = \int \dfrac{\operatorname{sen} v \, dv}{\cos v}$

$$= - \int \frac{- \operatorname{sen} v \, dv}{\cos v}$$

$$= - \int \frac{d \, (\cos v)}{\cos v}$$

$$= -\ln \cos v + C \quad \text{(por (5))}.$$
$$= \ln \sec v + C.$$

$$\left[\text{pois } -\ln\cos v = -\ln \frac{1}{\sec v} = -\ln 1 + \ln \sec v = \ln \sec v.\right]$$

Demonstração de (15).

$$\int \operatorname{ctg} v\, dv = \int \frac{\cos v\, dv}{\operatorname{sen} v} = \int \frac{d\,(\operatorname{sen} v)}{\operatorname{sen} v}$$
$$= \ln \operatorname{sen} v + C. \qquad \text{Por (5)}$$

Demonstração de (16).

$$\text{Como } \sec v = \sec v \frac{\sec v + \operatorname{tg} v}{\sec v + \operatorname{tg} v} =$$
$$= \frac{\sec v \operatorname{tg} v + \sec^2 v}{\sec v + \operatorname{tg} v},$$
$$\int \sec v\, dv = \int \frac{\sec v \operatorname{tg} v + \sec^2 v}{\sec v + \operatorname{tg} v} dv$$
$$= \int \frac{d\,(\sec v + \operatorname{tg} v)}{\sec v + \operatorname{tg} v}$$
$$= \ln (\sec v + \operatorname{tg} v) + C. \qquad \text{Por (5)}$$

Demonstração de (17). Como $\operatorname{cossec} v =$

$$= \operatorname{cossec} v \frac{\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v}{\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v} = \frac{-\operatorname{cossec} v \operatorname{ctg} v + \operatorname{cossec}^2 v}{\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v},$$
$$\int \operatorname{cossec} v\, dv = \int \frac{-\operatorname{cossec} v \operatorname{ctg} v + \operatorname{cossec}^2 v}{\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v} dv$$
$$= \int \frac{d(\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v)}{\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v}$$
$$= \ln (\operatorname{cossec} v - \operatorname{ctg} v) + C. \quad \text{Por (5)}$$

Uma outra forma de (17) é

$$\int \operatorname{cossec} v\, dv = \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v + C. \text{ (ver Problema 4, p. 248).}$$

Exemplo ilustrativo 1. Prove que

$$\int \operatorname{sen} 2\,ax\, dx = -\frac{\cos 2\,ax}{2\,a} + C.$$

Solução. Ela se assemelha a (8). Realmente, pondo-se $v = 2\,ax$, portanto $dv = 2\,a\,dx$, inserindo-se o fator $2\,a$ antes de dx e o fator $\frac{1}{2a}$ antes do sinal de integração, obtemos

$$\int \operatorname{sen} 2ax\,dx = \frac{1}{2a}\int \operatorname{sen} 2ax \cdot 2a\,dx\left[= \frac{1}{2a}\int \operatorname{sen} v\,dv = -\frac{1}{2a}\cos v + C, \text{ por (8)}\right]$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot - \cos ax + C = -\frac{\cos 2\,ax}{2a} + C.$$

Exemplo ilustrativo 2. Prove que

$$\int (\operatorname{tg} 2\,s - 1)^2\,ds = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\,s + \ln\cos 2\,s + C\,.$$

Solução. $$(\operatorname{tg} 2\,s - 1)^2 = \operatorname{tg}^2 2\,s - 2\operatorname{tg} 2\,s + 1\,.$$

$$\operatorname{tg}^2 2\,s = \sec^2 2\,s - 1\,. \qquad \text{Por (2), § 2}$$

Logo, substituindo

$$\int (tg\ 2s - 1)^2\,ds = \int (\sec^2 2\,s - 2\operatorname{tg} 2\,s)ds = \int \sec^2 2\,s\,ds - 2\int \operatorname{tg} 2\,s\,ds\,.$$

Ponhamos $v = 2\,s$. Então $dv = 2\,ds$. Usando (10) e (14), os passos são como segue.

$$\int \sec^2 2s\,ds = \tfrac{1}{2}\int \sec^2 2\,s\,d\,(2\,s)\left[= \tfrac{1}{2}\int \sec^2 v\,dv = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} v\right] = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2\,s\,.$$

$$\int \operatorname{tg} 2\,s\,ds = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2\,s\,d(2\,s)\left[= \tfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} v\,dv = -\tfrac{1}{2}\ln\cos v\right] = -\tfrac{1}{2}\ln\cos 2\,s.$$

PROBLEMAS

Verificar as seguintes integrações

1. $\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\operatorname{sen} mx + C.$

2. $\int \operatorname{tg} bx\,dx = \frac{1}{b}\ln\sec bx + C.$

3. $\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \operatorname{tg} ax) + C.$

4. $\int \operatorname{cossec} v\,dv = \ln\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + C.$

5. $\int \sec 3t\operatorname{tg} 3t\,dt = \tfrac{1}{3}\sec 3\,t + C.$

6. $\int \operatorname{cossec} ay \operatorname{ctg} ay \, dy = -\frac{1}{a} \operatorname{cossec} ay + C.$

7. $\int \operatorname{cossec}^2 3x \, dx = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C.$

8. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \, dx = 2 \ln \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C.$

9. $\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{ds}{\cos^2 s} = \operatorname{tg} s + C.$

12. $\int (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta)^2 \, d\theta = \operatorname{tg} \theta - \operatorname{ctg} \theta + C.$

13. $\int (\sec \phi - \operatorname{tg} \phi)^2 \, d\phi = 2(\operatorname{tg} \phi - \sec \phi) - \phi + C.$

14. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{cossec} x + C.$

Sugestão para **14.** Multiplique o numerador e o denominador por $1 - \cos x$ e eduza antes de integrar

15. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x - \sec x + C.$

16. $\int \frac{\operatorname{sen} s \, ds}{1 + \cos s} = \ln (1 + \cos s) + C.$

17. $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{1 + \operatorname{tg} x} = \ln (1 + \operatorname{tg} x) + C.$

18. $\int x \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.$

19. $\int (x + \operatorname{sen} 2x) \, dx = \frac{1}{2} (x^2 - \cos 2x) + C.$

20. $\int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\sqrt{4 - \cos x}} = 2\sqrt{4 - \cos x} + C.$

21. $\int \frac{(1 + \cos x) \, dx}{x + \operatorname{sen} x} = \ln (x + \operatorname{sen} x) + C.$

22. $\int \frac{\sec^2 \theta \, d\theta}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \theta}} = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \theta} + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

23. $\int \operatorname{sen} \frac{2x}{3} \, dx.$

24. $\int \cos (b + ax) \, dx.$

25. $\int \operatorname{cossec}^2 (a - bx)\, dx.$

26. $\int \sec \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

27. $\int \operatorname{cossec} \frac{a\phi}{b} \operatorname{ctg} \frac{a\phi}{b}\, d\phi.$

28. $\int e^x \operatorname{ctg} e^x\, dx.$

29. $\int \sec^2 2\,ax\, dx.$

30. $\int \operatorname{tg} \frac{x}{3}\, dx.$

31. $\int \frac{dt}{\operatorname{tg} 5t}.$

32. $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 4\,\theta}.$

33. $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 7\,y}.$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}.$

35. $\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 3\,t}.$

36. $\int \frac{d\phi}{\cos 4\phi}.$

37. $\int \frac{a\, dx}{\cos^2 bx}.$

38. $\int \left(\sec 2\,\theta - \operatorname{cossec} \frac{\theta}{2}\right) d\theta.$

39. $\int (\operatorname{tg} \phi + \sec \phi)^2\, d\phi.$

40. $\int \left(\operatorname{tg} 4\,s - \operatorname{ctg} \frac{s}{4}\right) ds.$

41. $\int (\operatorname{ctg} x - 1)^2\, dx.$

42. $\int (\sec t - 1)^2\, dt.$

43. $\int (1 - \operatorname{cossec} y)^2 dy.$

44. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

45. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}.$

46. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\,x\, dx}{3 + \cos 2\,x}.$

47. $\int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{a + b \operatorname{sen} t}}.$

48. $\int \frac{\operatorname{cossec} \theta \operatorname{ctg} \theta\, d\theta}{5 - 4 \operatorname{cossec} \theta}.$

49. $\int \frac{\operatorname{cossec}^2 x\, dx}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg} x}}.$

50. $\int \frac{\sqrt{5 + 2 \operatorname{tg} x}\, dx}{\cos^2 x}.$

132. — Demonstrações de (18)-(21). As fórmulas (18) e (20) resultam imediatamente das fórmulas correspondentes de derivação.

Demonstração de (18). Como

$$d\left(\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C\right) = \frac{1}{a} \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1 + \left(\frac{v}{a}\right)^2} = \frac{dv}{v^2 + s^2}, \text{ por XXII, § 60,}$$

obtemos
$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C.$$

DEMONSTRAÇÕES DE (19) E (19a). Demonstremos primeiro (19). Temos, pela álgebra,

$$\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a} = \frac{2a}{v^2-a^2}.$$

Logo $$\frac{1}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{v-a} - \frac{1}{v+a}\right].$$

Então $$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{dv}{v-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dv}{v+a} \quad \text{por (1)}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln(v-a) - \frac{1}{2a}\ln(v+a) \quad \text{por (5)}$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{v-a}{v+a} + C. \quad \text{por (2), § 1.}$$

DEMONSTRAÇÃO DE (19a). Pela álgebra,

$$\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} = \frac{2a}{a^2-v^2}.$$

O resto da demonstração prossegue como acima.

Nota. As integrais em (19) e (19*a*) satisfazem a relação

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2} = -\int \frac{dv}{a^2-v^2}.$$

Logo, uma ou outra pode ser aplicada num dado caso. Mais tarde veremos que em muitos exemplos deve-se dar preferência a uma das duas integrais.

DEMONSTRAÇÃO DE 20. Como

$$d\left(\text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C\right) = \frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{a}\right)^2}} = \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}, \quad \text{por XX, § 94,}$$

obtemos $$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}} = \text{arc sen}\,\frac{v}{a} + C.$$

DEMONSTRAÇÃO DE 21. Seja $v = a\,\text{tg}\,z$, onde z é uma nova variável; diferenciando, $dv = a\sec^2 z\,dz$. Logo, por substituição,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 z \, dz}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 z + a^2}} = \int \frac{\sec^2 z \, dz}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}}$$

$$= \int \sec z \, dz = \ln (\sec z + \operatorname{tg} z) + c \quad \text{(por (16))}$$

$$= \ln (\operatorname{tg} z + \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}) + c. \quad \text{Por (2), § 2}$$

Mas, $\operatorname{tg} z = \dfrac{v}{a}$; logo,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \ln \left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + 1} \right) + c$$

$$= \ln \frac{v + \sqrt{v^2 + a^2}}{a} + c$$

$$= \ln (v + \sqrt{v^2 + a^2}) - \ln a + c.$$

Pondo $C = -\ln a + c$, obtemos

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \ln (v + \sqrt{v^2 + a^2}) + C.$$

Do mesmo modo, pondo $v = a \sec z$, $dv = a \sec z \operatorname{tg} z \, dz$, obtemos

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec z \operatorname{tg} z \, dz}{\sqrt{a^2 \sec z - a^2}} = \sec z \, dz$$

$$= \ln (\sec z + \operatorname{tg} z) + c \qquad \text{por (16)}$$

$$= \ln (\sec z + \sqrt{\sec^2 z - 1}) + c \qquad \text{por (2), § 2}$$

$$= \ln \left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - 1} \right) + c = \ln (v + \sqrt{v^2 - a^2}) + C.$$

Exemplo ilustrativo. Calcule a integral

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{3} + C.$$

Solução. Ela se assemelha a (18). Ponhamos $v^2 = 4x^2$ e $a^2 = 9$; então $v = 2x$, $dv = 2\,dx$ e $a = 3$. Logo, se multiplicarmos o numerador por 2 e dividirmos a integral por 2, obteremos

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{2} \int \frac{2\,dx}{(2x)^2 + (3)^2} \left[= \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v}{a} + C. \text{ Por (18)} \right] = \frac{1}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{3} + C.$$

PROBLEMAS

Calcular as Integrais

1. $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \text{arc tg} \frac{x}{3} + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x-2}{x+2}\right) + C.$

3. $\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}} = \text{arc sen} \frac{y}{5} + C.$

4. $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-16}} = \ln (s + \sqrt{s^2-16}) + C.$

5. $\int \frac{dx}{9x^2-4} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3} \text{arc sen} \frac{3x}{4} + C.$

7. $\int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right) + C.$

8. $\int \frac{dt}{4-9t^2} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{2+3t}{2-3t}\right) + C.$

9. $\int \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}} = \text{arc tg}\, e^x + C.$

10. $\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{4-\text{sen}^2\theta} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2+\text{sen}\,\theta}{2-\text{sen}\,\theta}\right) + C.$

11. $\int \frac{b\, dx}{a^2x^2-c^2} = \frac{b}{2ac} \ln \left(\frac{ax-c}{ax+c}\right) + C.$

12. $\int \frac{5x\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{5}{2} \text{arc sen}\, x^2 + C.$

13. $\int \frac{ax\, dx}{x^4+b^4} = \frac{a}{2b^2} \text{arc tg} \frac{x^2}{b^2} + C.$

14. $\int \frac{dt}{(t-2)^2+9} = \frac{1}{3} \text{arc tg} \left(\frac{t-2}{3}\right) + C.$

15. $\int \frac{dy}{\sqrt{1+a^2y^2}} = \frac{1}{a} \ln (ay + \sqrt{1+a^2y^2}) + C.$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{4-(u+3)^2}} = \text{arc sen} \left(\frac{u+3}{2}\right) + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}$. 22. $\int \frac{3\,dy}{9y^2 - 16}$. 27. $\int \frac{6t\,dt}{8 - 3t^2}$.

18. $\int \frac{dy}{\sqrt{9y^2 + 4}}$. 23. $\int \frac{ds}{\sqrt{4s^2 + 5}}$. 28. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{\sqrt{4 + \cos^2\theta}}$.

19. $\int \frac{dt}{4t^2 + 25}$. 24. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^4 - 4}}$. 29. $\int \frac{dx}{m^2 + (x + n)^2}$.

20. $\int \frac{dx}{25x^2 - 4}$. 25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2 + 3}}$. 30. $\int \frac{du}{4 - (2u - 1)^2}$.

21. $\int \frac{7\,dx}{3 + 7x^2}$. 26. $\int \frac{2e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$. 31. $\int \frac{7x^2\,dx}{5 - x^6}$.

As fórmulas (18)-(21) envolvem expressões quadráticas ($v^2 \pm a^2$, $a^2 - v^2$) com dois termos apenas. Se uma integral envolve uma expressão quadrática contendo três termos, esta pode ser reduzida a uma com dois termos completando o quadrado, como mostram os exemplos seguintes:

Exemplo ilustrativo 1. Verificar o seguinte:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{2} + C.$$

Solução. $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x + 1)^2 + 4$.

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2}.$$

Esta está sob a forma (18). Seja, realmente, $v = x + 1$, $a = 2$. Então $dv = dx$ e a integral acima torna-se

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{2} + C.$$

Exemplo ilustrativo 2. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{2x - 1}{3} + C$.

Solução. Esta é da forma (20), pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Temos $2 + x - x^2 = 2 - \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Seja $v = x - \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$. Então $dv = dx$.

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = 2 \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} =$$

$$= 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{a} + C, \qquad \text{por (20)}$$

$$= 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{2x - 1}{2} + C.$$

Exemplo ilustrativo 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} = \frac{1}{10} \ln \frac{3x - 3}{3x + 7} + C.$

Solução. $3x^2 + 4x - 7 = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right) = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{25}{9}\right) =$
$= 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right]$

$$\therefore \int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} = \int \frac{dx}{3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right]} = \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v^2 - a^2},$$

onde $v = x + \frac{2}{3}$, portanto $dv = dx$ e $a = \frac{5}{3}$. Aplicando (19) vem

$$\frac{1}{3} \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{6a} \ln \frac{v - a}{v + a} + C = \frac{1}{10} \ln \frac{x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}}{x + \frac{2}{3} + \frac{5}{3}} + C, \text{etc.}$$

PROBLEMAS

Calcule as seguintes integrais.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x + 3}\right) + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x - x^2 - 10} = -\frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x - 1}{3}\right) + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x^2 - 8x + 25} = \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x - 4}{3}\right) + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \operatorname{arc\,sen} (2x - 3) + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2 - 6v + 5} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{v - 5}{v - 1}\right) + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} = \operatorname{arc\,tg} (2x - 1) + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x-1}{4}\right) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x - x^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{x-4}\right) + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc sen}\,(x-1) + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{2as + s^2}} = \ln\,(s + a + \sqrt{2as + s^2}) + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 3y + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{2y + 3 - \sqrt{5}}{2y + 3 + \sqrt{5}}\right) + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}} = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + 2x + x^2}\right) + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{2}\right) + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{\sqrt{11}}\,\text{arc tg}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right) + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}} = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right) + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$

20. $\displaystyle\int \frac{dy}{3 - 2y - y^2}.$

21. $\displaystyle\int \frac{3\,du}{\sqrt{5 - 4u - u^2}}.$

22. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$

25. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{3t - 2t^2}}.$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$.

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 2x - x^2}$.

28. $\displaystyle\int \frac{dr}{r^2 - 2r - 3}$.

29. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}$.

30. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{3 + 2z - z^2}}$.

31. $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 8v + 15}}$.

32. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 - x^2 - 1}$.

33. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t - 2t^2}}$.

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 + 4x + 1}$.

35. $\displaystyle\int \frac{dw}{2w^2 + 2w + 1}$.

36. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{9x^6 - 3x^3 - 1}$.

37. $\displaystyle\int \frac{dt}{15 + 4t - t^2}$.

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 8}}$.

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 7}}$.

Quando o integrando é uma fração cujo numerador é uma expressão do primeiro grau e cujo denominador é do segundo ou a raiz quadrada de uma tal expressão, a integral pode ser reduzida a uma imediata, como mostraremos nos seguintes exemplos.

Exemplo ilustrativo 1. Prove que

$$\int \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 9}}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2 + 9} - \frac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{4x^2 + 9}\right) + C.$$

Solução. Multiplicando por dx e aplicando (1).

$$\int \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 9}}\,dx = \int \frac{3x\,dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$$

Por (4) e (21) obtemos, pois, a resposta.

Exemplo ilustrativo 2. Prove que

$$\int \frac{2x - 3}{3x^2 + 4x - 7}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right) - \frac{13}{30}\ln\frac{3x - 3}{3x + 7} + C.$$

Solução. $3x^2 + 4x - 7 = 3\left[\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}\right]$, pelo exemplo ilustrativo 3, p. 254.

Seja $v = x + \frac{2}{3}$. Então $x = v - \frac{2}{3}$ e $dx = dv$. Substituindo,

$$\int \frac{2x-3}{3x^2+4x-7}\,dx = \int \frac{2\left(v-\frac{2}{3}\right)-3}{3\left(v^2-\frac{25}{9}\right)}\,dv = \frac{1}{9}\int \frac{6v-13}{v^2-\frac{25}{9}}\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{2v\,dv}{v^2-\frac{25}{9}} - \frac{13}{9}\int \frac{dv}{v^2-\frac{25}{9}}.$$

Usando (5) e (19) e substituindo de novo $v = x + \frac{2}{3}$ temos o resultado acima.

PROBLEMAS

Calcule as seguintes integrais.

1. $\int \frac{(1+2x)dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + \ln(1+x^2) + C.$

2. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$

3. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \text{arc sen}\, x + C.$

4. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2+9} = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\text{arc tg}\frac{x}{3} + C.$

5. $\int \frac{(3s-2)ds}{\sqrt{9-s^2}} = -3\sqrt{9-s^2} - 2\,\text{arc sen}\frac{s}{3} + C.$

6. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + 3\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C.$

7. $\int \frac{(2x-5)\,dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3}\ln(3x^2-2) - \frac{5\sqrt{6}}{12}\ln\left(\frac{3x-\sqrt{6}}{3x+\sqrt{6}}\right) + C.$

8. $\int \frac{(5t-1)\,dt}{\sqrt{3t^2-9}} = \frac{5}{3}\sqrt{3t^2-9} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(t\sqrt{3}+\sqrt{3t^2-9}) + C.$

9. $\int \frac{(x+3)\,dx}{6x-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(6x-x^2) - \ln\left(\frac{x-6}{x}\right) + C.$

10. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$

11. $\int \frac{(1-x)\,dx}{4x^2-4x-3} = -\frac{1}{8}\ln(4x^2-4x-3) + \frac{1}{16}\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right) + C.$

12. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{1-6x-9x^2} = -\frac{1}{6}\ln(1-6x-9x^2)$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right) + C.$$

13. $$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x}\right) + C.$$

14. $$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\,\text{arc sen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$$

15. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\,\text{arc sen}\left(\frac{x-3}{6}\right) + C.$$

16. $$\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 3\sqrt{19-5x+x^2} + \tfrac{19}{2}\ln\left(x-\tfrac{5}{2}+\sqrt{19-5x+x^2}\right) + C.$$

17. $$\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5} - \tfrac{1}{4}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right) + C.$$

18. $$\frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = -2\sqrt{12x-4x^2-5} + \frac{9}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{2x-3}{2}\right) + C.$$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

19. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{x^2+1}$.

20. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{x^2-1}$.

21. $\int \frac{(3-x)\,dx}{4-3x^2}$.

22. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

23. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{3+5x^2}}$.

24. $\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+4x}$.

25. $\int \frac{(4x+5)\,dx}{\sqrt{3x-x^2}}$.

26. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-6x+5}$.

27. $\int \frac{(3-4x)\,dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

28. $\int \frac{(5x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

29. $\int \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

30. $\int \frac{(8-3x)\,dx}{x^2+x+1}$.

31. $\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

32. $\int \frac{(2x+7)\,dx}{2x^2+2x+1}$.

33. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{9x^2-3x-1}$.

34. $\int \frac{(6-x)\,dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$.

133. Demonstrações de (22) e (23). Para demonstrar (22) ponhamos

$$v = a \operatorname{sen} z .$$

Então $$dv = a \cos z \, dz ,$$

$$\sqrt{a^2 - v^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z} = a \cos z .$$

Logo

$$\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = a^2 \int \cos^2 z \, dz = \frac{a^2}{2} \int (\cos 2z + 1)\, dz \text{ por (5), § 2,}$$

$$= \frac{a^2}{4} \operatorname{sen} 2z + \frac{a^2}{2} z + C .$$

Para obter o resultado em têrmos de v, temos, pela primeira das igualdades acima,

$$z = \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{a'}, \quad \operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z = 2 \frac{v}{a} \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{a} .$$

Substituindo, obtemos (22).

Demonstração de (23). Pela substituição $v = a \operatorname{tg} z$, mostramos (V. § 132) imediatamente que

$$(1) \qquad \int \sqrt{v^2 + a^2}\, dv = \int a \sec z \cdot a \sec^2 z \, dz = a^2 \int \sec^3 z \, dz.$$

Anteriormente mostrou-se que

$$(2) \qquad \int \sec^3 z \, dz = \tfrac{1}{2} \sec z \operatorname{tg} z - \tfrac{1}{2} \ln (\sec z + \operatorname{tg} z) + C .$$

Como $\operatorname{tg} z = \frac{v}{a}$, $\sec z = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$, deduzimos de (1) e (2),

$$(3) \quad \int \sqrt{v^2 + a^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln (v + \sqrt{v^2 + a^2}) + C',$$

onde $C' = C - \frac{a^2}{2} \ln a$. Logo, (23) está demonstrada quando se toma o sinal positivo.

Pondo $v = a \sec z$, obtemos (ver § 132)

$$(4)\quad \int \sqrt{v^2 - a^2}\, dv = \int a \operatorname{tg} z \cdot a \sec z \operatorname{tg} z\, dz = a^2 \int \operatorname{tg}^2 z \sec z\, dz$$
$$= a^2 \int \sec^3 z\, dz - a^2 \int \sec z\, dz\, .$$

Comparando (4) com (2), temos

$$(5)\quad \int \sqrt{v^2 - a^2}\, dv = \frac{a^2}{2} \sec z \operatorname{tg} z - \frac{a^2}{2} \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) + C.$$

Mas $\sec z = \dfrac{v}{a}$; logo $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sqrt{v^2 - a^2}}{a}$. Substituindo em (5), obtemos (23) quando há o sinal negativo antes de a^2.

Exemplo ilustrativo 1. Prove o seguinte

$$\int \sqrt{4 - 9x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{4 - 9x^2} + \frac{2}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{2} + C\, .$$

Solução. Confronte com (22) e ponha $a^2 = 4$, $v = 3x$. Então $dv = 3\, dx$. Logo

$$\int \sqrt{4 - 9x^2}\, dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{4 - 9x^2}\, 3\, dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv.$$

Usando (22), e pondo $v = 3x$, $a^2 = 4$, obtemos a resposta.

Exemplo ilustrativo 2.

$$\int \sqrt{3x^2 + 4x - 7}\, dx =$$
$$= \frac{1}{6}(3x + 2)\sqrt{3x^2 + 4x - 7} - \frac{25\sqrt{3}}{18} \ln(3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x - 21}) + C.$$

Solução. Pelo exemplo ilustrativo 3, p. 254.

$$3x^2 + 4x - 7 = 3\left[\left(x + \tfrac{2}{3}\right)^2 - \tfrac{25}{9}\right] = 3(v^2 - a^2)$$

para $v = x + \frac{2}{3}$, $a = \frac{5}{3}$. Então $dv = dx$

$$\therefore \int \sqrt{3x^2 + 4x - 7}\, dx = \sqrt{3} \int \sqrt{v^2 - a^2}\, dv\, .$$

Usando (23), e pondo $v = x + \dfrac{2}{3}$, $a = \dfrac{5}{3}$, obtemos a resposta.

PROBLEMAS

Verifique as seguintes integrações.

1. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen} 2x + C.$

2. $\int \sqrt{1+9x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+9x^2} + \frac{1}{6}\ln(3x+\sqrt{1+9x^2})+C.$

3. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln(x+\sqrt{x^2-4}) + C.$

4. $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{25-9x^2} + \frac{25}{6}\operatorname{arc\,sen}\frac{3x}{5} + C.$

5. $\int \sqrt{4x^2+9}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})+C.$

6. $\int \sqrt{5-3x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen} x\sqrt{\frac{3}{5}} + C.$

7. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\operatorname{arc\,sen}\frac{x+1}{2} + C.$

8. $\int \sqrt{5-2x+x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2}$
$\qquad + 2\ln(x-1+\sqrt{5-2x+x^2}) + C.$

9. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) + C.$

10. $\int \sqrt{10-4x+4x^2}\,dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{10-4x+4x^2}.$
$\qquad + \frac{9}{4}\ln(2x-1+\sqrt{10-4x+4x^2}) + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

11. $\int \sqrt{16-9x^2}\,dx.$

12. $\int \sqrt{4+25x^2}\,dx.$

13. $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx.$

16. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx.$

17. $\int \sqrt{5+2x+x^2}\,dx.$

18. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\,dx.$

14. $\int \sqrt{8 - 3x^2}\, dx.$

15. $\int \sqrt{5 + 2x^2}\, dx.$

19. $\int \sqrt{4 - 2x - x^2}\, dx.$

20. $\int \sqrt{x^2 - 2x + 8}\, dx.$

134. — Diferenciais trigonométricas. Consideraremos agora algumas diferenciais trigonométricas que ocorrem com frequência e que podem ser conduzidas a integrais imediatas com simples transformações trigonométricas.

EXEMPLO 1. Achar $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\, du.$

Quando m ou n é um inteiro positivo ímpar, não importando o que o outro possa ser, a integração pode ser feita com simples transformações no integrando e usando (4).

$$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

Por exemplo, se m é ímpar, escrevemos

$$\operatorname{sen}^m u = \operatorname{sen}^{m-1} u \operatorname{sen} u\,.$$

Então, pois que $m - 1$ é par, o primeiro fator do segundo termo é uma potência de $\operatorname{sen}^2 u$ e pode ser expresso em potências de $\cos^2 u$ pela substituição

$$\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$$

A integral toma, pois, a forma

$$(1) \qquad \int (\text{soma de termos envolvendo } \cos u) \operatorname{sen} u\, du\,.$$

Como $\operatorname{sen} u\, du = -\,d(\cos u)$, cada têrmo a ser integrado é da forma $v^n\, dv$ sendo $v = \cos u$.

Semelhantemente, se n é ímpar, escrevemos $\cos^n u = \cos^{n-1} u \cos u$ e usamos a substituição $\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u$. Então, a integral torna-se

$$(2) \qquad \int (\text{soma de termos envolvendo } \operatorname{sen} u) \cos u\, du.$$

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx.$

SOLUÇÃO. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \cos x \, dx$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx \qquad \text{por (2), § 2}$$

$$= \int (\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x) \cos x \, dx$$

$$= \int (\operatorname{sen} x)^2 \cos x \, dx - 2 \int (\operatorname{sen} x)^4 \cos x \, dx + \int (\operatorname{sen} x)^6 \cos x \, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2 \operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C. \qquad \text{por (4)}$$

Aqui $v = \operatorname{sen} x$, $dv = \cos x \, dx$, e $n = 2$, 4, e 6 respectivamente.

Exemplo ilustrativo 2. Prove que $\int \operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x \, dx =$

$$= \frac{2}{3} \cos^3 \frac{1}{2} x - 2 \cos \frac{1}{2} x + C.$$

SOLUÇÃO. Seja $\frac{1}{2} x = u$. Então $x = 2u$, $dx = 2\,du$. Substituindo,

$$(3) \qquad \int \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2} x \, dx = 2 \int \operatorname{sen}^3 u \, du.$$

Ora $\int \operatorname{sen}^3 u \, du = \int \operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen} u \, du = \int (1 - \cos^2 u) \operatorname{sen} u \, du$

$$= \int \operatorname{sen} u \, du - \int \cos^2 u \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + \tfrac{1}{3} \cos^3 u + C.$$

Usando este resultado no segundo membro de (3) e substituindo u por $\frac{1}{2} x$, temos a resposta.

PROBLEMAS

Calcule as seguintes integrais

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$

2. $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 \theta + C;$

3. $\int \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi = -\frac{1}{3} \cos^3 \phi + C.$

4. $\int \operatorname{sen}^3 6x \cos 6x \, dx = \frac{1}{24} \operatorname{sen}^4 6x + C.$

5. $\int \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta = -\frac{1}{8}\cos^4 2\theta + C.$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\, dx = \operatorname{cossec} x - \frac{1}{3}\operatorname{cossec}^3 x + C.$

7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{\cos^2 \phi}\, d\phi = \sec\phi + \cos\phi + C.$

8. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x \, dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$

9. $\int \operatorname{sen}^5 x \, dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

10. $\int \cos^5 x \, dx = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.$

11. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\, dy = -2\sqrt{\cos y}\,(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y) + C.$

12. $\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\, dt = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}} t\,(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^4 t) + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

13. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta \, d\theta.$

14. $\int \cos^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

15. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x \, dx.$

16. $\int \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t \, dt.$

17. $\int \cos^3 \frac{\phi}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\, d\phi.$

18. $\int \operatorname{sen}^3 mt \cos^2 mt \, dt.$

19. $\int \operatorname{sen}^5 nx \, dx.$

20. $\int \cos^3 (a + bt)\, dt.$

21. $\int \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\, d\theta.$

22. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}\, dx.$

Exemplo II. Achar $\int \operatorname{tg}^n u \, du$ ou $\int \operatorname{ctg}^n u \, du.$

Estas integrais são fàcilmente calculáveis quando n é um inteiro de modo semelhante ao dos exemplos anteriores.

O método consiste, principalmente, em usar as igualdades

$$\operatorname{tg}^n u = \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u = \operatorname{tg}^{n-2} u\,(\sec^2 u - 1)$$

ou $\operatorname{ctg}^n u = \operatorname{ctg}^{n-2} u \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{ctg}^{n-2} u (\operatorname{cossec}^2 u - 1)$ Por (2), § 2.

Os exemplos abaixo mostram o que fazer a seguir.

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$.

SOLUÇÃO.
$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx \\ &= \int (\operatorname{tg} x)^2 \, d(\operatorname{tg} x) - \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \quad \text{Por (4) e (10)}\end{aligned}$$

Exemplo ilustrativo 2. Prove que

$$\int \operatorname{ctg}^3 2x \, dx = -\tfrac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 2x - \tfrac{1}{2} \ln \operatorname{sen} 2x + C$$

SOLUÇÃO. Seja $2x = u$. Então $x = \frac{1}{2} u$, $dx = \frac{1}{2} du$. Substituindo,

$$\int \operatorname{ctg}^3 2x \, dx = \tfrac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^3 u \, du. \tag{4}$$

Temos
$$\begin{aligned}\int \operatorname{ctg}^3 u \, du &= \int \operatorname{ctg} u \cdot \operatorname{ctg}^2 u \, du \\ &= \int \operatorname{ctg} u (\operatorname{cossec}^2 u - 1) \, du \\ &= \int \operatorname{ctg} u \operatorname{cossec}^2 u \, du - \int \operatorname{ctg} u \, du \\ &= -\tfrac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 u - \ln \operatorname{sen} u + C. \quad \text{Por (4) e (15)}\end{aligned}$$

Usando este resultado no segundo membro de (4) e pondo de novo $u = 2x$, obtemos a resposta.

EXEMPLO III. Achar $\int \sec^n u \, du$ ou $\int \operatorname{cossec}^n u \, du$.

Elas podem ser calculadas fàcilmente quando n é um inteiro positivo par. O primeiro passo é escrever

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u;$$

ou $\quad \operatorname{cossec}^n u = \operatorname{cossec}^{n-2} u \operatorname{cossec}^2 u = (\operatorname{ctg}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{cossec}^2 u$.

Por (2), § 2.

O exemplo mostra os passos subsequentes.

Exemplo ilustrativo 3. Prove que $\int \sec^4 \frac{1}{2} x \, dx = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} x + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} x + C$.

Solução. Seja $\frac{1}{2} x = u$. Então $x = 2u$, $dx = 2\,du$. Substituindo,

$$\int \sec^4 \tfrac{1}{2} x \, dx = 2 \int \sec^4 u \, du. \tag{5}$$

Temos
$$\int \sec^4 u \, du = \int \sec^2 u \cdot \sec^2 u \, du$$
$$= \int (\operatorname{tg}^2 u + 1) \sec^2 u \, du \qquad \text{por (2), § 2}$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u \, du + \int \sec^2 u \, du$$
$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 u + \operatorname{tg} u + C. \qquad \text{Por (4) e (10)}$$

Substituindo de novo no segundo membro de (5) e pondo $u = \frac{1}{2} x$, obtemos a resposta.

Exercício. Ponha $\sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u$ no segundo membro de (5), eleve ao quadrado e proceda como no exemplo ilustrativo 1 acima.

Exemplo IV. Achar $\int \operatorname{tg}^m u \sec^n u \, du$ ou $\int \operatorname{ctg}^m u \operatorname{cossec}^n u \, du$.

Quando n é um inteiro positivo par, procedemos como no Exemplo III.

Exemplo ilustrativo 4. Achar $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx$.

Solução.
$$\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x \, dx = \int \operatorname{tg}^6 x (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \quad \text{por (2), § 2}$$
$$= \int (\operatorname{tg} x)^8 \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{tg}^6 x \sec^2 x \, dx$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^9 x}{9} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C. \qquad \text{Por (4)}$$

Aqui $\qquad v = \operatorname{tg} x$, $dv = \sec^2 x \, dx$, etc.

Quando m é ímpar podemos proceder como no exemplo seguinte.

Exemplo ilustrativo 5. Achar $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\, dx$.

SOLUÇÃO.
$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x\, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x\, dx \quad \text{por (2), § 2}$$
$$= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) \sec x \operatorname{tg} x\, dx$$
$$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2\sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C. \quad \text{Por (4)}$$

Aqui $v = \sec x$, $dv = \sec x \operatorname{tg} x\, dx$, etc.

Os métodos usados nos exemplos acima são, òbviamente, limitados em suas aplicações. Por exemplo, eles falham no caso seguinte.

$$\int \sec^3 u\, du = \int \sec u \sec^2 u\, du$$
$$= \int \sec u \operatorname{tg}^2 u\, du + \ln(\sec u + \operatorname{tg} u).$$

Realmente, não podemos ir adiante com o que nos fornecem as integrais imediatas. Posteriormente, outros métodos serão introduzidos, de uso mais geral.

EXERCÍCIOS

Calcule as integrais.

1. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln\cos x + C.$

2. $\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}\, dx = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} - 3\ln\operatorname{sen}\frac{x}{3} + C.$

3. $\int \operatorname{ctg}^3 2x \operatorname{cossec} 2x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{cossec} 2x - \frac{1}{6}\operatorname{cossec}^3 2x + C.$

4. $\int \operatorname{cossec}^4 \frac{x}{4}\, dx = \frac{4}{3}\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{4} - 4\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + C.$

5. $\int \operatorname{tg}^5 3\theta\, d\theta = \frac{1}{12}\operatorname{tg}^4 3\theta - \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2 3\theta + \frac{1}{3}\ln\sec 3\theta + C.$

6 $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \phi \, d\phi}{\cos^4 \phi} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \phi + C$.

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 2x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + C$.

8. $\int \frac{\cos^4 x \, dx}{\operatorname{sen}^6 x} = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$.

9. $\int \frac{\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\cos^{\frac{11}{2}} x} = \frac{2}{5} \operatorname{tg}^{\frac{5}{2}} x + \frac{2}{9} \operatorname{tg}^{\frac{9}{2}} + C$.

10. $\int \operatorname{tg}^3 \alpha \sec^{\frac{5}{2}} \alpha \, d\alpha = \frac{2}{9} \sec^{\frac{9}{2}} \alpha - \frac{2}{5} \sec^{\frac{5}{2}} \alpha + C$.

11. $\int \left(\frac{\sec ax}{\operatorname{tg} ax} \right)^4 dx = -\frac{1}{a} (\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 ax) + C$.

12. $\int (\operatorname{ctg}^2 2\theta + \operatorname{ctg}^4 2\theta) \, d\theta = -\frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 2\theta + C$.

13. $\int (\operatorname{tg} bt - \operatorname{ctg} bt)^3 \, dt = \frac{1}{2b} [\operatorname{tg}^2 bt + \operatorname{ctg}^2 bt] + \frac{4}{b} \ln \operatorname{sen} 2bt + C$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

14. $\int \operatorname{ctg}^5 ax \, dx$.

15. $\int \sec^6 \theta \, d\theta$.

16. $\int \operatorname{cossec}^6 \frac{x}{2} \, dx$.

17. $\int \frac{\sec^4 t \, dt}{\operatorname{tg}^3 t}$.

18. $\int \frac{\sec^4 x \, dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

19. $\int \left(\frac{\operatorname{cossec} ax}{\operatorname{ctg} ax} \right)^4 dx$

20. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} \sec^3 \frac{x}{3} \, dx$

21. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x}$.

22. $\int \left(\frac{\operatorname{cossec} bx}{\operatorname{tg} bx} \right)^2 dx$

23. $\int \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{ctg} \phi} \right)^3 d\phi$.

24. $\int \left(\frac{\operatorname{tg} at}{\cos at} \right)^4 dt$.

25. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x \, dx}{\sqrt{\sec x}}$.

26. $\int \operatorname{tg}^n x \sec^4 x \, dx$.

27. $\int \frac{\operatorname{tg}^5 2\theta \, d\theta}{\sec^3 2\theta}$.

EXEMPLO V. *Achar $\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u \, du$ por meio de ângulos múltiplos.*

Quando m ou n é um inteiro positivo ímpar, o meio mais simples é o apresentado no Exemplo I, § 134. Quando m e n são simultâneamente inteiros positivos pares o integrando pode ser transformado por substituições trigonométricas convenientes numa expressão envolvendo senos e cossenos de ângulos múltiplos e daí, então, integrada. Para isto, empregam-se as seguintes fórmulas

$$\text{sen}\, u \cos u = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2u\,, \quad \text{por (5), § 2}$$
$$\text{sen}^2 u = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2u\,, \quad \text{por (5), § 2}$$
$$\cos^2 u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2u\,, \quad \text{por (5), § 2}$$

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\int \cos^2 u\, du.$

SOLUÇÃO. $$\int \cos^2 u\, du = \int (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2u)\, du$$
$$= \tfrac{1}{2}\int du + \tfrac{1}{2}\int \cos 2u\, du = \frac{u}{2} + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 2u + C.$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\, dx.$

SOLUÇÃO. $$\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int \text{sen}^2 2x\, dx \qquad \text{por (5), § 2}$$
$$= \tfrac{1}{4}\int (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 4x)\, dx \qquad \text{por (5), § 2}$$
$$= \frac{x}{8} - \tfrac{1}{32}\,\text{sen}\, 4x + C\,.$$

Exemplo ilustrativo 3. Achar $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx.$

SOLUÇÃO. $$\int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \int (\text{sen}\, x \cos x)^2\, \text{sen}^2 x\, dx$$
$$= \int \tfrac{1}{4}\,\text{sen}^2 2x\, (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \text{sen}^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \text{sen}^2 2x \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 4x)\, dx -$$
$$- \frac{1}{8}\int \text{sen}^2 2x \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{\text{sen}\, 4x}{64} - \frac{\text{sen}^3 2x}{48} + C\,.$$

EXEMPLO VI. Como achar $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx$ ou $\int \cos mx \cos nx\, dx$, quando $m \neq n$.

Por (6), § 2, $\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} (m+n)\, x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} (m-n)\, x$.

$$\therefore \int \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} (m+n)\, x\, dx + $$

$$+ \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} (m-n)\, x\, dx$$

$$= -\frac{\cos (m+n)\, x}{2\,(m+n)} - \frac{\cos (m-n)\, x}{2\,(m-n)} + C\,;$$

Semelhantemente, achamos

$$\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{\operatorname{sen} (m+n)\, x}{2\,(m+n)} + \frac{\operatorname{sen} (m-n)\, x}{2\,(m-n)} + C;$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\operatorname{sen} (m+n)\, x}{2\,(m+n)} + \frac{\operatorname{sen} (m-n)\, x}{2\,(m-n)} + C\,.$$

PROBLEMAS

Calcule as integrais

1. $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{4} + C\,.$

2. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{3\,x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4\,x}{32} + C\,.$

3. $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3\,x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{4} + \frac{\operatorname{sen} 4\,x}{32} + C\,.$

4. $\int \operatorname{sen}^6 x\, dx = \frac{5\,x}{16} - \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{4} + \frac{\operatorname{sen}^3 2\,x}{48} + \frac{3 \operatorname{sen} 4\,x}{64} + C\,.$

5. $\int \cos^6 x\, dx = \frac{5\,x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{48} + \frac{3 \operatorname{sen} 4\,x}{64} + C\,.$

6. $\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\,ax}{4\,a} + C\,.$

7. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2\,x}{16} + C\,.$

8. $\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a} + C.$

9. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x\,dx = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{96} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{128} + C.$

10. $\int (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta = \frac{9\theta}{2} + 4\cos\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + C.$

11. $\int (\operatorname{sen}^2\phi + \cos\phi)^2\,d\phi = \frac{7\phi}{8} + \frac{2\operatorname{sen}^3\phi}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4\phi}{32} + C.$

12. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\,dx = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$

13. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} + C.$

14. $\int \cos 4x \cos 3x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{14} + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação

15. $\int \cos^2 ax\,dx.$

16. $\int \cos^4 ax\,dx.$

17. $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\,dx.$

18. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\,d\theta.$

19. $\int \operatorname{sen}^4 2\alpha \cos^4 2\alpha\,d\alpha.$

20. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^6 x\,dx.$

21. $\int (1 + \cos x)^3\,dx.$

22. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta} - \cos 2\theta)^2\,d\theta.$

23. $\int (\sqrt{\cos\theta} - 2\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta.$

24. $\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 3x)^2\,dx.$

25. $\int (\operatorname{sen} x + \cos 2x)^2\,dx.$

26. $\int (\cos x + 2\cos 2x)^2\,dx.$

135. — Integração de expressões contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$ ou $\sqrt{u^2 \pm a^2}$ por substituicão trigonomérica. Em muitos casos o melhor meio de integrar tais expressões é mudar a variável como segue:

quando ocorre $\sqrt{a^2 - u^2}$ põe-se $u = a \operatorname{sen} z$;
quando ocorre $\sqrt{a^2 + u^2}$ põe-se $u = a \operatorname{tg} z$;
quando ocorre $\sqrt{u^2 - a^2}$ põe-se $u = a \sec z$.

Estas substituições foram usadas nos § § 132-133. Com êlas, elimina-se o radical em cada caso. Realmente

$$(1) \qquad \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z} = a \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = a \cos z\,;$$

$$(2) \qquad \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 z} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} = a \sec z\,;$$

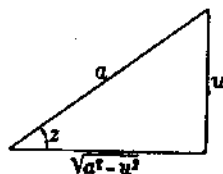
$$(3) \qquad \sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} = a \sqrt{\sec^2 z - 1} = a \operatorname{tg} z.$$

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Solução. Seja $u = a \operatorname{sen} z$; então $du = a \cos z\, dz$ e, usando (1),

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{a \cos z\, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2} \int \sec^2 z dz$$

$$= \frac{\operatorname{tg} z}{a^2} + C = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C\,.$$

Realmente, como $\operatorname{sen} z = \dfrac{u}{a}$, o triângulo retângulo ao lado diz que $\operatorname{tg} z = \dfrac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

Exemplo ilustrativo 2. Prove que $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x} + C.$

Solução. Aqui $\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{u^2 + a^2}$ para $u = 2x$, $a = 3$.

Seja, pois, $2x = u$; então $x = \frac{1}{2} u$, $dx = \frac{1}{2} du$. Substituindo,

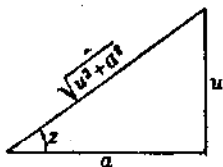
$$(4) \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}} = \int \frac{\frac{1}{2} du}{\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Seja $u = a \operatorname{tg} z$; então $du = a \sec^2 z\, dz$ e, usando (2),

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 z\, dz}{a \operatorname{tg} z \cdot a \sec z} = \frac{1}{a} \int \frac{\sec z\, dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{1}{a} \int \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$$

$$= \frac{1}{a} \int \operatorname{cossec} z\, dz = \frac{1}{a} \ln (\operatorname{cossec} z - \operatorname{ctg} z) + C\,.$$

Como $\operatorname{tg} z = \dfrac{u}{a}$, tem-se, pela figura,

$$\operatorname{cossec} z = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}, \operatorname{cotg} z = \frac{a}{u}\,.$$

Logo $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{u^2+a^2}-a}{u} + C\,.$$

Substituindo de novo em (4) e pondo, como acima, $u = 2x$ e $a = 3$, obtemos a resposta.

PROBLEMAS

Calcule as integrais

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+2}} + C\,.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-6}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-6} + 3\ln(x+\sqrt{x^2-6}) + C\,.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C\,.$

4. $\displaystyle\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2\,\text{arc sen}\,\frac{t}{2} + C\,.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + \ln(x+\sqrt{x^2+8}) + C\,.$

6. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(9-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{9-u^2}} - \text{arc sen}\,\frac{u}{3} + C\,.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{2+\sqrt{x^2+4}}\right) + C\,.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{x}{5+\sqrt{25-x^2}}\right) + C\,.$

9. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-7}} = \frac{\sqrt{y^2-7}}{7y} + C\,.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C\,.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + \frac{1}{54}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{3} + C\,.$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16-t^2}\,dt}{t^2} = -\frac{\sqrt{16-t^2}}{t} - \text{arc sen}\,\frac{t}{4} + C\,.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+16}\,dx}{x}$.

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-9}\,dy}{y}$.

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{4-x^2}}$.

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+9}\,dx}{x^2}$.

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{100-u^2}\,du}{u}$.

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

19. $\displaystyle\int \frac{dv}{(v^2-3)^{\frac{3}{2}}}$.

20. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-5}}$.

22. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+9}\,dx}{x^6}$.

136. — Integração por partes. Se u e v são funções de uma única variável independente, temos, pela fórmula de derivação de um produto (V. § 94).

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du\,.$$

ou, transpondo,

$$u\,dv = d\,(uv) - v\,du\,.$$

Integrando esta, obtemos a fórmula inversa

$$(A) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du\,,$$

chamada *fórmula de integração por partes.* Esta fórmula conduz a integração de udv, que muitas vezes não sabemos fazer, à de vdu que pode, eventualmente, ser feita por se apresentar sob forma conveniente. O método de *integração por partes* é um dos mais úteis do cálculo integral.

Para aplicar esta fórmula, a expressão sob o sinal de integração deve ser separada em dois fatores, precisamente, u e dv. Não há regra para a escolha destes fatores, podendo-se dizer apenas que

(a) dx é sempre uma parte de dv;

(b) a integração de dv deve ser possível;

(c) se a expressão a ser integrada é o produto de duas funções, é melhor, usualmente, escolher a que se apresenta mais complicada, e que seja possível integrar, como parte de dv.

Os exemplos seguintes mostrarão com detalhes como a fórmula deve ser aplicada.

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\int x \cos x \, dx$.

Solução. Seja $u = x$ e $dv = \cos x \, dx$;
então

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x .$$

Substituindo em (A),

$$\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{\cos x \, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u} \overbrace{\operatorname{sen} x}^{x} - \int \overbrace{\operatorname{sen} x}^{v} \overbrace{dx}^{du} = x \operatorname{sen} x + \cos x + C .$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar $\int x \ln x \, dx$.

Solução. Seja $u = \ln x$ e $dv = x \, dx$;
então

$$du = \frac{dx}{x} \quad \text{e} \quad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} .$$

Substituindo em (A),

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C .$$

Exemplo ilustrativo 3. Achar $\int xe^{ax} \, dx$.

Solução. Seja $u = e^{ax}$ e $dv = x \, dx$;
então,

$$du = e^{ax} \cdot a \, dx \quad \text{e} \quad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} .$$

Substituindo em (A),

$$\int xe^{ax} \, dx = e^{ax} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^{ax} a \, dx.$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{2} - \frac{a}{2} \int x^2 e^{ax} \, dx .$$

Mas x^2e^{ax} não é tão simples de integrar como $xe^{ax}\,dx$; isto mostra que não escolhemos os fatores convenientemente. Contràriamente, seja

$$u = x \quad \text{e} \quad dv = e^{ax}\,dx;$$

então,

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Substituindo em (A),

$$\int xe^{ax}dx = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a}\,dx$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C.$$

Pode ser necessário aplicar a fórmula de integração por partes mais de uma vez, como no exemplo seguinte.

Exemplo ilustrativo 4. Achar $\int x^2 e^{ax}\,dx$.

Solução. Seja $\quad u = x^2 \quad \text{e} \quad dv = e^{ax}\,dx$;
então,

$$du = 2\,x\,dx \quad \text{e} \quad v = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Substituindo em (A),

$$\int x^2e^{ax}\,dx = x^2 \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot 2\,x\,dx$$

$$(1) \qquad = \frac{x^2\,e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int xe^{ax}\,dx.$$

A integral no último têrmo pode ser achada aplicando-se de novo a fórmula (A), o que dá

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C.$$

Substituindo este resultado em (1), obtemos

$$\int x^2e^{ax}\,dx = \frac{x^2\,e^{ax}}{a} - \frac{2\,e^{ax}}{a^2}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C.$$

Exemplo ilustrativo 5. Prove que

$$\int \sec^3 z\,dz = \tfrac{1}{2}\sec z\,\mathrm{tg}\,z + \tfrac{1}{2}\ln(\sec z + \mathrm{tg}\,z) + C.$$

Solução. Seja $u = \sec z$ e $dv = \sec^2 z\, dz$;
então

$$du = \sec z \operatorname{tg} z\, dz \quad \text{e} \quad v = \operatorname{tg} z\,.$$

Substituindo em (A),

$$\int \sec^3 z\, dz = \sec z \operatorname{tg} z - \int \sec z \operatorname{tg}^2 z\, dz\,.$$

Na nova integral, ponhamos, $\operatorname{tg}^2 z = \sec^2 z - 1$. Obtemos

$$\int \sec^3 z\, dz = \sec z \operatorname{tg} z - \int \sec^3 z\, dz + \ln(\sec z + \operatorname{tg} z) + C\,.$$

Passando a integral do segundo para o primeiro membro e dividindo por 2 temos o resultado desejado.

Exemplo ilustrativo 6. Prove que

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{e^{ax}(\operatorname{sen} nx - n\cos nx)}{a^2 + n^2} + C\,.$$

Solução. Seja $u = e^{ax}$ e $dv = \operatorname{sen} nx\, dx$;

então, $du = ae^{ax}\, dx$ e $v = -\dfrac{\cos nx}{n}$.

Substituindo na fórmula (A),

$$(2) \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{e^{ax}\cos nx}{n} + \frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nx\, dx\,.$$

Integrando de novo por partes,

seja $u = e^{ax}$ e $dv = \cos nx\, dx$;

então $du = ae^{ax}\, dx$ e $v = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$.

Logo, por (A);

$$(3) \qquad \int e^{ax}\cos nx\, dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} nx}{n} - \frac{a}{n}\int e^{ax}\operatorname{sen} nx\, dx\,.$$

Substituindo em (2), obtemos

$$(4) \quad \int e^{ax}\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{e^{ax}}{n^2}\left(a\operatorname{sen} nx - n\cos nx\right) - \frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} nx\, dx$$

As duas integrais em (4) são as mesmas. Trazendo a do segundo para primeiro membro, obtém-se o resultado.

Entre as mais importantes aplicações do método de integração por partes está a integração de

(a) *diferenciais envolvendo produtos,*
(b) *diferenciais envolvendo logaritmos,*
(c) *diferenciais envolvendo funções circulares inversas.*

EXERCICIOS

Calcule as integrais.

1. $\int x \operatorname{sen} x \, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$

2. $\int \ln x \, dx = x (\ln x - 1) + C.$

3. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2} \, dx = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} - 2x \cos \frac{x}{2} + C.$

4. $\int x \cos nx \, dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + C.$

5. $\int u \sec^2 u \, du = u \operatorname{tg} u + \ln \cos u + C.$

6. $\int v \operatorname{sen}^2 3v \, dv = \frac{1}{4} v^2 - \frac{1}{12} v \operatorname{sen} 6v - \frac{1}{72} \cos 6v + C.$

7. $\int y^2 \operatorname{sen} ny \, dy = \frac{2 \cos ny}{n^3} + \frac{2y \operatorname{sen} ny}{n^2} - \frac{y^2 \cos ny}{n} + C.$

8. $\int x a^x \, dx = a^x \left[\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a} \right] + C.$

9. $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$

10. $\int \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

11. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$

12. $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} y \, dy = y \operatorname{arc} \operatorname{ctg} y + \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) + C.$

13. $\int \operatorname{arc} \cos 2x \, dx = x \operatorname{arc} \cos 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2} + C.$

14. $\int \operatorname{arc} \sec y \, dy = y \operatorname{arc} \sec y - \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) + C.$

15. $\int \text{arc cossec}\,\frac{t}{2}\,dt = t\,\text{arc cossec}\,\frac{t}{2} + 2\ln\left(t + \sqrt{t^2 - 4}\right) + C.$

16. $\int x\,\text{arc tg}\,x\,dx = \frac{x^2 + 1}{2}\,\text{arc tg}\,x - \frac{x}{2} + C.$

17. $\int \text{arc tg}\,\sqrt{x}\,dx = (x + 1)\,\text{arc tg}\,\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

18. $\int x^2 e^{-x}\,dx = -e^{-x}(2 + 2x + x^2) + C.$

19. $\int e^\theta \cos\theta\,d\theta = \frac{e^\theta}{2}(\text{sen}\,\theta + \cos\theta) + C.$

20. $\int \frac{\ln x\,dx}{(x + 1)^2} = \frac{x}{x + 1}\ln x - \ln(x + 1) + C.$

21. $\int x^2\,\text{arc sen}\,x\,dx = \frac{x^3}{3}\,\text{arc sen}\,x + \frac{x^2 + 2}{9}\sqrt{1 - x^2} + C.$

22. $\int \frac{\ln(x + 1)\,dx}{\sqrt{x + 1}} = 2\sqrt{x + 1}\,[\ln(x + 1) - 2] + C.$

23. $\int \frac{xe^x\,dx}{(1 + x)^2} = \frac{e^x}{1 + x} + C.$

24. $\int e^{-t}\cos\pi t\,dt = \frac{e^{-t}(\pi\,\text{sen}\,\pi t - \cos\pi t)}{\pi^2 + 1} + C.$

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

25 $\int x\sec^2\frac{x}{2}\,dx.$

26. $\int x\cos^2 2x\,dx.$

27. $\int x^2\cos x\,dx.$

28. $\int \text{arc sen}\,mx\,dx.$

29. $\int \text{arc ctg}\,\frac{x}{2}\,dx.$

30. $\int \text{arc cos}\,\frac{1}{x}\,dx.$

31. $\int \text{arc sec}\,\frac{1}{y}\,dy.$

32. $\int \text{arc cossec}\,nt\,dt.$

33. $\int \text{arc sen}\sqrt{\frac{x}{2}}\,dx.$

34. $\int x^3\,\text{arc sen}\,x\,dx.$

35. $\int \frac{x\,\text{arc sen}\,x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$

36. $\int \frac{\text{arc tg}\,\sqrt{x}\,dx}{x^2}.$

37. $\int x^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx$.

38. $\int (e^x + 2x)^2 \, dx$.

39. $\int (2^x + x^2)^2 \, dx$.

40. $\int e^{\theta} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta$.

41. $\int e^{\frac{t}{6}} \operatorname{sen} \pi t \, dt$.

42. $\int e^{3x} \cos \frac{x}{3} \, dx$.

43. $\int e^{-\frac{t}{2}} \cos 2t \, dt$.

44. $\int e^{\frac{t}{4}} \cos \pi t \, dt$.

45. $\int e^{-\frac{t}{4}} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{4} \, dt$.

46. $\int \operatorname{cossec}^3 \theta \, d\theta$.

137. — Comentários. A integração é, de modo geral, uma operação mais difícil que a derivação. Realmente, uma integral tão simples (em aparência) como

$$\int \sqrt{x} \operatorname{sen} x \, dx$$

não pode ser calculada, isto é, não há *função elementar* cuja derivada seja $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$. Para auxiliar na integração, há tabelas de integrais já preparadas. Uma pequena é dada no Capítulo XXVII dêste livro. O modo de usá-la está explicado abaixo no § 176. Nesta altura, basta ter presente que os métodos até agora apresentados são aplicáveis a muitos problemas. Outros métodos serão dados em capítulos posteriores.

EXERCÍCIOS DIVERSOS

Calcule cada uma das integrais abaixo e verifique os resultados por derivação.

1. $\int \frac{3x \, dx}{\sqrt{5 - 2x^2}}$.

2. $\int \frac{3x \, dx}{5 - 2x^2}$.

3. $\int \frac{(ax + b) \, dx}{\sqrt{c^2 - x^2}}$.

4. $\int x \cos 2x \, dx$.

5. $\int \frac{(4x + 3) \, dx}{x^2 + 4x + 8}$.

6. $\int \frac{(4x + 3) \, dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$.

7. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

8. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9}$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 8}$.

10. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$.

11. $\int (e^{2x} + 2e^{-x})^2 \, dx$.

12. $\int (e^{2x} - 2x)^2 \, dx$.

13. $\int \frac{dx}{e^x - 4e^{-x}}$.

14. $\int \text{sen}^2 ax \cos ax \, dx$.

15. $\int \text{sen}^2 ax \cos^2 ax \, dx$.

16. $\int \ln (1 - \sqrt{x}) \, dx$.

17. $\int (2 \,\text{tg}\, 2\theta - \text{ctg}\, \theta)^2 \, d\theta$.

18. $\int \frac{4x \, dx}{1 - 4x^4}$.

19. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

20. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

21. $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

22. $\int \frac{x^3 \, dx}{x - 1}$.

23. $\int \frac{4x \, dx}{\sqrt{1 - 4x^4}}$.

24. $\int e^{2t} \cos 3t \, dt$.

25. $\int \text{sen}^5 \frac{\theta}{4} \, d\theta$.

26. $\int \text{sen}^4 \frac{\theta}{5} \, d\theta$.

27. $\int \frac{(t - \text{cossec}^2 2t) \, dt}{t^2 + \text{ctg}\, 2t}$.

28. $\int \sqrt{\frac{\text{arc sen}\, x}{1 - x^2}} \, dx$.

29. $\int \frac{5 \, dx}{x^2 - x + 1}$.

30. $\int \frac{5 \, dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

31. $\int x^3 \,\text{arc tg}\, \frac{x}{2} \, dx$.

32. $\int (e^x + \text{sen}\, x)^2 \, dx$.

33. $\int (x - \cos x)^2 \, dx$.

34. $\int (1 + \text{tg}\, x)^3 \, dx$.

35. $\int \frac{\text{sen}\, \theta \, d\theta}{(1 - \cos \theta)^3}$.

36. $\int \frac{(1 + \text{sen}\, t)^3 \, dt}{\cos t}$.

37. $\int e^{-t} \,\text{sen}\, 2t \, dt$.

38. $\int \text{sen}\, 2\theta \cos 3\theta \, d\theta$.

39. $\int \text{sen}\, \phi \,\text{sen}\, 4\phi \, d$.

40. $\int \cos \alpha \cos 2\alpha \, d\alpha$.

Capítulo XIII

CONSTANTE DE INTEGRAÇÃO

138. — Determinação da constante de integração pelas condições iniciais. Como dissemos no parágrafo 127, a constante de integração pode ser determinada quando conhecemos o valor da integral para algum valor da variável. Para se determinar a constante de integração é, pois, necessário ter outros dados além da expressão a ser integrada. Ilustremos isto com um exemplo.

Exemplo ilustrativo. Achar uma função cuja derivada primeira é $3x^2 - 2x + 5$ e que para $x = 1$ tenha o valor 12.

Solução. $(3x^2 - 2x + 5)\,dx$ é a expressão diferencial a ser integrada.

Assim
$$\int (3x^2 - 2x + 5)\,dx = x^3 - x^2 + 5x + C,$$

onde C é a constante de integração. Das condições do problema o resultado deve ser 12 para $x = 1$, isto é,

$$12 = 1 - 1 + 5 + C, \quad \text{ou} \quad C = 7.$$

Logo $x^3 - x^2 + 5x + 7$ é a função pedida.

139. — Significado geométrico da constante de integração. Este será ilustrado por exemplos.

Exemplo ilustrativo 1. Determinar a equação da curva em cada ponto da qual a tangente tem $2x$ por coeficiente angular.

Solução. Como o coeficiente angular da tangente a uma curva num ponto qualquer é $\frac{dy}{dx}$, temos, por hipótese,

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

ou

$$dy = 2x\,dx.$$

Integrando $\quad y = 2\int x\,dx,\quad$ ou

(1) $$y = x^2 + C,$$

onde C é a constante de integração. Se dermos a C uma série de valores, digamos 6, 0, − 3, (1) conduz às funções

$$y = x^2 + 6,\quad y = x^2,\quad y = x^2 - 3,$$

que são parábolas com eixos coincidindo com o eixo OY e tendo 6, 0, − 3 respectivamente, como pontos de interseção com OY

Todas as parábolas (1) têm o mesmo valor de $\frac{dy}{dx}$, isto é, tem a mesma direção para o mesmo valor de x. Deve-se notar também que a diferença entre os comprimentos das ordenadas é constante para todo valor de x. Logo, todas as parábolas podem ser obtidas movendo-se uma qualquer delas para cima ou para baixo, pois o valor da constante C não afeta o coeficiente angular da curva, neste caso. Se, no exemplo acima, impuzermos a ulterior condição de passar a curva pelo ponto (1, 4), as coordenadas dêste ponto devem satisfazer(1), o que fornece

$$4 = 1 + C, \text{ ou seja, } C = 3.$$

A particular curva pedida é, pois, a parábola $y = x^2 + 3$.

Exemplo ilustrativo 2. Determinar a equação de uma curva cuja tangente tenha, em cada ponto, coeficiente angular igual ao simétrico da razão entre a abscissa e a ordenada do ponto.

Solução. A condição do problema é expressa pela equação

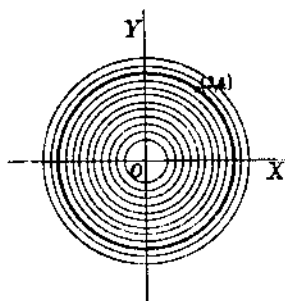
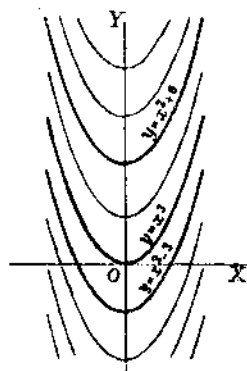
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

ou, separando as variáveis,

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Integrando, $\quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$

ou

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

A equação obtida representa uma família de círculos com centro na origem. Se impuzermos ainda a condição da curva passar pelo ponto (3, 4), então

$$9 + 16 = 2C, \text{ ou seja, } 2C = 25,$$

e portanto $x^2 + y^2 = 25$ é a particular curva pedida.

PROBLEMAS

As expressões abaixo são as derivadas de certas funções. Achá-las em cada um dos casos, tendo em vista os dados.

	Derivada da função	*Valor da variável*	*Correspondente valor da função*	*Resposta*
1.	$x - 3$	2	9	$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 13.$
2.	$3 + x - 5x^2$	6	-20	$304 + 3x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3.$
3.	$y^3 - b^2y$	2	0	$\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}b^2y^2 + 2b^2 - 4.$
4.	$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$	$\frac{1}{2}\pi$	2	$\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1.$
5.	$\frac{1}{t} - \frac{1}{2 - t}$	1	0	$\ln(2t - t^2).$
6.	$\sec^2\varphi + \operatorname{tg}\varphi$	0	5	$\operatorname{tg}\varphi + \ln\sec\varphi + 5.$
7.	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	a	$\frac{\pi}{2a}$	$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{\pi}{4a}.$
8.	$bx^3 + ax + 4$	b	10	
9.	$\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$	4	0	
10.	$\operatorname{ctg}\theta - \operatorname{cossec}^2\theta$	$\frac{1}{2}\pi$	3	
11.	$3te^{3t^2}$	0	4	

Achar a equação da família de curvas tais que o coeficiente angular da tangente em cada ponto de cada uma delas seja:

12. $m.$ *Resp.* Retas, $y = mx + C.$

13. $x.$ Parábolas, $y = \frac{1}{2}x^2 + C.$

14. $\frac{1}{y}.$ Parábolas, $\frac{1}{2}y^2 = x + C.$

15. $\frac{x^2}{y}.$ Parábolas semi-cúbicas, $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}x^3 + C.$

16. $\frac{x}{y^2}\cdot$ Parábolas semi-cúbicas, $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + C$.

17. $3x^2$. Parábolas cúbicas, $y = x^3 + C$.

18. $\frac{1}{y^2}\cdot$ Parábolas cúbicas, $\frac{1}{3}y^3 = x + C$.

19. $\frac{x}{y}\cdot$ Hipérboles equiláteras, $y^2 - x^2 = C$.

20. $-\frac{y}{x}\cdot$ Hipérboles equiláteras, $xy = C$.

21. $\frac{b^2x}{a^2y}\cdot$ Hipérboles, $b^2x^2 - a^2y^2 = C$.

22. $-\frac{b^2x}{a^2y}\cdot$ Elipses $b^2x^2 + a^2y^2 = C$.

23. $\frac{1+x}{1-y}\cdot$ Círculos $x^2 + y^2 + 2x - 2y = C$.

Em cada um dos exemplos seguintes, achar a equação da curva que passa pelo particular ponto fixado e cujo coeficiente angular em cada ponto é a dada função das coordenadas.

24. x; $(1, 1)$. *Resp.* $2y = x^2 + 1$.

25. $4y$; $(1, 1)$. $\ln y = 4x - 4$.

26. $2xy$; $(3, 1)$. $\ln y = x^2 - 9$.

27. $-xy$; $(0, 2)$. $y = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

28. $\frac{x+1}{y+1}$; $(0, 1)$. $(y+1)^2 = (x+1)^2 + 3$.

29. $\frac{x-h}{y-k}$; $(0, 0)$. $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$.

30. $\frac{y}{x^2}$; $(1, 1)$. $x \ln y = x - 1$.

31. $y\sqrt{x}$; $(4, 1)$. $3 \ln y = 2(x\sqrt{x} - 8)$.

32. $\dfrac{4\,xy}{4\,x^2 - 15}$; (2, 1) $\quad 4\,x^2 - y^2 = 15.$

33. $\dfrac{y^2}{x}$; (1, 4).

34. $x\sqrt{y}$; (1, 9).

35. $\dfrac{x-3}{1-y}$; (3, 0).

36. $\dfrac{xy}{x^2+4}$; (1, 2).

37. $\dfrac{4-x}{2\,y-3}$; (4, 2).

38. $\sqrt{\dfrac{2+x}{3+y}}$; (2, 6).

39. $\sqrt{\dfrac{y-1}{x-2}}$; (3, 5).

40. $x\cos^2 y$; $(4, \frac{1}{4}\pi)$.

41. Dados $dy = (2\,x + 1)\,dx$, $y = 7$ quando $x = 1$, achar o valor de y quando $x = 3$. *Resp.* 17.

42. Dados $dA = \sqrt{2\,px}\,dx$, $A = \dfrac{p^2}{3}$ quando $x = \dfrac{p}{2}$, achar o valor de A quando $x = 2\,p$. *Resp.* $\dfrac{8}{3}\,p^2$.

43. Dados $dy = x\sqrt{100 - x^2}\,dx$, $y = 0$ quando $x = 0$, achar o valor de y quando $x = 8$. *Resp.* 784/3.

44. Dados $d\rho = \cos 2\theta\,d\theta$, $\rho = 6$ quando $\theta = \frac{1}{2}\pi$, achar o valor de ρ quando $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

45. Dados $ds = t\sqrt{4\,t + 1}\,dt$, $s = 0$ quando $t = 0$, achar o valor de s quando $t = 2$.

46. Tem-se $y'' = x$ em cada ponto de certa curva. Achar a equação dela, sabendo-se que ela passa pelo ponto (3, 0) e tem nesse ponto coeficiente angular igual a 7/2.

Resp. $6\,y = x^3 - 6\,x - 9$.

47. Em cada ponto de certa curva, $y'' = \dfrac{12}{x^3}$. Achar a equação da curva se ela passa por (1, 0) e é tangente nêste ponto à reta $6\,x + y = 6$. *Resp.* $xy + 6\,x = 6$.

48. Achar a equação de uma curva em cada ponto da qual $y'' = \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}$, sabendo-se ainda que ela passa por (1, 1) com uma inclinação de 45°.

49. Achar a equação de uma curva sabendo que em cada ponto dela $y'' = \dfrac{1}{x}$ e que ela passa por (1, 0) com a inclinação de 135°.

50. Achar a equação da curva cuja subnormal é constante e igual a $2a$.

Resp. $y^2 = 4\,ax + C$, uma parábola.

Sugestão. De (4), § 43, subnormal $= y\dfrac{dy}{dx}$.

51. Achar a curva cuja subtangente é constante e igual a a. (V. (3), § 43). *Resp.* $a \ln y = x + C$.

52. Achar a curva cuja subnormal é igual à abscissa do ponto de contato. *Resp.* $y^2 - x^2 = 2\,C$, uma hipérbole equilátera.

53. Achar a curva cuja normal é constante ($= R$), admitindo que $y = R$ quando $x = 0$. *Resp.* $x^2 + y^2 = R^2$, um círculo.

Sugestão. Do § 43, comprimento da normal $= y\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ ou

$$dx = \pm (R^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} y\,dy.$$

54. Determinar as curvas nas quais o comprimento da subnormal é proporcional ao quadrado da ordenada. *Resp.* $y = Ce^{kx}$.

55. Achar a equação da curva na qual o ângulo compreendido entre o raio vetor e a tangente é a metade da anomalia.

Resp. $\rho = c\,(1 - \cos\theta)$.

56. Achar as curvas nas quais o ângulo compreendido entre o raio vetor e a tangente é n vezes a anomalia.

Resp. $\rho^n = c \operatorname{sen} n\,\theta$.

140. — Significado físico da constante de integração. Este será ilustrado pelos exemplos seguintes.

Exemplo ilustrativo 1. Achar as leis que governam o movimento de um ponto que se move em linha reta com aceleração constante.

SOLUÇÃO. Como a aceleração $\left[= \frac{dv}{dt}, \text{ de } (A), \S\ 59\right]$ é constante, digamos f, temos

$$\frac{dv}{dt} = f,$$

ou

$$dv = f\,dt. \quad \text{Integrando,}$$

$$(1) \qquad v = ft + C.$$

Para determinar C, suponhamos que a velocidade inicial seja v_0, isto é, seja $v = v_0$ quando $t = 0$

Condições iniciais		
t	v	s
0	v_0	s_0

Substituídos êstes valores em (1), temos

$$v_0 = 0 + C, \text{ ou } C = v_0.$$

Logo (1) torna-se

$$(2) \qquad v = ft + v_0.$$

Como $v = \frac{ds}{dt}$ ((C), § 51), obtemos de (2)

$$\frac{ds}{dt} = ft + v_0,$$

ou

$$ds = ft\,dt + v_0 dt. \quad \text{Integrando,}$$

$$(3) \qquad s = \tfrac{1}{2} ft^2 + v_0 t + C.$$

Para determinar C, suponhamos que a distância inicial seja s_0, isto é, seja $s = s_0$ quando $t = 0$.

Substituídos êstes valores em (3), temos

$$s_0 = 0 + 0 + C, \quad \text{ou} \quad C = s_0.$$

Logo (3) torna-se

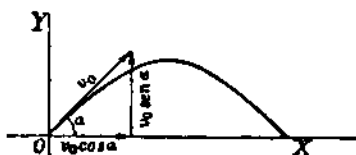
$$(4) \qquad s = \tfrac{1}{2} ft^2 + v_0 t + s_0.$$

Substituindo em (2) e (4) os valores $f = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$ e $s = h$, obtemos as leis do movimento de um corpo caindo do repouso num vácuo, precisamente,

$$v = gt \quad \text{e} \quad h = \tfrac{1}{2}\, gt^2.$$

Eliminando t entre estas equações obtemos $v = \sqrt{2\,gh}$

Exemplo ilustrativo 2. Estudar o movimento de um projétil tendo uma velocidade inicial v_0 inclinada de um ângulo α com a horizontal, desprezada a resistência do ar.

Solução. Tomemos o plano XOY como o plano do movimento, OX como horizontal e OY como vertical e suponhamos que o projétil é lançado da origem.

Vamos admitir que o projétil está apenas sob a influência da gravidade. Então a aceleração na direção horizontal é nula e a na direção vertical é $-g$. De (F), § 84, resulta, pois,

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g\,.$$

Integrando, $\qquad v_x = C_1 \quad \text{e} \quad v_y = -gt + C_2\,.$

Mas $\qquad v_0 \cos\alpha = \text{velocidade inicial na direção horizontal}$

$\qquad v_0 \,\text{sen}\,\alpha = \text{velocidade inicial na direção vertical}$

/Logo $\qquad C_1 = v_0 \cos\alpha \quad \text{e} \quad C_2 = v_0 \,\text{sen}\,\alpha$, dando

$$(5) \qquad v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{e} \quad v_y = -gt + v_0 \,\text{sen}\,\alpha.$$

Mas de (C) e (D), § 83, $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ e $v_y = \dfrac{dy}{dt}$; logo (5) dá

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \,\text{sen}\,\alpha$$

ou

$$dx = v_0 \cos\alpha\, dt \quad \text{e} \quad dy = -gt\, dt + v_0 \,\text{sen}\,\alpha\, dt.$$

Integrando, obtemos

$$(6) \qquad x = v_0 \cos\alpha \,.\, t + C_3 \qquad y = -\tfrac{1}{2}\, gt^2 + v_0 \,\text{sen}\,\alpha \,.\, t + C_4\,.$$

Para determinar C_3 e C_4 observamos que quando $t = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

Substituindo estes valores em (6), obtemos

$$C_3 = 0 \quad \text{e} \quad C_4 = 0$$

$$(7) \qquad x = v_0 \cos\alpha \,.\, t \quad \text{e}$$

$$(8) \qquad y = -\tfrac{1}{2}\, gt^2 + v_0 \,\text{sen}\,\alpha \cdot t.$$

Eliminando t entre (7) e (8), obtemos

$$(9) \qquad y = x \,\text{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}\,,$$

que é a equação da trajetória e mostra que o projétil descreve uma parábola.

PROBLEMAS

Nos problemas seguintes é dada a relação entre v e t. Achar a relação entre s e t se $s = 2$ quando $t = 1$.

1. $v = a + bt$. *Resp.* $s = a(t - 1) + \frac{1}{2} b(t^2 - 1) + 2$.

2. $v = \sqrt{t - 1}$. **3.** $v = t^2 + \frac{1}{t^2}$.

Nos exercícios abaixo são dadas as acelerações. Achar a relação entre v e t se $v = 2$ quando $t = 3$.

4. $4 - t^2$. *Resp.* $v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1$. **5.** $\sqrt{t} + 3$. **6.** $\frac{1}{t^2} - t$.

Nos exercícios abaixo são dadas as acelerações. Achar a relação entre s e t se $s = 0$, $v = 20$, quando $t = 0$.

7. -32. *Resp.* $s = 20t - 16t^2$. **8.** $4 - t$. **9.** $-16 \cos 2t$.

10. Com que velocidade uma pedra que cai do topo de um edifício com 120 pés de altura atinge o solo? ($g = 32$).

Resp. 87,64 pés por seg.

11. Com que velocidade a pedra do problema anterior atinge o solo se lançada para baixo com a velocidade de 20 pés por segundo? Se lançada para cima com a velocidade de 20 pés por segundo?

Resp. 89,89 pés por seg.

12. Uma pedra caiu de um balão que subia à razão de 15 pés por segundo e atingiu o solo em 8 segundos. Qual a altura do balão quando caiu a pedra? *Resp.* 904 pés.

13. Se o balão do problema anterior estivesse caindo à razão de 15 pés por segundo, em quanto tempo a pedra atingiria o solo?

Resp. $7\frac{1}{16}$ seg.

14. Um trem que deixa uma estação tem a aceleração de $0,5 + 0,02t$ pés por segundo quadrado. Ache a distância percorrida em 20 segundos.

Resp. 126,7 pés.

15. Uma partícula móvel sobre um plano inclinado tem uma aceleração para baixo de 4 pés por segundo quadrado. Se ela sobe

partindo do fundo do plano com a velocidade de 6 pés por segundo, achar a distância percorrida depois de t segundos. Que distância atingirá antes de começar a descer? *Resp.* 4,5 pés.

16. Se o plano inclinado do problema anterior tem 20 pés de comprimento, achar a velocidade inicial necessária afim de que a partícula atinja apenas o topo do plano.

Resp. $4\sqrt{10}$ pés por segundo.

17. Uma bola atirada do solo para cima alcança a altura de 80 pés em 1 segundo. Achar a altura que a bola pode atingir.

18. Um projétil com a velocidade inicial de 160 pés por segundo é atirado contra uma parede vertical a 480 pés do ponto de lançamento.

(*a*) se α (ângulo de elevação) $= 45°$, achar a altura do ponto atingido sobre a parede. *Resp.* 192 pés

(*b*) achar α de modo que o projétil atinja a base da parede. *Resp.* 18° ou 72°

(*c*) achar α de modo que o projétil atinja um ponto a 80 pés da base da parede. *Resp.* 29° ou 70°.

(*d*) Achar α para que o ponto atingido sobre a parede seja o mais alto possível, bem como esta altura. *Resp.* 59°; 256 pés.

19. Se a aceleração de uma partícula que se move com velocidade variável v é $-kv^2$, onde k é uma constante e se v_0 é a velocidade quando $t = 0$, mostre que $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$.

20. A resistência do ar a um automóvel, dentro de certos limites da velocidade, é proporcional à velocidade. Assim, se F é a força líquida gerada pelo motor, temos $M\frac{dv}{dt} = F - kv$. Exprima a velocidade em termos de t, sabendo que $v = 0$ quando $t = 0$.

$$Resp.\quad v = \frac{F}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{M}}\right).$$

OUTROS PROBLEMAS

1. A temperatura de um líquido numa sala de temperatura 20° é 70° num dado instante e 60°, cinco minutos depois. Admi-

tindo que a velocidade de variação da temperatura do líquido seja proporcional à diferença de temperaturas entre o líquido e a sala, achar a temperatura do líquido 30 minutos depois da primeira observação. *Resp.* 33,1°.

2. Achar a equação da curva cuja sub-tangente polar é n vêzes o comprimento do correspondente raio vetor, e que passa pelo ponto $(a, 0)$. *Resp.* $\rho = ae^{\frac{\theta}{n}}$.

3. Achar a equação da curva cuja subnormal polar é n vezes o comprimento do correspondente raio vetor, e que passa pelo ponto $(a, 0)$. *Resp.* $\rho = ae^{n\theta}$.

4. Uma partícula move-se no plano xy de modo que as componentes da velocidade paralelas a OX e OY sejam ky e kx respectivamente. Prove que a trajetória é uma hipérbole equilátera.

5. Uma partícula lançada do topo de uma torre sob um ângulo de 45° acima do horizonte atinge o solo em 5 segundos a uma distância horizontal do pé da torre igual à própria altura desta. Achar a altura da torre, sendo $g = 32$ pés por segundo quadrado.

Resp. 200 pés.

6. Uma partícula parte da origem de coordenadas e em t segundos a componente de sua velocidade paralela a OX é $t^2 - 4$ e a componente paralela a OY é $4\,t$.

(a) achar a posição da partícula depois de t segundos.

Resp. $x = \frac{1}{3}\,t^3 - 4\,t,\ y = 2\,t^2$.

(b) achar a distância percorrida. *Resp.* $s = \frac{1}{3}\,t^3 + 4\,t$.

(c) achar a equação da trajetória.

Resp. $72\,x^2 = y^3 - 48\,y^2 + 576\,y$.

7. Achar a equação de uma curva cujo comprimento da tangente (§ 43) é constante ($= c$).

$$Resp. \quad x = c \ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{c^2 - y^2}.$$

8. Achar a equação da curva para a qual (§ 96) $a^2 ds = \rho^3\, d\theta$ e que passa pelo ponto $(a, 0)$. *Resp.* $\rho^2 = a^2 \sec 2\,\theta$.

CAPÍTULO XIV

INTEGRAL DEFINIDA

141. — Diferencial da área sob uma curva. Consideremos a função contínua $\phi(x)$ e seja

$$y = \phi(x)$$

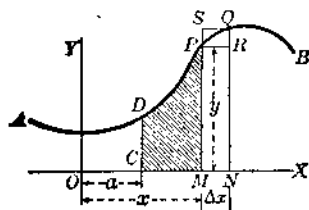
a equação da curva AB. Seja CD uma ordenada fixa e MP uma variável. Seja u a área da figura $CMPD$. Dando a x um pequeno acréscimo Δx, u toma um acréscimo Δu (= área de $MNQP$). Completando os retângulos $MNRP$ e $MNQS$, vemos que

Área $MNRP <$ área $MNQP <$

$<$ área $MNQS$,

ou $\quad MP \cdot \Delta x < \Delta u < NQ \cdot \Delta x$;

dividindo por Δx,

$$MP < \frac{\Delta u}{\Delta x} < NQ.^*$$

Façamos Δx tender a zero; como MP permanece fixo e NQ tende a MP (pois y é função contínua de x), obtemos

$$\frac{du}{dx} = y \, (= MP),$$

ou, usando diferenciais, $\quad du = y\,dx$.

Teorema. *A diferencial da área limitada por uma curva, o eixo dos xx, uma ordenada fixa e uma ordenada variável é igual ao produto da ordenada variável pela diferencial da correspondente abscissa.*

* Na figura, MP é menor que NQ; se fôsse MP maior que NQ, bastaria mudar o sentido da desigualdade.

142. — Integral definida. Do teorema acima resulta que se a curva AB é o lugar dos pontos de

$$y = \phi(x),$$

então $$du = y\,dx, \quad \text{ou}$$

(1) $$du = \phi(x)\,dx,$$

onde du é a diferencial da área compreendida entre a curva, o eixo dos xx e as duas ordenadas. Integrando, obtemos

$$u = \int \Phi(x)\,dx\,.$$

Denotemos $\int \Phi(x)\,dx$ por $f(x) + C$.

(2) $$\therefore \quad u = f(x) + C.$$

Determinamos C notando que $u = 0$ quando $x = a$.

Substituídos estes valores em (2), obtemos

$$0 = f(a) + C,$$

e portanto $$C = -f(a).$$

Logo, (2) torna-se

(3) $$u = f(x) - f(a).$$

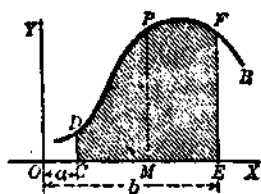
A área pedida $CEFD$ é o valor de u em (3) quando $x = b$. Temos, pois,

$$\text{Área } CEFD = f(b) - f(a).$$

Teorema. *A diferença entre os valores de* $\int y dx$ *para* $x = b$ *e* $x = a$ *dá a área limitada pela curva cuja ordenada é* y, *o eixo dos* xx *e as ordenadas correspondentes a* $x = a$ *e* $x = b$.

Esta diferença é representada pelo símbolo*

(4) $$\int_a^b y\,dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b \Phi(x)\,dx\,,$$

---

* Esta notação é devida a Joseph Fourier (1768-1830).

que se lê "integral de a a b de ydx". A operação é chamada de *integração entre limites*, sendo a o limite inferior e b o superior.*

Como (4) tem sempre um valor definido, ela diz-se uma *integral definida*. Realmente, se

$$\int \Phi(x)\,dx = f(x) + C,$$

então $$\int_a^b \Phi(x)\,dx = \Big[f(x) + C\Big]_a^b = [f(b) + C] - [f(a) + C],$$

ou $$\int_a^b \Phi(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

havendo desaparecido a *constante de integração.*

O símbolo

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b y\,dx$$

representa, pois, a medida da região limitada pela curva $y = \phi(x)$,** o eixo dos xx e as ordenadas da curva em $x = a$ e $x = b$. Esta definição pressupõe que estas linhas limitam uma área, isto é, que a curva não tende a mais ou menos infinito e nem tampouco corta o eixo dos xx. Pressupõe ainda que a e b são finitos.

143. — Cálculo de uma integral definida. O processo pode sintetizar-se como segue:

Primeiro Passo. *Integre a dada expressão diferencial.*

Segundo Passo. *Na integral indefinida obtida substitua a variável, primeiro, pelo limite superior, depois, pelo inferior e subtraia o último resultado do primeiro.*

Não é necessário considerar a constante de integração pois que ela sempre desaparece com a subtração.

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\int_1^4 x^2\,dx$.

* A palavra "limite" neste caso significa meramente o valor da variável num extremo de seu campo de variabilidade e não deve ser confundida com o sentido do termo na Teoria dos Limites.

** $\phi(x)$ é contínua e de um só valor no intervalo (a, b).

SOLUÇÃO. $\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$ *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Achar $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx.$

SOLUÇÃO. $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^\pi = \left[-(-1)\right] - \left[-1\right] = 2.$

Exemplo ilustrativo 3. Prove que $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}.$

SOLUÇÃO. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 1 -$

$$- \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4a}.$$

Exemplo ilustrativo 4. Prove que $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9} = -\frac{1}{12}\ln 5 = -0{,}134$

SOLUÇÃO. Comparando com (19) ou (19*a*), $v = 2x$, $a = 3$, $dv = 2\,dx$.

Para decidir entre o uso de (19) e (19*a*), consideram-se os limites. Os valores de x crescem de -1 a 0. Então $v\,(= 2x)$ cresce de -2 a 0. Logo $v^2 \leq 4$; mas $a^2 = 9$. Logo $v^2 < a^2$ e (19*a*) deve ser usada. Temos, pois,

$$(1) \qquad \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9} = -\int_{-1}^0 \frac{dx}{9-4x^2} = -\frac{1}{12}\left[\ln\frac{3+2x}{3-2x}\right]_{-1}^0$$

Por (19*a*)

Desenvolvendo-se os cálculos, temos a resposta. O resultado é negativo porque a curva e as ordenadas limites estão abaixo do eixo dos xx.

144. — Mudança nos limites correspondente a uma mudança na variável. Quando se integra substituindo-se a variável por uma nova é algumas vezes incômodo transformar o resultado obtido pela volta à primitiva variável. Na integração entre limites, contudo, a volta à primitiva variável pode ser evitada mudando-se os limites de integração de modo a que os novos limites venham a corresponder à nova variável. Este processo será ilustrado por um exemplo.

Exemplo ilustrativo. Calcular $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^{\frac{3}{4}}}.$

Solução. Ponhamos $x = z^4$. Então $dx = 4\,z^3\,dz$, $x^{\frac{1}{2}} = z^2$, $x^{\frac{1}{4}} = z$.

Para mudar os limites de integração, observamos que quando

$$x = 0, \quad z = 0\,,$$

e quando

$$x = 16, \quad z = 2\,.$$

$$\therefore \int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}\,dx}{1 + x^{\frac{1}{2}}} = \int_0^2 \frac{z \cdot 4\,z^3\,dz}{1 + z^2} = 4 \int_0^2 \left(z^2 - 1 + \frac{1}{1 + z^2}\right) dz$$

$$= 4 \int_0^2 z^2\,dz - 4 \int_0^2 dz + 4 \int_0^2 \frac{dz}{1 + z^2} =$$

$$= \left[\frac{4\,z^3}{3} - 4\,z + 4 \operatorname{arc\,tg} z\right]_0^2 =$$

$$= \frac{8}{3} + 4 \operatorname{arc\,tg} 2. \quad \textit{Resp.}$$

A relação entre a velha variável e a nova deve ser tal que a cada valor de uma dentro dos limites de integração corresponda sempre um, e um só, valor da outra. Quando uma das variáveis é dada como função de mais de um valor da outra, deve-se ter cuidado em escolher os valores permitidos.

PROBLEMAS

1. Prove que $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Colcule as integrais abaixo

2. $\int_0^2 (a^2 x - x^3)\,dx = \frac{a^4}{4}$.

3. $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1$.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3 - 2\,x}} = \sqrt{3} - 1$.

5. $\int_2^3 \frac{2\,t\,dt}{1 + t^2} = \ln 2$.

6. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x + 1} = \frac{8}{3} - \ln 3$.

7. $\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi r}{2}$.

8. $\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx = \frac{a^2}{6}$.

9. $\int_0^4 \frac{x^2\,dx}{x + 1} = 5{,}6094$.

10. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{3x}} = 0{,}3167$.

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \Phi\, d\Phi = 1$.

12. $\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 4$.

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}$.

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 \theta\, d\theta = \frac{4}{3}$.

Achar o valor de cada uma das integrais definidas

15. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9-2x}}$.

16. $\int_0^3 \frac{tdt}{\sqrt{t^2+16}}$.

17. $\int_0^2 \frac{y\,dy}{\sqrt{25-4y^2}}$.

18. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

19. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$.

20. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$.

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$.

22. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$.

23. $\int_{-1}^2 \frac{x^2\,dx}{x+2}$.

24. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+1}$.

145. — Cálculo de áreas. Mostramos no § 142 que a área compreendida entre uma curva, o eixo dos xx e as ordenadas $x = a$ e $x = b$ é dada pela fórmula

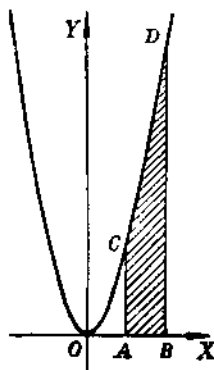
$$(B) \qquad \text{Área} = \int_a^b y\,dx\,,$$

onde o valor de y em termos de x provém da equação da curva dada.

Exemplo ilustrativo 1. Achar a área limitada pela parábola $y = x^2$, o eixo dos xx e as ordenadas $x = 2$ e $x = 4$.

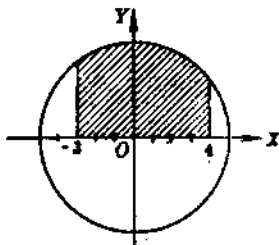
Solução. Substituindo na fórmula

$$\text{Área } ABDC = \int_2^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\ \frac{2}{3}.\ \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar a área limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 25$, o eixo dos xx e as ordenadas $x = -3$ e $x = 4$.

Solução. Resolvendo, $y = \sqrt{25 - x^2}$. Logo

$$\text{Área} \int_{-3}^4 \sqrt{25 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{5}\right]_{-3}^4 \text{ por (22)}$$

$$= 6 + \frac{25}{2} \text{arc sen} \frac{4}{5} + 6 - \frac{25}{2} \text{arc sen} \left(- \frac{3}{5} \right) = 31{,}6 . \quad \textit{Resp.}$$

A resposta deve ser comparada com a área do semi-círculo, que é $\frac{1}{2}(25\pi) = 39{,}3$.

Exemplo ilustrativo 3. Área sob uma parábola cujo eixo é paralelo ao eixo dos yy. Na figura seguinte escolhe-se o ponto P' sobre o arco parabólico PP'' de modo que $AO = OB$. As ordenadas de P, P' e P'' são, respectivamente y, y' e y''. Prove que a área compreendida entre a parábola, o eixo dos xx e as ordenadas de P e P'' é igual a $\frac{1}{3} h (y + 4y' + y'')$ se $2h$ é a distância que separa as ordenadas de P e de P''.

Solução. Tomemos o eixo dos yy passando pela ordenada de P', como na figura. A equação de uma parábola com eixo paralelo ao eixo dos yy é, por (7), § 3, $(x - h)^2 = 2p(y - k)$, ou, explicitando y,

(1) $y = ax^2 + 2bx + c$, onde a, b e c são constantes.

A área pedida $APP''B$ $(= u)$ é, por (B),

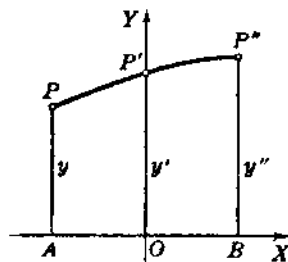
(2) $$u = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch.$$

Por (1),

se $x = -h$, $y = AP = ah^2 - 2bh + c$;

se $x = 0$, $y' = OP' = c$;

se $x = h$, $y'' = BP'' = ah^2 + 2bh + c$.

Portanto $\frac{1}{3} h (y + 4y' + y'') = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = u$.

146. — Área quando as equações da curva são dadas em forma paramétrica.*

Sejam as equações da curva dadas em forma paramétrica

$$x = f(t), \quad y = \Phi(t).$$

Temos, pois $y = \Phi(t)$ e $dx = f'(t)\,dt$. Logo

(1) $$\text{Área} = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) f'(t)\,dt,$$

onde $t = t_1$ quando $x = a$ e $t = t_2$ quando $x = b$.

* Para um estudo rigoroso deste item convida-se o estudante a compulsar tratados de cálculo mais avançados.

Exemplo ilustrativo. Achar a área da elipse cujas equações paramémétricas (§ 81) são

$$x = a\cos\Phi, \quad y = b\,\text{sen}\,\Phi.$$

SOLUÇÃO. Aqui $y = b\,\text{sen}\,\Phi$,

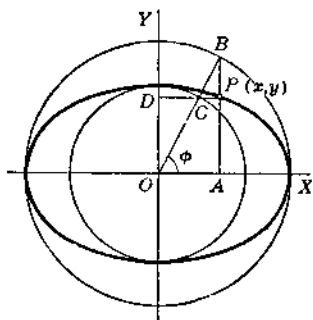
$$dx = -a\,\text{sen}\,\Phi d\Phi.$$

Quando $x = 0$, $\Phi = \frac{1}{2}\pi$

e quando $x = a$, $\Phi = 0$.

Substituindo-se em (1), temos

$$\frac{\text{Área}}{4} = \int_0^a y\,dx = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^0 ab\,\text{sen}^2\Phi\,d\Phi = \frac{\pi ab}{4}.$$

Logo, a área toda é igual a πab. *Resp.*

PROBLEMAS

1. Achar por integração a área do triângulo limitado pela reta $y = 2x$, o eixo dos xx e a ordenada $x = 4$. Verificar o resultado achando a área como a metade do produto da base pela altura.

2. Achar por integração a área do trapézio limitado pela reta $x + y = 10$, o eixo dos xx e as ordenadas $x = 1$ e $x = 8$. Verificar o resultado achando a área como a metade da soma das bases pela altura.

Achar a área limitada pela dada curva, o eixo dos xx e as dadas ordenadas.

3. $y = x^3$; $x = 0$, $x = 4$. *Resp.* 64.

4. $y = 9 - x^2$; $x = 0$, $x = 3$. 18.

5. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$; $x = -3$, $x = 3$. 54.

6. $y = x^2 + x + 1$; $x = 2$, $x = 3$. $9\frac{5}{6}$.

7. $xy = k^2$; $x = a$, $x = b$. $k^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

8. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$; $x = 1$, $x = 4$. $15\frac{3}{4}$.

9. $y = \frac{10}{\sqrt{x + 4}}$; $x = 0$, $x = 5$. 20.

10. $ay = x\sqrt{a^2 - x^2}$; $x = 0$, $x = a$. $\frac{1}{3}a^2$.

11. $y^2 + 4x = 0$; $x = -1$, $x = 0$.

12. $y^2 = 4x + 16$; $x = -2$, $x = 0$.

13. $y = x^2 + 4x$; $x = -4$, $x = -2$.

14. $y = 4x - x^2$; $x = 1$, $x = 3$.

15. $y^2 = 9 - x$; $x = 0$, $x = 8$.

16. $2y^2 = x^3$; $x = 0$, $x = 2$.

Achar a área limitada pela dada curva, o eixo dos yy e as dadas retas.

17. $y^2 = 4x$; $y = 0$, $y = 4$. *Resp.* $5\frac{1}{3}$.

18. $y = 4 - x^2$; $y = 0$, $y = 3$. $4\frac{2}{3}$.

19. $x = 9y - y^3$; $y = 0$, $y = 3$.

20. $xy = 8$; $y = 1$, $y = 4$.

21. $y^3 = a^2x$; $y = 0$, $y = a$.

22. $ay^2 = x^3$; $y = 0$, $y = a$.

Desenhe cada uma das curvas seguintes e ache a área de um arco.

23. $y = 2\cos x$. *Resp.* 4.

24. $y = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\pi x$. $\dfrac{8}{\pi}$.

25. $y = \cos 2x$. 1.

26. $y = \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}x$. 4.

27. Ache a área limitada pelos eixos coordenados e a parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

28. Prove que a área de um segmento de parábola determinado por uma corda perpendicular ao eixo da parábola são os dois terços do retângulo que o circunscreve.

29. P e Q são dois pontos da hipérbole $xy = k$. Mostre que a área limitada pelo arco PQ, as ordenadas de P e Q e o eixo dos xx é igual à área limitada por PQ, as abscissas de P e Q e o eixo dos yy.

30. Achar a área limitada pela catenária $y = \frac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ o eixo dos xx e as retas $x = a$ e $x = -a$. *Resp.* $a^2\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$.

31. Achar a área compreendida entre as duas parábolas $y^2 = 2px$ e $x^2 = 2py$. *Resp.* $\frac{4}{3}p^2$.

32. Achar a área compreendida entre as duas parábolas $y^2 = ax$ e $x^2 = by$. *Resp.* $\frac{1}{3}ab$.

33. Achar a área compreendida pelo laço da curva cuja equação é $4y^2 = x^2(4 - x)$. *Resp.* $\frac{128}{15}$.

34. Achar a área limitada pela curva de equação $y^2 = x^2(x^2 - 1)$ e pela reta $x = 2$. *Resp.* $2\sqrt{3}$.

35. Achar a área compreendida pelo laço da curva de equação $y^2 = x^2(9 - x)$. *Resp.* $\frac{648}{5}$.

36. Achar a área limitada pela curva de equação $y^2 = x^4 - x^2$ e pela reta $x = 2$. *Resp.* $\frac{32}{15}$.

37. Achar a área compreendida pelo laço da curva de equação $y^2 = x(x - 2)^2$. *Resp.* $\frac{32}{15}\sqrt{2}$.

38. Achar a área compreendida pelo laço da curva de equação $4y^2 = x^4(4 - x)$. *Resp.* $\frac{2048}{105}$.

39. Achar a área limitada pela hipérbole $x^2 - y^2 = a^2$ e pela reta $x = 2a$. *Resp.* $a^2\left[2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3})\right]$.

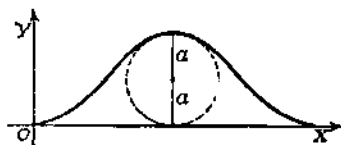
40. Achar a área limitada pela hipérbole $x^2 - 4y^2 = 4$ e pela reta $x = 6$.

41. Achar a área limitada por um arco da ciclóide. $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ e o eixo dos x. *Resp.* $3\pi a^2$.

42. Achar a área da cardióide

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),$$
$$y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t). \quad \textit{Resp.}\ 6\pi a^2.$$

43. A figura abaixo representa parte de uma curva (chamada ciclóidinha) cujas equações são

$$x = a\theta,$$
$$y = a(1 - \cos\theta).$$

Ache a área de um arco. *Resp.* $2\pi a^2$.

44. Ache a área da hipociclóide

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta\,, \\ y = a\,\text{sen}^3\theta\,. \end{cases}$$

Resp. $\dfrac{3\pi a^2}{8}$, ou seja, três oitavos da área do círculo circunscrito.

147. — Representação geométrica de uma integral. Vimos nos § § precedentes que a integral definida é um número representando a medida de uma região (uma área). Isto não significa, necessàriamente, que toda integral definida seja uma área, pois a interpretação física do resultado depende da natureza das grandezas representadas pela abscissa e pela ordenada. Assim, se x e y são consideradas simplesmente como coordenadas de um ponto, então a integral em (B), § 145, é na realidade uma área. Mas suponhamos que a ordenada represente a velocidade de um ponto móvel e a correspondente abscissa o tempo no qual o ponto tem essa velocidade; então o gráfico é a curva da velocidade do movimento e a área sob ela, compreendida entre duas ordenadas, representará a distância percorrida pelo móvel no correspondente intervalo de tempo. Portanto o *número* que indica a área é igual ao número que indica a distância (ou valor da integral). Semelhantemente, uma integral definida fornecendo um volume, uma massa, a área de uma superfície qualquer, uma força, etc. pode ser representada geomètricamente pela área de uma superfície plana.

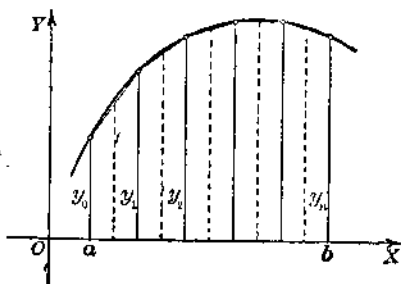
148. — Integração aproximada. Regra do trapézio. Vamos demonstrar agora duas regras para o cômputo aproximado de

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Estas regras são úteis quando a integração de (1) é difícil ou impossível em termos de funções elementares.

O valor exato de (1) é a área da figura limitada pela curva

(2) $$y = f(x),$$

o eixo dos xx e as ordenadas $x = a$ e $x = b$. Esta área pode ser calculada aproximadamente somando-se áreas de trapézios, como segue.

Dividamos o segmento (a, b) de OX em n partes iguais, cada uma de comprimento Δx. Sejam $x_0 (= a)$, x_1, x_2, $\ldots$, $x_n (= b)$ as sucessivas abscissas dos pontos de divisão e

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

as correspondentes ordenadas da curva (2).

Unamos as extremidades consecutivas das ordenadas por segmentos de retas, obtendo, assim, trapézios. Cada um destes tem uma área expressa pelo produto da semi-soma das bases pela altura e, portanto

$$\tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)\,\Delta x = \text{área do primeiro trapézio},$$

$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\,\Delta x = \text{área do segundo trapézio},$$

. . . .

$$\tfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\,\Delta x = \text{área do } n\text{-egésimo trapézio}.$$

Somando, obtemos a *regra do trapézio*

$$(T) \qquad \text{Área} = (\tfrac{1}{2}\,y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,y_n)\,\Delta x.$$

É claro que quanto maior o número de intervalos (isto é, menor Δx), mais próxima é a soma das áreas dos trapézios da área sob a curva.

Exemplo ilustrativo 1. Calcular $\int_1^{12} x^2\,dx$ pela regra do trapézio, dividindo o intervalo (1, 12) em 11 partes.

SOLUÇÃO. Aqui $\frac{b-a}{n} = \frac{12-1}{11} = 1 = \Delta x$. A área em questão está sob a curva $y = x^2$. Substituindo as abscissas $x = 1, 2, 3, \ldots, 12$ nesta equação, obtemos as ordenadas $y = 1, 4, 9, \ldots, 144$. Logo, de (T),

$$\text{Área} = (\tfrac{1}{2} + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \tfrac{1}{2}.144) = 577\tfrac{1}{2}.$$

Por integração, $\int_1^{12} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{12} = 575\frac{2}{3}$. Portanto, nêste exemplo, a regra do trapézio dá um resultado com erro menor que 1/3%.

Exemplo ilustrativo 2. Achar o valor aproximado de

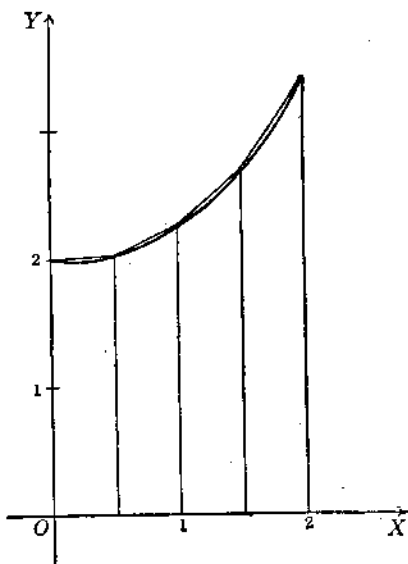
$$I = \int_0^2 \sqrt{4 + x^3}\,dx$$

tomando $n = 4$.

SOLUÇÃO. Seja

$y = \sqrt{4 + x^3}$.

x	y
0	$2{,}000 = y_0$
0,5	$2{,}031 = y_1$
1	$2{,}236 = y_2$
1,5	$2{,}716 = y_3$
2	$3{,}461 = y_4$

Temos $\Delta x = 0{,}5$. Façamos uma tabela dos valores de x e y como a que apresentamos. Aplicando (T),

$$I = (1{,}000 + 2{,}031 + 2{,}236 + 2{,}716 + 1{,}732) \times 0{,}5 = 4{,}858 \quad \textit{Resp.}$$

Se tomássemos $n = 10$, teríamos $I = 4{,}826$, uma aproximação melhor.

PROBLEMAS

Calcule os valores aproximados das seguintes integrais, aplicando a regra do trapézio para os valores indicados de n. Verifique os resultados efetuando as integrações.

1. $\int^{10} \frac{dx}{x}$; $n = 7$.

2. $\int_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\,dx$; $n = 10$.

3. $\int_4^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx$; $n = 8$.

4. $\int_0^3 \sqrt{16 + x^2}\,dx$; $n = 6$.

Calcule, pela regra do trapézio, os valores aproximados das seguintes integrais, usando os valores indicados de n.

5. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$, $n=4$. *Resp.* 1,227

6. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$, $n = 4$. 3,283.

7. $\int_0^{10} \sqrt[3]{125-x^2}\,dx$; $n=5$. 44,17.

8. $\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\,dx$; $n=4$. 34,78.

9. $\int_2^8 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$ $n = 6$. 9,47.

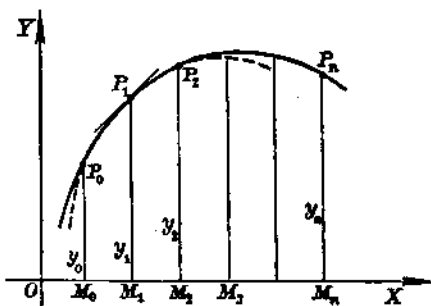
10. $\int_{-2}^3 \sqrt{20+x^4}\,dx$; $n=5$.

11. $\int_0^2 x^2 \sqrt{16-x^4}\,dx$; $n = 4$.

12. $\int_1^6 \sqrt[3]{x^2+3x}\,dx$; $n=5$.

13. $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{10+x^3}}$ $n=6$.

14. $\int_2^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{10+x^2}}$ $n=4$.

149. — Regra de Simpson (regra parabólica). Ao invés de ligar as extremidades sucessivas das ordenadas por segmentos de retas, obtendo, pois, trapézios, podemos conseguir uma aproximação melhor da área ligando as aludidas extremidades por arcos de parábolas e somando as áreas das figuras que assim se obtém. Realmente, por três pontos quaisquer de uma curva é sempre possível fazer passar uma parábola com eixo vertical (de fato, a equação de uma tal parábola se obtém da equação (1) do exemplo ilustrativo 3, § 145, determinando-se as constantes a, b e c de modo que ela passe pelos três pontos), e uma sucessão de arcos de tais parábolas, convenientemente escolhidos, se aproxima mais da curva que uma sucessão de segmentos de retas.

Dividamos o intervalo de extremos $x = a = OM_0$, $x = b = OM_n$ num número par ($= n$) de partes, cada uma igual a Δx. Por todos dos conjuntos sucessivos de três pontos P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4; etc. tracemos arcos de parábolas com eixos verticais. Sejam y_0, y_1, y_2,

..., y_n as ordenadas dos pontos M_0, M_1, ..., M_n, como na figura. A área $M_0 P_0 P_1 \ldots P_n M_n$ será substituída pela soma das áreas das "faixas parabólicas duplas" como $M_0 P_0 P_1 P_2 M_2$, cuja fronteira superior é em cada caso um arco da parábola (1) do exemplo ilustrativo 3 do § 145. A área de cada uma destas faixas duplas é dada pela fórmula

$$u = \tfrac{1}{3}h\,(y + 4\,y' + y'')$$

dêste exemplo.

Para a primeira, $h = \Delta x$, $y = y_0$, $y' = y_1$, $y'' = y_2$. Logo,

Área da primeira faixa dupla $M_0 P_0 P_1 P_2 M_2 =$

$$\frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2).$$

Semelhantemente, área da segunda faixa $= \dfrac{\Delta x}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4)$,

área da terceira faixa $= \dfrac{\Delta x}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6)$,

. . . .

área da última faixa $= \dfrac{\Delta x}{3}(y_{n-2} +$
$+ 4\,y_{n-1} + y_n)$.

Somando, obtemos a *regra de Simpson* (sendo n par)

$$(S) \quad \text{Área} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + \ldots + y_n)$$

Como no caso da regra do trapézio, quanto maior o número de partes em que se divide $M_0 M_n$, tanto maior a aproximação do resultado da área sob a curva.

Exemplo ilustrativo 1. Calcular $\displaystyle\int_0^{10} x^3\,dx$ pela regra Simpson, tomando 10 intervalos parciais.

Solução. Aqui $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{10-0}{10} = 1 = \Delta x$. A área em questão está sob a curva $y = x^3$. Substituindo as abscissas $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$ em $y = x^3$, obtemos as ordenadas $y = 0, 1, 8, 27, \ldots, 1000$. Logo, por (S),

$$\text{Área} = \tfrac{1}{3}(0+4+16+108+128+500+432+1372+1024+2916+1000) = 2500$$

Por integração, $\int_0^{10} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 2500$, de modo que, neste exemplo, a regra de Simpson dá um valor exato.

Exemplo ilustrativo 2. Achar, por (S), um valor aproximado de

$$I = \int_0^2 \sqrt{4 + x^3}\,dx$$

tomando $n = 4$.

Solução. O quadro dos valores é dado no exemplo ilustrativo 2 do parágrafo precedente. Temos, pois,

$$I\,(2{,}000 + 8{,}124 + 4{,}472 + 10{,}864 + 3{,}464) \times \frac{0{,}5}{3} = 4{,}821\,.$$

Compare êste resultado com o dado por (T) quando $n = 10$, precisamente 4,826.

Neste caso a fórmula (S) dá uma aproximação melhor que (T) quando $n = 4$.

EXERCÍCIOS

Calcule, pela regra de Simpson, os valores aproximados das seguintes integrais, usando os valores indicados de n. Verifique os resultados efetuando as integrações.

1. $\int_3^6 \frac{x\,dx}{4 + x^2}$; $n = 6$.

2. $\int_0^4 x\sqrt{25 - x^2}\,dx$; $n = 4$.

3. $\int_2^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx$; $n = 6$.

4. $\int_4^7 \sqrt{16 + x^2}\,dx$; $n = 6$.

Calcule pela regra de Simpson os valores aproximados das seguintes integrais, usando os valores indicados de n.

5. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^3}}$; $n = 4$. *Resp.* 1,236.

6. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx$; $n = 4$. 3,239.

7. $\int_1^5 \sqrt{126 - x^3}\,dx$; $n = 4$. 35,68.

8. $\int_2^8 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4 + x^2}}$; $n = 6$. 9,49.

9. $\int_1^5 \sqrt[3]{6 + x^2}\,dx$; $n = 4$.

10. $\int_2^5 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 + x^3}}$; $n = 6$.

11. $\int_1^5 \sqrt[3]{x^3 - x}\,dx$; $n = 4$.

12. $\int_2^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{5 + x^3}}$; $n = 4$.

Calcule, pelas regras do trapézio e de Simpson, os valores aproximados das seguintes integrais. Se puder achar a integral indefinida, calcule também o valor exato da integral.

13. $\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx;\ n = 4.$

14. $\int_2^4 x\sqrt{16 - x^2}\, dx;\ n = 4.$

15. $\int_3^7 \frac{x\, dx}{\sqrt{64 - x^2}};\ n = 4.$

16. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}};\ n = 4.$

17. $\int_2^8 \frac{x\, dx}{\sqrt{3 + x^2}};\ n = 6.$

18. $\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx;\ n = 4.$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{10\, d\theta}{\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2 \theta}};\ n = 6.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \cos^2 \theta}\, d\theta;\ n = 6.$

21. $\int_0^2 \frac{10\, d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{1}{4}\pi\theta}};\ n = 4.$

22. $\int_0^1 \sqrt{4 - 3\operatorname{sen}^2 \pi\theta}\, d\theta;\ n = 8.$

150. — Troca de limites. Como

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = f(b) - f(a),$$

e

$$\int_b^a \phi(x)\, dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)],$$

temos

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = -\int_b^a \phi(x)\, dx$$

TEOREMA. *Trocar os limites de integração é equivalente a mudar o sinal da integral definida.*

151. — Decomposição do intervalo de integração da integral definida. Como

$$\int_a^{x_1} \phi(x)\, dx = f(x_1) - f(a), \qquad (a < x_1 < b)$$

e

$$\int_{x_1}^b \phi(x)\, dx = f(b) - f(x_1),$$

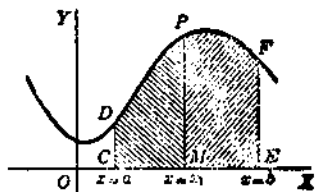
obtemos, por adição,

$$\int_a^{x_1} \phi(x)\, dx + \int_{x_1}^b \phi(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Mas $$\int_a^b \phi(x)\,dx = f(b) - f(a);$$

logo, comparando as duas últimas expressões, obtemos

$$\text{(c)} \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^{x_1} \phi(x)\,dx + \int_{x_1}^b \phi(x)\,dx\,.$$

Interpretando geomèt .mente este resultado, como no § 142, vemos que a integral do p. neiro membro representa a área to $CEFD$, a primeira do segundo membro, a área $CMPD$ e a segunda do segundo membro, a área $MEFP$. A veracidade do resultado é, pois, óbvia.

Evidentemente a integral definida pode ser decomposta num número finito qualquer de integrais definidas.

152. — A integral definida como função dos limites de integração. De

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

vemos que a integral definida é uma função dos limites de integração. Assim, $\int_a^b \phi(z)\,dz$ tem precisamente o mesmo valor que

$$\int_a^b \phi(x)\,dx.$$

TEOREMA. *Uma integral definida é função dos limites de integração.*

153. — Integrais impróprias. Limites infinitos. **Até agora** supuzemos que os limites de integração são finitos. Contudo, mesmo nos problemas mais elementares é necessário muitas vêzes remover esta restrição e considerar integrais com limites de integração infinitos. É possível fazê-lo em certos casos, adotando-se as seguintes *definições.*

Quando o limite superior é infinito,

$$\int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \phi(x)\,dx$$

e quando o limite inferior é infinito,

$$\int_{-\infty}^b \phi(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b \phi(x)\,dx\,,$$

posto que os limites existam e sejam finitos.

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Solução. $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = 1. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{8a^3\,dx}{x^2 + 4a^2}$.

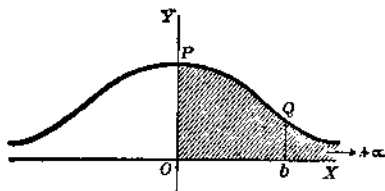
Solução. $$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3\,dx}{x^2 + 4a^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{8a^3\,dx}{x^2 + 4a^2} =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2a}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a}\right] = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = a\,\pi a^2. \quad \textit{Resp.}$$

Interpretemos êste resultado geomètricamente. O gráfico de nossa função é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}\,.$$

Ora,

$$\text{Área } OPQb = \int_0^b \frac{8a^3\,dx}{x^2 + 4a^2} = 4a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2a}.$$

Portanto, quando a ordenada bQ move-se indefinidamente para a direita, a área $OPQb$ tende a $4a^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi a^2$.

Exemplo ilustrativo 3. Achar $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

SOLUÇÃO.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} (\ln b).$$

O limite de $\ln b$ quando b cresce indefinidamente não é finito; logo a integral não tem sentido nêste caso.

154. — Integrais impróprias. Quando $y = \phi(x)$ é descontínua. Consideremos agora casos em que a função a ser integrada seja descontínua para valores isolados da variável, dentro dos limites de integração.

Consideremos primeiro o caso de ser a função contínua para todos os valores de x compreendidos entre a e b, com exceção de $x = a$.

Se $a < b$ e ϵ é positivo, poremos, *por definição*,

$$(1) \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b \phi(x)\,dx.$$

Semelhantemente, quando $\phi(x)$ é contínua exceto para $x = b$, *definimos*

$$(2) \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} \phi(x)\,dx,$$

posto que os limites existam e sejam finitos.

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

SOLUÇÃO. Aqui, $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ é infinita para $x = a$. Logo, por (2),

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\text{arc sen}\, \frac{x}{a} \right]_0^{a-\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\text{arc sen} \left(1 - \frac{\epsilon}{a} \right) \right] = \text{arc sen}\, 1 = \frac{\pi}{2}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

SOLUÇÃO. Aqui, $\frac{1}{x^2}$ é infinita para $x = 0$. Logo, por (1),

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right).$$

Nêste caso o limite não é finito e portanto a integral não existe.

Se c está compreendido entre a e b e $\phi(x)$ é contínua salvo para $x = c$, então, sendo ϵ e ϵ' números positivos, a integral entre a e b é definida por

$$(3) \qquad \int_a^b \phi(x)\, dx = \lim_{\epsilon' \to 0} \int_a^{c-\epsilon} \phi(x)\, dx + \lim_{\epsilon' \to 0} \int_{c+\epsilon'}^b \phi(x)\, dx,$$

posto que cada um dos limites exista e seja finito.

Exemplo ilustrativo 3. Achar $\int_0^{3a} \frac{2\,x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$.

SOLUÇÃO. A função a ser integrada é descontínua para $x = a$, isto é, para um valor de x compreendido entre os limites de integração 0 e $3a$. Logo, deve-se aplicar a definição (3) acima. Temos

$$\int_0^{3a} \frac{2\,x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{a-\epsilon} \frac{2\,x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\epsilon' \to 0} \int_{a+\epsilon'}^{3a} \frac{2\,x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right]_0^{a-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \to 0} \left[3(x^2 - a^2)^{\frac{1}{3}} \right]_{a+\epsilon'}^{3a}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \left[3 \sqrt[3]{(a - \epsilon)^2 - a^2} + 3 a^{\frac{2}{3}} \right] +$$

$$+ \lim_{\epsilon' \to 0} \left[3 \sqrt[3]{8 a^2} - 3 \sqrt[3]{(a + \epsilon')^2 - a^2} \right]$$

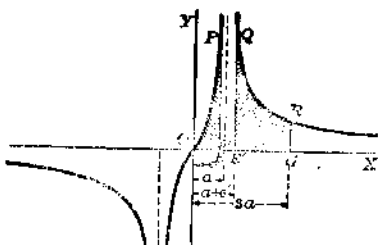
$$= 3a^{\frac{2}{3}} + 6\,a^{\frac{2}{3}} = 9\,a^{\frac{2}{3}} \qquad \textit{Resp.}$$

Para interpretar isto geomètricamente tracemos o gráfico de

$$y = \frac{2\,x}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

e notemos que $x = a$ é uma assíntota.

$$\text{Área } OPE = \int_0^{a-\epsilon} \frac{2\,x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 3 \sqrt[3]{(a - \epsilon)^2 - a^2} + 3\,a^{\frac{2}{3}}.$$

Portanto, quando PE move-se para a direita tendendo à assíntota, isto é, quando $\epsilon \to 0$, a área OPE tende a $3\,a^{\frac{2}{3}}$.

$$\text{Área } E'QRG = \int_{a+\epsilon'}^{3a} \frac{2\,x\,dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{8\,a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\epsilon')^2 - a^2}$$

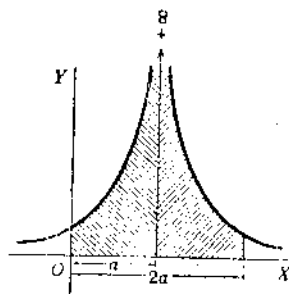
tende a $6\,a^{\frac{2}{3}}$ quando QE' move-se para a esquerda tendendo à assíntota, isto é, quando $\epsilon' \to 0$. Somando os resultados, obtemos $9\,a^{\frac{2}{3}}$.

Exemplo ilustrativo 4. Achar $\displaystyle\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Solução. Esta função é infinita entre os limites de integração. Logo, por (3),

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{a-\epsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\epsilon'\to 0}\int_{a+\epsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\frac{1}{x-a}\right]_0^{a-\epsilon} + \lim_{\epsilon'\to 0}\left[-\frac{1}{x-a}\right]_{a+\epsilon'}^{2a}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{a}\right) + \lim_{\epsilon'\to 0}\left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{\epsilon'}\right).$$

Nêste caso os limites não são finitos e portanto a integral não tem sentido.

Se desenharmos o gráfico desta função, verificaremos que a situação é análoga à do último exemplo, aparentemente, pois que aqui os limites não são finitos.

Este exemplo mostra a importância de se examinar se a função é infinita dentro dos limites de integração, pois que se aplicássemos, sem mais, a fórmula de integração, obteríamos

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \left[-\frac{1}{x-a}\right]_0^{2a} = -\frac{2}{a},$$

um resultado absurdo, como se vê.

EXERCÍCIOS

Calcule cada uma das integrais abaixo:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \frac{\pi}{4}.$

3. $\displaystyle\int_1^{5} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}} = \frac{44}{3}.$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2\,ab}.$

5. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}.$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}.$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}.$

9. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{4}\pi a^2.$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi.$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}.$

12. $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = 2{,}39\,a^2.$

Capítulo XV

INTEGRAÇÃO COMO PROCESSO DE SOMA

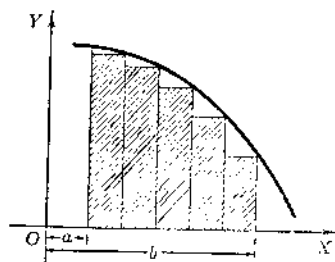
155. — Introdução. Até agora definimos a integração como operação inversa da derivação. Em muitas das aplicações do cálculo integral convém, porém, que a integração seja definida como um *processo de soma.* Este foi, aliás, o modo primeiro de se conceber a integração, pois que o cálculo integral originou-se da necessidade de se calcular áreas e isto era feito imaginando a superfície cuja área devia ser calculada como reunião de um número muito grande de áreas muito pequenas, chamadas *elementos* de área, as quais somadas dariam a área pedida.

Historicamente, o sinal de integração é meramente um S alongado e a letra S é a primeira da palavra "soma".

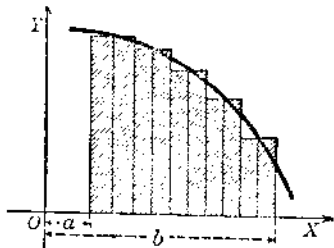
A definição que daremos no próximo parágrafo é de fundamental importância e é essencial que o leitor se familiarize com ela afim de que possa aplicar o cálculo integral aos problemas da prática.

156. — Teorema fundamental do cálculo integral. Se $\phi(x)$ é a derivada de $f(x)$, então, como se viu no § 142, a integral definida

$$(1) \quad \int_a^b \phi(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

fornece a área limitada pela curva $y = \phi(x)$, o eixo dos xx e as retas $x = a$, $x = b$.

Pois bem, procedamos como segue. Dividamos o intervalo $[a, b]$ num número n qualquer de intervalos iguais, pelos pontos de divisão levantemos perpendiculares a OX e pelos pontos de encontro destas com a curva, perpendiculares

a OY, como na figura. É claro que a soma das áreas destes n retângulos (área sombreada da figura) é um valor aproximado da área sob a curva. É claro também que o *limite* da soma das áreas destes retângulos quando o número n cresce indefinidamente é *igual* à área sob a curva.

Façamos agora a construção mais geral seguinte. Dividamos o intervalo em n subintervalos, *não necessàriamente iguais*, e pelos pontos de divisão levantemos perpendiculares a OX. Escolhamos em cada subintervalo e *de modo qualquer* um ponto e pelos pontos que assim foram escolhidos levantemos também perpendiculares a OX. Dos pontos onde estas encontram a curva, tracemos perpendiculares a OY. Vamos obter retângulos, como mostra a figura. A soma das áreas destes (área sombreada da figura) é aproximadamente igual à área sob a curva e o *limite desta soma* quando n cresce indefinidamente de modo a que cada subintervalo tenda a zero, é precisamente a área sob a curva.

Estas considerações mostram que a integral definida (1) é o *limite de uma soma.* Formulemos, pois, êste resultado.

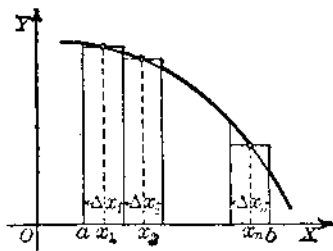
(*a*) Indiquemos os comprimentos dos sucessivos intervalos por

$$\Delta x_1, \quad \Delta x_2, \quad \Delta x_3, \quad \ldots, \quad \Delta x_n.$$

(*b*) Indiquemos as abscissas dos pontos escolhidos nos subintervalos por

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Então as ordenadas dos pontos da curva correspondentes a estas abscissas são

$$\phi(x_1), \quad \phi(x_2), \quad \phi(x_3), \quad \ldots, \quad \phi(x_n).$$

(*c*) As áreas dos sucessivos retângulos são

$$\phi(x_1)\ \Delta x_1, \quad \phi(x_2)\, \Delta x_2, \quad \phi\,(x_3)\, \Delta x_3, \quad \ldots, \quad \phi\,(x_n)\, \Delta x_n.$$

(*d*) A área sob a curva é, pois, igual a

$$\lim_{n \to \infty} [\phi(x_1)\,\Delta x_1 + \phi(x_2)\,\Delta x_2 + \phi(x_3)\,\Delta x_3 + \ldots + \phi(x_n)\,\Delta x_n].$$

Mas, por (1), a área sob a curva é $\int_a^b \phi(x)\,dx$.

Logo, pelo que se viu acima,

$$(A) \quad \int_a^b \phi(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} [\phi(x_1)\,\Delta x_1 + \phi(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + \phi(x_n)\,\Delta x_n].$$

Esta igualdade foi obtida fazendo uso da noção de área e com a ajuda da intuição. Ela estabelece um *resultado fundamental da análise matemática*, precisamente o teorema seguinte:

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO INTEGRAL

Seja $\phi(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Dividamos êste em n subintervalos e sejam $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ os comprimentos dêstes. Em cada um dos subintervalos escolhamos um ponto e sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as abscissas dos pontos escolhidos. O limite da soma

$$(2) \quad \phi(x_1)\,\Delta x_1 + \phi(x_2)\,\Delta x_2 + \ldots + \phi(x_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\,\Delta x_i$$

quando n tende ao infinito de tal modo que cada subintervalo tenda a zero, é igual ao valor da integral definida

$$\int_a^b \phi(x)\,dx.$$

A igualdade (*A*) pode ser abreviada como segue:

$$(3) \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\,\Delta x_i.$$

A importância dêste teorema está em que tôda integral definida é o limite de uma soma do tipo (2) e todo limite de uma soma dêste tipo pode ser calculado por uma integral.

Note-se que cada têrmo da soma (2) é uma expressão diferencial. Cada um dêles chama-se um *elemento* da grandeza que se quer calcular.

A regra abaixo é útil na aplicação do teorema fundamental aos problemas práticos.

TEORIA FUNDAMENTAL. REGRA

PRIMEIRO PASSO. *Divida a grandeza que quer calcular em partes tais que o resultado desejado possa ser obtido tomando-se o limite de uma soma de tais partes.*

SEGUNDO PASSO. *Ache expressões para as grandezas das partes de modo a que a soma delas seja do tipo (2).*

TERCEIRO PASSO. *Tendo escolhido convenientemente os limites $x = a$ e $x = b$, aplique o teorema fundamental*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b \phi(x)\,dx$$

e integre.

157. — Demonstração analítica do teorema fundamental. Dividamos, como no parágrafo precedente, o intervalo $[a, b]$ num número qualquer n de subintervalos, não necessàriamente iguais, e indiquemos as abscissas dos pontos de divisão por $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ e os comprimentos dos subintervalos por $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Em cada um dos subintervalos escolhamos um ponto dos que são determinados pelo teorema do valor médio (§ 116) quando aplicado a $f(x)$ tal que $f'(x) = \phi(x)$ e, sendo $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ esses pontos, levantemos por eles perpendiculares a OX. Pelos pontos de encontro destas perpendiculares com a curva tracemos perpendiculares ao eixo OY. Obte-

mos assim retângulos cujas áreas devemos somar. Para isto, procedemos como segue: aplicamos (*B*) do § 116 à função $f(x)$ no primeiro subintervalo (a, b_1). Notando que $f'(x) = \phi(x)$, que x'_1 está nesse intervalo e que $b_1 - a = \Delta x_1$, temos

$$f(b_1) - f(a) = \phi(x'_1)\,\Delta x_1.$$

Semelhantemente, obtemos, aplicando (*B*) do § 116 aos demais subintervalos:

$f(b_2) - f(b_1) = \phi(x'_2)\,\Delta x_2$, para o segundo intervalo,

$f(b_3) - f(b_2) = \phi(x'_3)\,\Delta x_3$, para o terceiro intervalo,

. . . .

$f(b) - f(b_{n-1}) = \phi(x'_n)\,\Delta x_n$, para o n-egésimo intervalo.

Somando membro a membro:

$$(1) \quad f(b) - f(a) = \phi(x'_1)\,\Delta x_1 + \phi(x'_2)\,\Delta x_2 + \ldots + \phi(x'_n)\,\Delta x_n.$$

Mas,

$\phi(x'_1)\,.\,\Delta x_1 =$ área do primeiro retângulo,

$\phi(x'_2)\,.\,\Delta x_2 =$ área do segundo retângulo, etc.

Logo, a soma no segundo membro de (1) é igual à soma das áreas dos retângulos. Mas, por (I), § 156, o primeiro membro de (1) é igual à área sob a curva $y = \phi(x)$. Logo, a soma

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \phi(x'_i)\,\Delta x_i$$

é igual à área sob a curva.

A soma

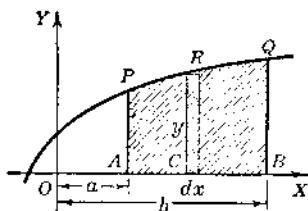
$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\,\Delta x_i$$ (onde x_i é uma abscissa qualquer do subintervalo Δx_i)

(construída como no último §) não dá, necessàriamente, a área, como vimos. Mostremos, contudo, que quando n tende ao infinito de modo que cada subintervalo tenda a zero, a diferença entre (2) e (3) tende a zero. Realmente, a diferença $\phi(x'_i) - \phi(x_i)$ é, em valor absoluto, menor ou igual à diferença entre a máxima e a mínima ordenadas da curva em Δx_i. Além disso, é sempre possível* tornar estas diferenças, em valor absoluto, menores que qualquer número positivo ϵ prefixado, escolhendo n de tal forma grande que cada subintervalo tenha um comprimento suficientemente pequeno. Para uma tal escolha de n, a diferença entre as somas (2) e (3) será, pois, em valor absoluto, menor que $\epsilon\,(b - a)$, isto é, menor que um número qualquer prefixado, ainda que muito pequeno. A diferença tende, portanto, a zero quando n tende ao infinito de modo que cada subintervalo tenda a zero. Mas a soma (2) é igual a $\int_a^b \phi(x)\,dx$; logo,

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\,\Delta x_i,$$

sendo os Δx_i os comprimentos dos subintervalos em que foi dividido $[a, b]$ e x_i pontos arbitràriamente escolhidos em cada um dêsses subintervalos.

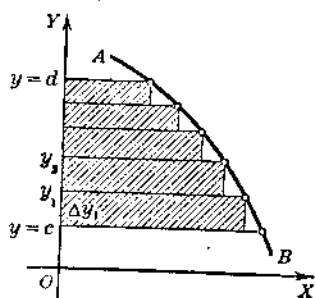
158. — Áreas das curvas planas; coordenadas retangulares. Como já foi visto, a área compreendida entre a curva $y = \phi(x)$, o eixo dos xx e as retas $x=a$ e $x=b$, é dada pela fórmula

$$(B) \qquad \text{Área} = \int_a^b y\,dx,$$

sendo $y = \phi(x)$,

A igualdade (B) pode ser memorizada fàcilmente observando-se que um elemento de área é um retângulo (como CR) de base dx e altura y. A área que se quer $ABQP$ é o limite das somas das áreas de tais retângulos compreendidos entre os segmentos AP e BQ.

* Como se mostra em livros de cálculo mais adiantados.

Apliquemos agora o teorema fundamental (§ 156) ao cálculo da área limitada pela curva $x = \phi(y)$ (AB na figura), o eixo dos yy e as retas horizontais $y = c$ e $y = d$.

PRIMEIRO PASSO. Construamos os n retângulos como na figura. A área pedida é o limite da soma das áreas destes retângulos quando n cresce indefinidamente de modo tal que o comprimento de cada intervalo tenda a zero.

SEGUNDO PASSO. Indiquemos as alturas por Δy_1, Δy_2, etc. Tomemos um ponto em cada subintervalo, por exemplo, a extremidade superior, e indiquemos os pontos assim obtidos por y_1, y_2, etc. As bases são, então, $\phi(y_1)$, $\phi(y_2)$, etc., e a soma das áreas dos retângulos é, pois,

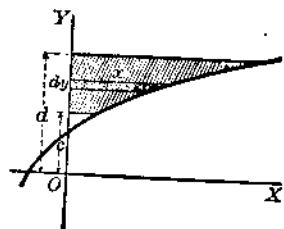
$$\phi(y_1)\,\Delta y_1 + \phi(y_2)\,\Delta y_2 + \ldots + \phi(y_n)\,\Delta y_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)\,\Delta y_i.$$

TERCEIRO PASSO. Apliquemos o teorema fundamental; temos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)\,\Delta y_i = \int_c^d \phi(y)\,dy.$$

Logo, a área compreendida entre uma curva, o eixo dos yy e as horizontais $y = c$ e $y = d$ é dada pela fórmula

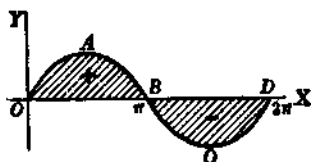
$$(C) \qquad \text{Área} = \int_c^d x\,dy,$$

onde x deve ser substituído pela expressão, em termos de y, que provém da equação da curva. A fórmula (C) pode ser memorizada pela observação de que ela representa o limite da soma dos retângulos horizontais internos à área pedida, sendo x e dy respectivamente, a base e a altura de um retângulo genérico. Um tal retângulo é um elemento da área.

Significado do sinal negativo antes de uma área. Na fórmula (B), a é menor que b. Como o segundo membro é o limite da soma de n termos que resultam de $y_i \Delta x_i$, fazendo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então, se y é *negativo*, cada termo da soma é negativo e por conseguente (B) dará uma área precedida do sinal negativo. Isto significa que a figura está abaixo do eixo dos xx.

Exemplo ilustrativo 1. Achar a área de um arco da senóide $y = \text{sen}\, x$.

SOLUÇÃO. Pondo $y = 0$ e achando x, temos

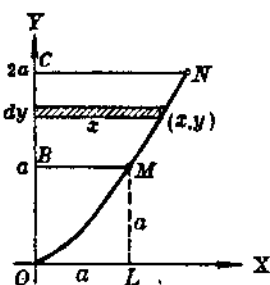
$$x = 0,\ \pi,\ 2\pi, \text{ etc.}$$

Substituindo em (B),

$$\text{Área } OAB = \int_a^b y\,dx = \int_0^\pi \text{sen}\, x\,dx = 2$$

Temos também $$\text{Área } BCD = \int_a^b y\,dx = \int_\pi^{2\pi} \text{sen}\, x\,dx = -2.$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar a área limitada pela parábola semi-cúbica $ay^2 = x^3$, o eixo dos yy e as retas $y = a$ e $y = 2a$.

SOLUÇÃO. Pela (C) acima e a figura, o elemento de área xdy é igual a $a^{\frac{1}{3}}\ y^{\frac{2}{3}}dy$, tendo-se tirado o valor de x da equação da curva. Logo

$$\text{Área } BMNC = \int_a^{2a} a^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}\, dy$$

$$= \tfrac{3}{5}\, a^2 (\sqrt[3]{32} - 1) = 1{,}304\, a^2. \quad \textit{Resp.}$$

Note que a^2 = área $OLMB$.

Na área dada por (B) uma fronteira é o eixo dos xx. Em (C) uma fronteira é o eixo dos yy. Consideraremos agora a área limitada por duas curvas.

Exemplo ilustrativo 3. Achar a área limitada pela parábola $y^2 = 2x$ e a reta $x - y = 4$.

SOLUÇÃO. As curvas cortam-se em $A\ (2, -2)$ e $B\ (8, 4)$. Dividamos a área em faixas horizontais por um sistema de paralelas equidistantes traçadas da parábola AOB à reta AB. Seja dy a distância entre duas paralelas consecutivas e consideremos a faixa da figura cujo lado superior tem (x_1, y), (x_2, y) por extremidades. Destas tracemos perpendiculares ao lado inferior; obtemos um retângulo cuja área é

$$(1)\quad dA = (x_2 - x_1)\, dy. \quad (x_2 > x_1)$$

Este é o elemento de área, pois a área pedida é, òbviamente, o limite da soma de tais retângulos. Pelo teorema fundamental,

$$(2)\quad \text{Área} = \int_c^d (x_2 - x_1)\, dy\,,$$

onde x_1 e x_2 são funções de y determinadas pelas equações das curvas fronteiras. Logo, neste exemplo, de $x - y = 4$ achamos $x = x_2 = 4 + y$; de $y^2 = 2x$ achamos $x = x_1 = \frac{1}{2} y^2$. Temos, pois, por (1),

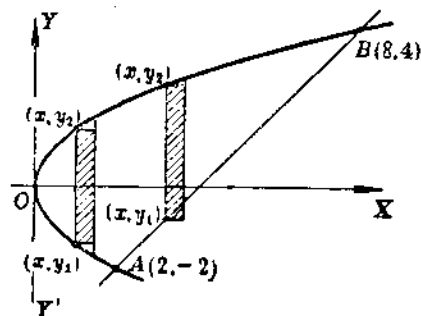
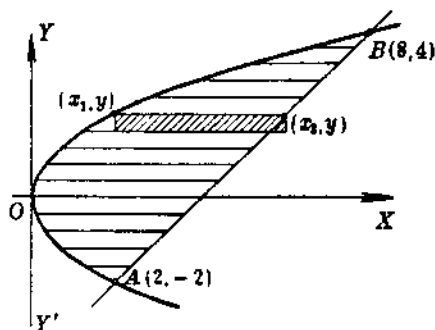
$$(3)\qquad dA = (4 + y - \tfrac{1}{2} y^2)\, dy\,.$$

Esta fórmula serve para cada um dos retângulos que se podem obter como o acima considerado. Como os limites são $c = -2$ (em A) e $d = 4$ (em B), temos

$$\text{Área} = \int_{-2}^{4} (4 + y - \tfrac{1}{2} y^2)\, dy = 18\,.$$

Neste exemplo a área pode também ser dividida em faixas por paralelas a OY. Supondo que estas sejam equidistantes e que Δx seja a distância entre duas consecutivas, podemos proceder como acima, notando, porém, que enquanto o extremo superior de cada lado está sôbre o arco OB, o inferior está sôbre OA quando o lado não está a direita de A e está sobre a reta quando o lado não está a esquerda de A.

Se (x, y_2) é o extremo superior e (x, y_1) o inferior, o retângulo de área igual a

$$(4)\quad dA = (y_2 - y_1)\, dx \quad (y_2 > y_1)$$

é o elemento de área. Em face do que se disse acima, não é possível, neste exemplo, achar, por (4), uma única fórmula que represente a área de cada um dos retângulos, pois para $y_2 = \sqrt{2x}$ temos $y_1 = -\sqrt{2x}$ ou $y_1 = x - 4$, segundo o vértice inferior do retângulo esteja sôbre a parábola ou sobre a reta AB. Logo, de (4) temos duas formas para dA e portanto são necessárias duas integrações.

Deve-se, pois, num problema qualquer, construir as faixas de modo que uma única fórmula seja bastante para exprimir o elemento de área. A fórmula (4) é usada quando as faixas são construídas pelo traçado de paralelas ao eixo dos *yy*.

No teorema fundamental algumas ou todas as parcelas $\phi(x_i)\,\Delta x_i$ podem ser negativas e portanto o limite da soma delas (a integral definida) pode ser nula ou negativa. Por exemplo, se $\phi(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $b = 2\pi$, a integral definida (3), § 156, é nula. A interpretação dêste resultado pelas áreas é imediata pelo exemplo ilustrativo 1 acima.

PROBLEMAS

1. Achar a área limitada pela hipérbole $xy = a^2$, o eixo dos xx e as retas $x = a$ e $x = 2a$. *Resp.* $a^2 \ln 2$.

2. Achar a área limitada pela curva $y = \ln x$, o eixo dos xx e a reta $x = 10$. *Resp.* 14,026.

3. Achar a área limitada pela curva $y = xe^x$, o eixo dos xx e a reta $x = 4$. *Resp.* 164,8.

4. Achar a área limitada pela parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ e os eixos coordenados. *Resp.* $\frac{1}{6}a^2$.

5. Achar a aréa encerrada pela hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
Resp. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

Achar a área limitada pelas curvas abaixo. Desenhe a figura em cada caso, mostrando o elemento de área.

6. $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$. *Resp.* 12.

7. $y^2 = 4x$, $x^2 = 6y$. 8.

8. $y^2 = 4x$, $2x - y = 4$. 9.

9. $y = 4 - x^2$, $y = 4 - 4x$. $10\frac{2}{3}$

10. $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.

11. $y = 6x - x^2$, $y = x$.

12. $y = x^3 - 3x$, $y = x$.

13. $y^2 = 4x$, $x = 12 + 2y - y^2$

14. Achar a área limitada pela parábola $y = 6 + 4x - x^2$ e a corda que liga os pontos $(-2, -6)$ e $(4, 6)$. *Resp.* 36.

15. Achar a área limitada pela parábola semi-cúbica $y^3 = x^2$ e a corda que liga os pontos $(-1, 1)$ e $(8, 4)$. *Resp.* 2,7.

16. Achar a área limitada pela hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, o eixo dos xx e uma reta traçada da origem ao ponto (x, y) da curva.

Resp. $\frac{a^2}{2} \ln \left(\frac{x + y}{a} \right)$.

17. Achar a área limitada pela curva $y = x(1 \pm \sqrt{x})$ e a reta $x = 4$. *Resp.* $\frac{128}{5}$.

18. Achar a área limitada pela curva $x^2 y = x^2 - 1$ e as retas $y = 1$, $x = 1$ e $x = 4$. *Resp.* $\frac{3}{4}$

19. Achar a área limitada pela curva $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$, o eixo dos yy e a reta $y = 29$. *Resp.* 108.

Pelo ponto (1, 1) traçam-se paralelas aos eixos coordenados, obtendo-se, assim, um quadrado. Achar a razão entre a maior e a menor das áreas em que êle é dividido por cada uma das seguintes curvas:

20. $y = x^2$. *Resp.* 2.

21. $y = x^3$. 3.

22. $y = x^4$. 4.

23. $y^3 = x^2$. $\frac{3}{2}$.

24. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. 5.

25. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. $\frac{32 - 3\pi}{3\pi}$.

26. $y = \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$. *Resp.* $\frac{2}{\pi - 2}$.

27. $y = xe^{x-1}$.

28. $y = \text{tg}\,\frac{\pi x}{4}$.

29. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$.

Para cada uma das curvas abaixo achar a área sob o arco que vai desde a interseção com OY até a primeira das interseções com OX, à direita da origem.

30. $x + y + y^2 = 2$. *Resp.* $1\frac{1}{6}$.

31. $y = x^3 - 8x^2 + 15x$. $15\frac{3}{4}$.

32. $y = e^x \,\text{sen}\, x$. 12,07.

33. $y^2 = (4 - x)^3$.

34. $y = e^{\frac{x}{2}} \cos 2x$.

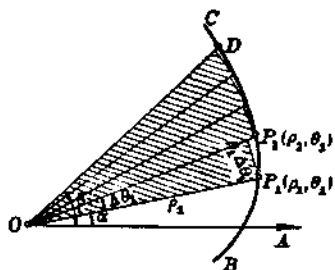
35. $y = 4e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{1}{2}\pi x$.

36. $y = \text{sen}\,(x + 1)$.

159. — Áreas das curvas planas; coordenadas polares. Quer-se achar a área limitada por uma curva e dois de seus raios vetores.

Seja

$$\rho = f(\theta)$$

a equação da curva e OP_1 e OD os dois raios vetores. Sejam α e β os ângulos que os raios vetores formam com o eixo polar. Apliquemos o teorema fundamental, § 156.

PRIMEIRO PASSO. A área é o limite da soma de setores circulares como os da figura.

SEGUNDO PASSO. Se $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, etc., são os ângulos cêntricos dos sucessivos setores e ρ_1, ρ_2, etc., os raios, a soma das áreas dos setores é

$$\tfrac{1}{2}\rho_1^2\,\Delta\theta_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\,\Delta\theta_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\rho_n^2\,\Delta\theta_n = \sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}\rho_i^2\,\Delta\theta_i\,,$$

pois a área de um setor circular é igual ao produto da metade do raio pelo arco e o arco é o produto do raio pelo ângulo do setor.

TERCEIRO PASSO. Aplicando o teorema fundamental.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}\rho_i^2\,\Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta}\tfrac{1}{2}\rho^2\,d\theta.$$

Portanto a área descrita pelo raio vetor da curva ao mover-se da posição OP_1 para a posição OD é dadá pela fórmula

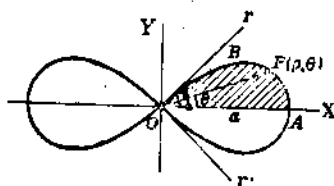
$$(D)\qquad \text{Área} = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2\,d\theta\,,$$

onde ρ, expresso em têrmos de θ, provém da equação da curva.

O elemento de área para (D) é um setor circular com raio ρ e ângulo cêntrico $d\theta$, portanto um setor de área $\frac{1}{2}\rho^2\,d\theta$.

Exemplo ilustrativo. Achar a área encerrada pela lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$

Solução. Como a figura é simétrica simultâneamente em relação a OX e OY, a área pedida é quatro vezes a área de OAB.

Como $\rho = 0$ quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, vemos que se θ varia de 0 a $\frac{\pi}{4}$, o raio vetor OP descreve a área OAB. Logo, substituindo em (D),

$$\text{área} = 4 \times \text{área } OAB = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta = 2\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \, d\theta = a^2,$$

isto é, a área de ambos os laços é igual à área de um quadrado construído sobre OA como lado.

PROBLEMAS

1. Achar a área limitada pelo círculo $\rho = a \cos \theta$ e as linhas $\theta = 0$ e $\theta = 60°$. *Resp.* $0{,}37\, a^2$.

2. Achar a área encerrada pela curva $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$. *Resp.* $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Calcular a área encerrada por cada uma das seguintes curvas.

3. $\rho^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$. *Resp.* 4.

4. $\rho = a \cos 3\theta$. $\frac{1}{4}\pi a^2$.

5. $\rho = a(1 - \cos\theta)$. $\frac{3}{2}\pi a^2$.

6. $\rho = 2 - \cos\theta$. $\frac{9}{2}\pi$.

7. $\rho = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$. $\frac{3}{8}\pi$.

8. $\rho = \frac{1}{2} + \cos 2\theta$. $\frac{3}{4}\pi$.

9. $\rho = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$. $\frac{9}{2}\pi$.

10. $\rho = 3 + \cos 3\theta$.

11. $\rho = a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta$.

12. $\rho = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$.

13. $\rho = a \operatorname{sen} n\theta$.

14. $\rho = \cos 3\theta - \cos\theta$.

15. $\rho = \cos 3\theta - 2\cos\theta$.

16. Achar a área limitada pela parábola $\rho(1 + \cos\theta) = a$ e as linhas $\theta = 0$ e $\theta = 120°$. *Resp.* $0{,}866\, a^2$.

17. Achar a área limitada pela hipérbole $\rho^2 \cos 2\theta = a^2$ e as linhas $\theta = 0$ e $\theta = 30°$. *Resp.* $0{,}33\, a^2$.

18. Prove que a área gerada pelo raio vetor da espiral $\rho = e^{\theta}$ é igual a um quarto da área do quadrado construído sobre o raio vetor.

19. Dada a parábola $\rho = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$, ache a área do segmento cuja corda passa pelo foco e é perpendicular ao eixo. *Resp.* $\frac{8}{3}a^2$.

20. Mostre que a área limitada por dois raios vetores da espiral hiperbólica $\rho\theta = a$ é proporcional à diferença entre os comprimentos desses raios.

21. Ache a área da elipse $\rho^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$.

Resp. πab.

22. Ache a área encerrada pela curva $\rho = a(\operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta)$.

Resp. πa^2.

23. Ache a área abaixo de OX encerrada pela curva $\rho = a \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$.

Resp. $\frac{1}{64}(10\pi + 27\sqrt{3})\, a^2$.

24. Ache a área limitada por $\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 4\theta$. *Resp.* a^2.

Ache a área limitada pelas seguintes curvas e retas

25. $\rho = \operatorname{tg} \theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

26. $\rho = e^{\theta}$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

27. $\rho = \sec \theta + \operatorname{tg} \theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

28. $\rho = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Calcule a área da parte comum às partes encerradas por cada um dos seguintes pares de curvas.

29. $\rho = 3 \cos \theta$, $\rho = 1 + \cos \theta$. *Resp.* $\frac{5}{4}\pi$.

30. $\rho = 1 + \cos \theta$, $\rho = 1$. $\frac{5}{4}\pi - 2$.

31. $\rho = 1 - \cos \theta$, $\rho = \operatorname{sen} \theta$. $\frac{1}{2}\pi - 1$.

32. $\rho^2 = 2 \cos 2\theta$, $\rho = 1$. $\frac{1}{3}\pi + 2 - \sqrt{3}$.

33. $\rho^2 = \cos 2\theta$, $\rho^2 = \operatorname{sen} 2\theta$. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

34. $\rho = \sqrt{6}\cos\theta,\ \rho^2 = 9\cos 2\theta.$ *Resp.* $\frac{1}{2}(\pi + 9 - 3\sqrt{3}).$

35. $\rho = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta,\ \rho^2 = \cos 2\theta.$ $\frac{1}{6}(\pi + 3 - 3\sqrt{3}).$

36. $\rho = \sqrt{2}\cos\theta,\ \rho^2 = \sqrt{3}\,\text{sen}\,2\theta.$

37. Ache a área interna ao círculo $3\rho = \sqrt{3}\cos\theta$ e ao laço da curva $\rho = \cos 2\theta$ de $\theta = -\frac{\pi}{4}$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$.

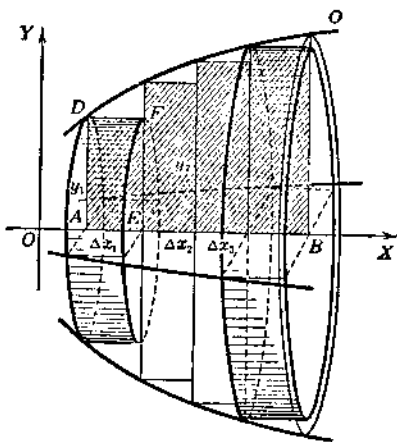
38. $3\rho = \sqrt{6}\,\text{sen}\,2\theta,\ \rho^2 = \cos 2\theta.$

39. Ache a área do laço interior da trissetriz $\rho = a\ (1 - 2\cos\theta)$ Para figura, ver limaçon, Capítulo XXVI. *Resp.* $\frac{1}{2}a^2(2\pi - 3\sqrt{3}).$

160. — Volumes dos sólidos de revolução. Seja V o volume do sólido gerado pela revolução, em tôrno de OX, da superfície plana $ABCD$ e seja

$$y = f(x)$$

a equação da curva plana DC.

Primeiro Passo. Dividamos o segmento AB em n partes de comprimentos $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ e tracemos um plano perpendicular a OX por cada um dos pontos de divisão. Estes planos decompõem o sólido em n faixas circulares. Construamos retângulos de bases $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n$ internos a $ABCD$, como mostra a figura. Quando $ABCD$ gira em torno de OX, estes retângulos geram cilindros de revolução, havendo, pois, um cilindro dentro de cada faixa circular. (Na figura é $n = 4$ e são desenhados dois cilindros). O limite da soma dos volumes dêstes n cilindros quando n tende ao infinito de modo que cada subintervalo tenda a zero é o volume pedido.

Segundo Passo. Sejam $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ as ordenadas dos pontos da curva DC correspondentes às abscissas dos pontos de divisão do

intervalo AB. Então o volume do cilindro gerado pelo retângulo $AEFD$ é $\pi y_1^2 \Delta x_1$ e a soma dos volumes dos cilindros é

$$\pi y_1^2 \Delta x_1 + \pi y_2^2 \Delta x_2 + \ldots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i$$

TERCEIRO PASSO. Aplicando o teorema fundamental (usando os limites $OA = a$, $OB = b$),

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 \, dx.$$

Logo, o volume do sólido gerado pela revolução, em torno de OX, da área limitada pela curva, o eixo dos xx e as retas $x = a$ e $x = b$ é dado pela fórmula

$$(E) \qquad V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx,$$

onde o valor de y, em têrmos de x, provém da equação da curva dada.

Esta fórmula pode ser fàcilmente memorizada se considerarmos uma faixa circular de espessura muito pequena como, aproximadamente, um cilindro de altura dx e cuja base tem área igual a πy^2 e por conseguinte um cilindro de volume $\pi y^2 \, dx$. Este cilindro é o elemento de volume.

Semelhantemente, obtemos, quando OY é o eixo de revolução, a fórmula

$$(F) \qquad V_y = \pi \int_a^b x^2 \, dy,$$

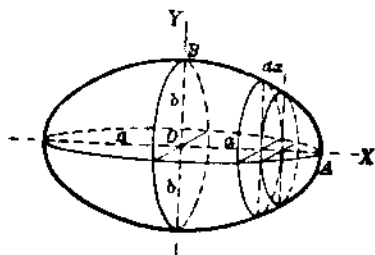
onde o valor de x, em termos de y, provém da equação da curva dada.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o volume gerado pela revolução, em torno le OX, da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUÇÃO. Como $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ e o volume pedido é duas vezes o volume gerado por OAB, obtemos, substituindo em (E).

$$\frac{V_x}{2} = \pi \int_0^a y^2\,dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{2\,\pi a\,b^2}{3}.$$

$$\therefore\quad V_x = \frac{4\,\pi a b^2}{3}.$$

Quando $b = a$, temos $V_x = \frac{4\,\pi a^3}{3}$ = volume de uma esfera, caso particular do elipsóide. Quando a elipse gira em torno do eixo maior, o sólido que gera diz-se elipsóide alongado; quando em tôrno do eixo menor, elipsóide achatado.

Exemplo ilustrativo 2. A área limitada pela parábola semi-cúbica

$$(1) \qquad ay^2 = x^3,$$

o eixo dos yy e a reta AB $(y = a)$ gira em torno de AB. Achar o volume do sólido de revolução gerado.

SOLUÇÃO. A área que gira é $OPAB$ da figura. Dividamos o segmento AB em n partes iguais e seja Δx o comprimento de cada uma delas. Na figura NM é uma dessas partes. O retângulo $NMPQ$ gera um cilindro, cujo volume é um elemento do volume que desejamos. Logo

Elemento de volume $= \pi r^2 h = \pi (a - y)^2 \Delta x$,

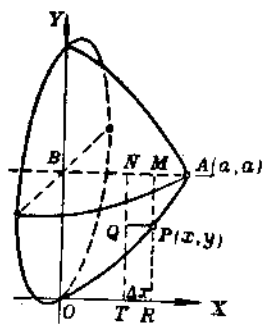
pois $\qquad r = PM = RM - RP = a - y$

e $\qquad h = NM = \Delta x$.

Pelo teorema fundamental temos, pois,

$$(2) \quad \text{Volume do sólido} = V = \pi \int_0^a (a - y)^2\,dx = \pi \int_0^a (a^2 - 2\,ay + y^2)\,dx,$$

visto serem $x = 0$ e $x = AB = a$ os limites. Substituindo y pelo valor dado por (1), obtemos $V = 0{,}45\,\pi\,a^3$. *Resp.*

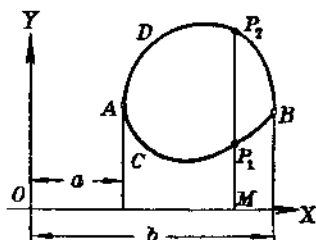
Confronte o resultado com o volume do cone de revolução de altura AB $(=a)$ e cuja base tem raio OB $(= a)$. Volume do cone $= \frac{1}{3}\pi a^3$.

Se a curva CD da figura da página 330 é dada por equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = \phi(t),$$

põe-se em (E), $y = \phi(t)$, $dx = f'(t)\,dt$ e se

$$t = t_1 \text{ quando } x = a, \; t = t_2 \text{ quando } x = b,$$

então os limites de integração são t_1 e t_2.

Volume de um sólido oco de revolução. Quando uma área plana gira em torno de um eixo que não a corta, obtém-se um sólido de revolução oco. Consideremos o sólido obtido pela revolução, em torno de OX, da área $ACBDA$ da figura. Cortemos o sólido por um sistema de planos perpendiculares ao eixo de revolução e equidistantes. Seja Δx a distância entre dois planos consecutivos. O sólido fica decomposto em faixas circulares ocas, cada uma com espessura Δx. Se um dos planos passa por M, a faixa circular com uma base neste plano é aproximadamente um cilindro circular ôco cujos raios interno e externo são respectivamente $MP_1 (= y_1)$ e $MP_2 (= y_2)$. A altura dêle é Δx; logo, o seu volume é $\pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x$. Havendo n cilindros como este, o limite da soma dos volumes desses cilindros, quando n tende ao infinito de modo que cada uma das alturas tenda a zero, é o volume do sólido de revolução. Consequentemente

$$(3) \qquad V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx. \qquad (y_2 > y_1)$$

O elemento de volume em (3) é um cilindro circular oco com raio interior y_1, raio exterior y_2 e altura dx. Os raios y_1 e y_2 são funções de $x\,(= OM)$ que se obtém das equações das curvas (ou, equação da curva) limitando a área a ser girada.

Exemplo ilustrativo 3. Achar o volume do anel sólido (ou *toro*) obtido pela revolução de um círculo de raio a em tôrno de um eixo exterior situado no plano do círculo e distante de b unidades do centro do círculo $(b > a)$.

Solução. Seja

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

a equação do círculo e seja OX o eixo de revolução. Achando y, temos

$$y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

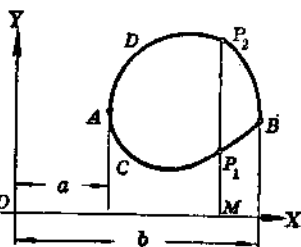
$$\therefore \quad dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)\,\Delta x = 4\,\pi b\sqrt{a^2 - x^2}\,\Delta x\,.$$

Por (3), $$V_x = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\,\pi^2 a^2 b\,. \quad \textit{Resp.}$$

Se a área $ACBD$ da figura gira em tôrno do eixo dos yy, tem-se

$$(4) \qquad V_y = 2\,\pi \int_a^b (y_2 - y_1)\,x\,dx$$

como fàcilmente pode ser verificado.

Em (4), $x = OM$, $y_1 = MP$, $y_2 = MP_2$. O elemento de volume dV é um paralelepípedo de dimensões $y_2 - y_1$, x e dx.

O exemplo ilustrativo 3 pode ser resolvido pela fórmula (4).

PROBLEMAS

1. Achar o volume da esfera gerada pela revolução do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em torno de um diâmetro. *Resp.* $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Achar por integração o volume do sólido gerado pela revolução, em torno de Ox, da área limitada pelas linhas $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 4$. Verificar geomètricamente.

3. Achar o volume do parabolóide de revolução cuja superfície é gerada pelo arco da parábola $y^2 = 2\,px$, que vai da origem até (x_1, y_1), girando em torno do seu eixo.

Resp. $\pi\,p\,x_1^2 = \frac{1}{2}\pi\,y_1^2\,x_1$, isto é, metade do volume do cilindro circunscrito.

4. Achar o volume do sólido obtido quando o arco do problema anterior gira em tôrno de OY.

Resp. $\frac{1}{5}\pi\,x_1^2\,y_1$, isto é, um quinto do volume do cilindro de altura y_1 e raio de base x_1.

Achar o volume gerado pela revolução, em torno de OX, das áreas limitadas pelos seguintes lugares geométricos.

5. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2.$ *Resp.* $\frac{128}{7}\pi.$

6. $ay^2 = x^3,\ y = 0,\ x = a.$ $\frac{1}{4}\pi a^3.$

7. A parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0.$ $\frac{1}{15}\pi a^3.$

8. A hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$ $\frac{32}{105}\pi a^3.$

9. Um arco de $y = \operatorname{sen} x.$ $\frac{1}{2}\pi^2.$

10. Um arco de $y = \cos 2x.$ $\frac{1}{4}\pi^2.$

11. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5.$ $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-10}).$

12. $9x^2 + 16y^2 = 144.$ $48\pi.$

13. $y = xe^x,\ y = 0,\ x = 1.$ $\frac{1}{4}\pi(e^2 - 1).$

14. $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3,\ y = 0.$ $4\pi^2 a^3.$

15. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$ $\frac{32}{35}\pi ab^2.$

16. $y^2(2a - x) = x^3,\ y = 0,\ x = a.$ $0{,}2115\,\pi a^3.$

17. $y = x^2 - 6x,\ y = 0.$

18. $y^2 = (2 - x)^3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1.$

19. $y^2(4 + x^2) = 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \infty$

20. $(x - 1)y = 2,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5.$

Achar o volume gerado pela revolução, em torno de OY, das áreas limitadas pelos seguintes lugares geométricos.

21. $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2.$ *Resp.* $\frac{64}{5}\pi.$

22. $2y^2 = x^3,\ y = 0,\ x = 2.$ $\frac{32}{7}\pi.$

23. $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0.$ $2\pi.$

24. $9x^2 + 16y^2 = 144.$ $64\pi.$

25. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$ $\frac{4}{5}\pi a^2 b.$

26. $y^2 = 9 - x,\ x = 0.$

27. $x^2 = 16 - y,\ y = 0.$

28. $y^2 = ax,\ y = 0,\ x = a.$

29. A equação da curva OA da figura é $y^2 = x^3$. Achar o volume gerado pela revolução da área

(a) OAB em torno de OX. *Resp.* $64\,\pi$.

(b) OAB em torno de AB. $\frac{1024}{35}\pi$.

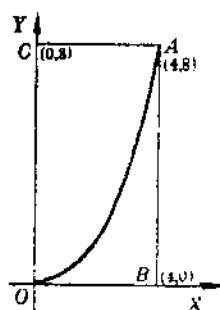
(c) OAB em torno de CA. $\frac{704}{5}\pi$.

(d) OAB em torno de OY. $\frac{512}{7}\pi$.

(e) OAC em torno de OY. $\frac{384}{7}\pi$.

(f) OAC em torno de CA. $\frac{576}{5}\pi$.

(g) OAC em torno de AB. $\frac{3456}{35}\pi$.

(h) OAC em torno de OX. $192\,\pi$.

30. Achar o volume do esferóide achatado gerado pela revolução da área limitada pela elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ em torno do eixo dos yy.

Resp. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

31. Corta-se de uma esfera de raio r um segmento de uma base de espessura h. Mostre por integração que o volume desse sólido é $\dfrac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$.

Achar o volume gerado pela revolução, em torno de cada uma das seguintes retas, da área que a reta corta da curva correspondente.

32. $y = 3;\ y = 4x - x^2$. *Resp.* $\frac{16}{15}\pi$.

33. $x = 4;\ y^2 = x^3$. $\frac{2048}{35}\pi$.

34. $y = -4;\ y = 4 + 6x - 2x^2$. $\frac{1250}{3}\pi$.

35. $y = x;\ y = x^2$. $\frac{1}{60}\pi\sqrt{2}$.

36. $y = x;\ y = 3x - x^2$. $\frac{8}{15}\pi\sqrt{2}$.

37. $4y = 4x + 33;\ y = 9 - x^2$. $\frac{8}{15}\pi\sqrt{2}$.

38. $x + y = 1;\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. $\frac{1}{15}\pi\sqrt{2}$.

39. $x + y = 7;\ xy = 6$.

40. Achar o volume gerado pela revolução, em torno de OX, de um arco da ciclóide

$$x = r \operatorname{arc\,vers} \frac{y}{r} - \sqrt{2\,ry - y^2}$$

Sugestão: Ponha $dx = \dfrac{y\,dy}{\sqrt{2\,ry - y^2}}$ e limites $y = 0$, $y = 2r$ em (*E*), § 160

Resp. $5\pi^2r^3$

41. Ache o volume gerado pela revolução, em torno de OX, da porção da catenária $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, que se projeta sobre OX no segmento $(0,b)$.

Resp. $\dfrac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \dfrac{\pi a^2 b}{2}$.

42. Achar o volume do sólido gerado pela revolução da cissóide $y^2 = \dfrac{x^3}{2\,a - x}$ em torno da assíntota $x = 2\,a$. *Resp.* $2\,\pi^2 a^3$.

43. Dado o coeficiente angular da tangente à tratória $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, achar o volume do sólido gerado pela revolução da curva em torno de OX.

Resp. $\frac{2}{3}\,\pi\,a^3$.

44. Mostre que o volume de uma tampa cônica, cortada do sólido gerado pela revolução da hipérbole $x^2 - y^2 = a^2$ em torno de OX, é igual ao volume de uma esfera de raio a, se a altura da tampa é igual a a.

45. Usando as equações paramétricas da hipociclóide

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta, \end{cases}$$

achar o volume do sólido que ela gera quando gira em torno de OX.

Resp. $\frac{32}{105}\,\pi a^3$.

46. Ache o volume gerado pela revolução em torno de OX de um arco da ciclóide

$$\begin{cases} x = a\,(\theta - \mathrm{sen}\,\theta), \\ y = a\,(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

Resp. $5\,\pi^2 a^3$.

Mostre que se o arco gira em torno de OY, então o volume do sólido gerado é $6\pi^3 a^3$.

47. Achar o volume gerado pela revolução, em torno de OX, da área limitada pela curva $y = \sec \frac{1}{2}\pi x$, o eixo dos xx e as retas $x = \pm \frac{1}{2}$. *Resp.* 4.

48. A área sob a curva $y = e^x \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$ gira em tôrno de OX. Achar o volume do sólido gerado.

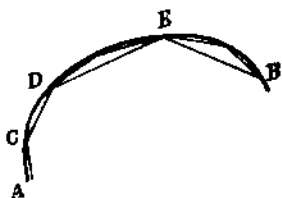
49. Dada a curva $x = t^2$, $y = 4t - t^3$, achar (*a*) a área do laço e (*b*) o volume gerado por esta área quando gira em tôrno de OX.

Resp. (*a*) $\dfrac{256}{15}$; (*b*) 67,02.

50. Faça girar a área limitada pelas parábolas $y^2 = 4x$ e $y^2 = 5 - x$ em tôrno de cada eixo e calcule os respectivos volumes.

Resp. OX: 10π; OY: $\dfrac{176}{3}\pi$.

51. Faça girar em torno do eixo polar a parte da cardióide $\rho = 4 + 4\cos\theta$ compreendida entre as linhas $\theta = 0$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e calcule o volume. *Resp.* 160π.

161. — Comprimento de uma curva. *Por comprimento de um segmento de reta* entendemos o número de vezes que o segmento contém outro tomado como unidade. Medir um segmento é achar o seu comprimento, como faz o carpinteiro quando, querendo achar o comprimento de uma tábua, aplica sobre ela uma régua milimetrada. Como é impossível aplicar sobre uma curva um segmento de reta, nós não a podemos medir do mesmo modo que um segmento de reta. Procedemos, então, como segue: dividimos a curva (como AB) num número de partes, arbitràriamente escolhidas, por pontos (como C, D, E) e ligamos os pontos consecutivos por segmentos de reta (como AC, CD, DE, EB).

O comprimento da curva é definido como o limite da soma dos comprimentos dos segmentos de reta, quando o número de pontos de divisão tende ao infinito de modo tal que o comprimento de cada segmento tenda a zero.

Como este limite é também a medida do comprimento de algum segmento de reta, a procura do comprimento de um arco de curva é também chamada de "retificação do arco".

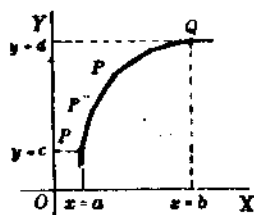
O estudante já teve ocasião de ver esta definição quando estudou geometria elementar. Realmente, o comprimento de uma circunferência, como deve lembrar o estudante, é o limite do perímetro de um polígono regular inscrito (ou circunscrito) quando o número de lados do polígono cresce indefinidamente.

No parágrafo seguinte damos o modo de achar o comprimento de uma curva plana, baseado na definição acima. O estudante deve notar cuidadosamente como vamos proceder.

162. — Comprimentos das curvas planas; coordenadas retangulares. Vamos exprimir analìticamente a definição do último parágrafo, fazendo uso do teorema fundamental.

Dada a curva

$$y = f(x)$$

e os pontos $P'(a, c)$, $Q(b, d)$ sôbre ela, achar o comprimento do arco $P'Q$.

Primeiro Passo. Tomemos um número n qualquer de pontos sôbre a curva compreendidos entre P' e Q e tracemos as cordas ligando os pontos consecutivos, como na figura. O comprimento do arco $P'Q$ é o limite da soma dos comprimentos de tais cordas.

Segundo Passo. Consideremos uma qualquer das cordas, por exemplo $P'P''$, e sejam

$$P'(x', y') \quad \text{e} \quad P''(x' + \Delta x', \ y' + \Delta y')$$

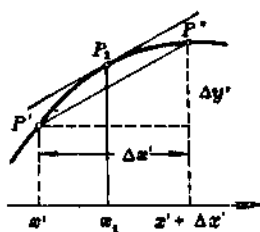
as coordenadas de P' e P'' respectivamente.

Então, como no § 95,

$$P'P'' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2},$$

ou

$$P'P'' = \left[1 + \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x'.$$

(Dividindo dentro do radical por $(\Delta x')^2$ e multiplicando por $\Delta x'$).

Mas, pelo teorema do valor médio (§ 116) (pondo $\Delta y' = f(b) - f(a)$ e $\Delta x' = b - a$), temos

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = f'(x_1), \qquad (x' < x_1 < x' + \Delta x')$$

sendo x_1 a abscissa de um ponto P_1 sobre a curva compreendido entre P' e P'' no qual a tangente é paralela à corda.

Substituindo, $\quad P'P'' = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x' =$
$\quad$ = comprimento da primeira corda.

Semelhantemente, $P''P''' = [1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x'' =$
$\quad$ = comprimento da segunda corda.

. . . .

$P^{(n)} Q = [1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(n)} =$
$\quad$ = comprimento da n-egésima corda.

O comprimento da linha poligonal inscrita ligando P' a Q (soma das cordas) é, então, a soma destas expressões, precisamente,

$$[1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x' + [1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x'' + \ldots + [1 + f'(x_n)^2] \Delta x^{(n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(i)}.$$

Terceiro Passo. Aplicando o teorema fundamental,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [7 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x^{(i)} = \int_a^b [1 + f' x)^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

Temos, pois, indicando com s o comprimento do arco $P'Q$, a *fórmula que dá o comprimento do arco*

$$s = \int_a^b [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx, \text{ ou}$$

$$(G) \qquad s = \int_a^b [1 + y'^2]^{\frac{1}{2}} dx,$$

onde $y' = \frac{dy}{dx}$, em termos de x, deve ser obtida da equação da curva dada.

Algumas vezes é mais conveniente usar y como variável independente. Notando que (§ 39)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}; \quad \text{logo} \quad dx = x'\,dy\,,$$

temos, substituindo estes valores em (G) e fazendo as correspondentes mudanças de limites de integração.

$$(H) \qquad s = \int_c^d [x'^2 + 1]^{\frac{1}{2}}\,dy\,,$$

sendo c e d os novos limites de integração.

Em (H), $x' = \frac{dx}{dy}$ deve ser obtida, em termos de y, da equação da curva dada.

A fórmula (G) pode ser deduzida de outro modo. Vimos no § 95, fórmula (D), que

$$(1) \qquad ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

dá a diferencial do arco de uma curva. Partindo de (1) e procedendo como no § 142, obtemos (G). Semelhantemente, (H) resulta de (E) do § 95. Finalmente, se a curva é dada por equações paramétricas

$$(2) \qquad x = f(t)\,, \quad y = \phi(t)\,,$$

é conveniente usar

$$(3) \qquad s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} [f'^2(t) + \phi'^2(t)]^{\frac{1}{2}}\,dt$$

pois, de (2), $dx = f'(t)\,dt$, $dy = \phi'(t)\,dt$.

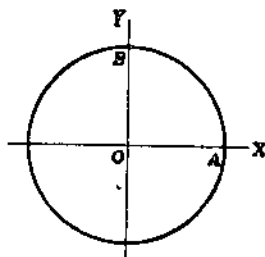
Exemplo ilustrativo 1. Achar o comprimento da circunferência do círculo

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

SOLUÇÃO. Derivando, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$.

Substituindo em (G),

$$\text{Arco } BA = \int_0^r \left[1 + \frac{x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^r \left[\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^r \left[\frac{r^2}{r^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

[Pusemos $y^2 = r^2 - x^2$, que resulta da equação do círculo, afim de ter o integrando em têrmos de x.]

$$\therefore \text{ arc } BA = r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi r}{2}.$$ (Ver exemplo ilustrativo 1, § 154).

Logo, o comprimento total é igual a $2\pi r$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Achar o comprimento de um arco da ciclóide

$$x = a\,(\theta - \text{sen}\,\theta)\,, \quad y = a\,(1 - \cos\theta)\,.$$

Ver exemplo ilustrativo 2, § 81.

SOLUÇÃO. $\quad dx = a\,(1 - \cos\theta)\,d\theta, \quad dy = a\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\,.$

Então $\quad dx^2 + dy^2 = 2\,a^2\,(1 - \cos\theta)\,d\theta^2 = 4\,a^2\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,d\theta^2.$

Usando (3), $\quad s = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2\,a\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,\theta\,d\theta = 8\,a.$ *Resp.*

Os limites são os valores de θ em O e D (ver figura, exemplo ilustrativo 2, § 81), isto é, $\theta = 0$ e $\theta = 2\,\pi$.

Exemplo ilustrativo 3. Achar o comprimento do arco da curva $25\,y^2 = x^5$ de $x = 0$ a $x = 2$.

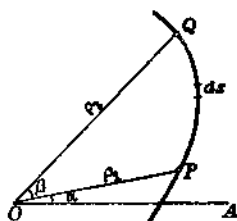
SOLUÇÃO. Derivando, $y' = \frac{1}{2}\,x^{\frac{3}{2}}$. Logo, por (G),

$$(4) \qquad s = \int_0^2 (1 + \tfrac{1}{4}\,x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 (4 + x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx\,.$$

A integral em (4) foi calculada (aproximadamente) no exemplo ilustrativo 2, § 148, pela regra do trapézio e também no exemplo ilustrativo 2, § 149, pela regra de Simpson. Tomando o último valor, $s = \frac{1}{2}\,.\,4{,}821 = 2{,}41$ *unidades lineares*. *Resp.*

163. — Comprimentos das curvas planas; coordenadas polares. De (I), § 96, obtemos, procedendo como no § 142, a *fórmula para o comprimento do arco,*

$$\text{(I)} \qquad s = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta\,,$$

onde ρ e $\frac{d\rho}{d\theta}$ devem figurar em têrmos de θ e provêm da dada equação da curva.

No caso de ser mais conveniente usar ρ como variável independente, e a equação na forma

$$\theta = \phi\,(\rho),$$

então
$$d\theta = \phi'\,(\rho)\,d\rho = \frac{d\theta}{d\rho}\,d\rho\,.$$

Substituindo isto em $[\rho^2\,d\theta^2 + d\rho^2]^{\frac{1}{2}}$,

temos
$$\left[\rho^2 \left(\frac{p\theta}{d\rho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} d\rho\,.$$

Logo, se ρ_1 e ρ_2 são os correspondentes limites da variável independente ρ, obtemos a *fórmula para o comprimento do arco.*

$$(J) \qquad s = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} d\rho$$

onde $\frac{d\theta}{d\rho}$ em têrmos de ρ deve ser obtido da equação da curva dada.

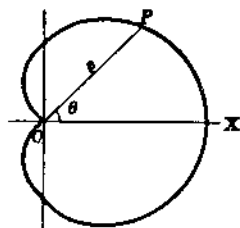
Exemplo ilustrativo. Achar o perímetro da cardióide $\rho = a\,(1 + \cos\theta)$.

Solução. Aqui $\frac{d\rho}{d\theta} = -a \operatorname{sen}\theta$.

Fazendo θ variar de 0 a π, o ponto P descreverá metade do perímetro. Substituindo em (I),

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} [a^2\,(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2\theta]^{\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$$= a\int_0^{\pi} (2 + 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\,.$$

$\therefore\ s = 8a.$ *Resp.*

PROBLEMAS

1. Achar o comprimento da curva $y^3 = x^2$ entre os pontos (0, 0) e (8, 4). *Resp.* 9,07.

2. Achar o comprimento do arco da parábola semi-cúbica $ay^2 = x^3$ desde a origem até $x = 5\,a$. *Resp.* $\frac{335\,a}{27}$.

3. Achar o comprimento da curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ do ponto onde $x = 1$ até o ponto onde $x = 3$. *Resp.* $\frac{14}{3}$.

4. Achar o comprimento do arco da parábola $y^2 = 2\,px$ do vértice a uma das extremidades da corda focal perpendicular ao eixo.

Resp. $\frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2}\ln(1 + \sqrt{2})$.

5. Achar o comprimento do arco da curva $y^2 = x^3$ do ponto onde $x = 0$ ao ponto onde $x = \frac{5}{9}$. *Resp.* $\frac{19}{27}$.

6. Achar o comprimento do arco da parábola $6\,y = x^2$ da origem ao ponto $(4, \frac{8}{3})$. *Resp.* 4,98.

7. Aproxime com a regra de Simpson o comprimento do arco da curva $3\,y = x^3$ da origem ao ponto $(1, \frac{1}{3})$. *Resp.* 1,09.

8. Calcular o comprimento do arco da curva $y = \ln \sec x$ da origem ao ponto $(\frac{\pi}{3}, \ln 2)$. *Resp.* $\ln(2 + \sqrt{3})$.

9. Calcular o comprimento do arco da hipérbole $x^2 - y^2 = 9$ de (3, 0) a (5, 4) (use a regra de Simpson). *Resp.* 4,56.

10. Calcular o comprimento do arco da parábola $y = 4\,x - x^2$, que está acima do eixo dos xx. *Resp.* 9,29.

11. Achar o comprimento da hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Resp. $6\,a$.

12. Retificar a catenária $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ de $x = 0$ ao ponto (x, y). *Resp.* $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

13. Achar o comprimento de um arco da ciclóide $x = r \text{ arc vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$ *Resp.* $8r$.

SUGESTÃO: Use (*H*), § 162. Aqui $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

14. Retifique a curva $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ de $x = 0$ a $x = 3a$.
Resp. $2a\sqrt{3}$.

15. Ache o comprimento, em um quadrante, da curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. *Resp.* $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$.

16. Ache o comprimento de $x = a$ a $x = b$ da curva $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$. *Resp.* $\ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b$.

17. As equações da involuta de um círculo são

$$\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta), \\ y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta). \end{cases}$$

Ache o comprimento do arco de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_1$. *Resp.* $\frac{1}{2} a \theta_1^2$.

18. Ache o comprimento do arco da curva $\begin{cases} x = e^\theta \operatorname{sen}\theta \\ y = e^\theta \cos\theta \end{cases}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$. *Resp.* $\sqrt{2}\,(e^{\frac{\pi}{2}} - 1)$.

Ache o comprimento do arco de cada uma das seguintes curvas.

19. $y = \ln(1 - x^2)$ de $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$.

20. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

21. $y = \ln \operatorname{cossec} x$ de $x = \frac{\pi}{6}$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

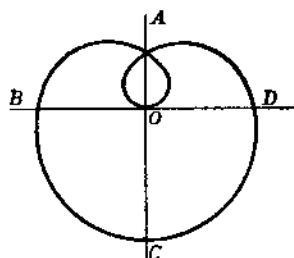
22. $3x^2 = y^3$ de $y = 1$ a $y = 20$.

23. Um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$.

24. Achar o comprimento da espiral de Archimedes $\rho = a\theta$, desde a origem até o fim da primeira revolução.

Resp. $\pi a\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.

25. Retifique a espiral $\rho = e^{a\theta}$ desde a origem até o ponto (ρ, θ).

SUGESTÃO: Use (J). *Resp.* $\frac{\rho}{a}\sqrt{a^2+1}$

26. Ache o comprimento da curva $\rho = a\sec^2\frac{\theta}{2}$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Resp. $[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)]\,a$

27. Ache o comprimento do arco da parábola

$$\rho = \frac{2}{1+\cos\theta} \text{ de } \theta = 0 \text{ a } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Resp. $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$.

28. Ache o comprimento da espiral hipérbólica $\rho\theta = a$ de (ρ_1, θ_1) a (ρ_2, θ_2).

Resp. $\sqrt{a^2+\rho_1^2} - \sqrt{a^2+\rho_2^2} + a\ln\frac{\rho_1(a+\sqrt{a^2+\rho_2^2})}{\rho_2(a+\sqrt{a^2+\rho_1^2})}$.

29. Mostre que o comprimento da curva $\rho = a\,\text{sen}^3\frac{\theta}{3}$ é $\frac{3\pi a}{2}$. Mostre que OA, AB, BC (ver figura) estão em progressão aritmética.

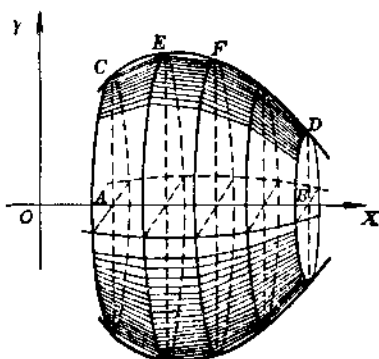
30. Ache o comprimento do arco da cissóide $\rho = 2a\,\text{tg}\,\theta\,\text{sen}\,\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$.

31. Aproxime o perímetro de um ramo da curva $\rho = \text{sen}\,2\theta$.

164. — Áreas das superfícies de revolução. Uma superfície de revolução é gerada pela revolução, em torno de OX, do arco CD da curva

$$y = f(x).$$

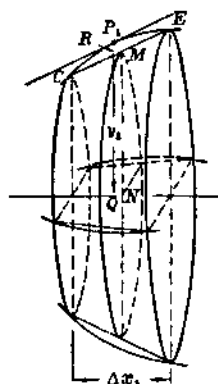
Achar a área desta superfície, fazendo uso do teorema fundamental.

PRIMEIRO PASSO. Como anteriormente, dividamos o intervalo AB em subintervalos Δx_1, Δx_2, etc., e levantemos perpendiculares a OX pelos pontos de divisão. Tracemos as cordas CE, EF,

etc., da curva. Quando a curva gira, cada corda gera a superfície lateral de um tronco de cone de revolução. A área, que se quer calcular, da superfície de revolução é definida como o limite da soma das áreas laterais destes troncos.

Segundo Passo. Por amor à clareza, desenhemos o primeiro tronco bem grande. Seja M o ponto médio da corda CE. Então

(1) Área lateral $= 2\pi NM.CE.$*

Afim de aplicar o teorema fundamental é necessário exprimir este produto em função da abscissa de algum ponto do intervalo Δx_1. Como no § 162, obtemos, usando o teorema do valor médio, o comprimento da corda CE:

(2) $$CE = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}}\, \Delta x_1,$$

onde x_1 é a abscissa do ponto $P_1(x_1, y_1)$ do arco CE onde a tangente é paralela à corda CE. Seja R a interseção da horizontal passando por M com a reta QP_1 (vertical por P_1) e indiquemos RP_1 por ϵ_1.** Então

(3) $$NM = y_1 - \epsilon_1.$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

$2\pi(y_1 - \epsilon_1)[1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_1 =$ área lateral do primeiro tronco.

Semelhantemente,

$2\pi(y_2 - \epsilon_2)[1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_2 =$ área lateral do segundo tronco.

. . . .

$2\pi(y_n - \epsilon_n)[1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_n =$ área lateral do último tronco

Logo

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i - \epsilon_i)[1 + f'(x_i^2)]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_i = \text{soma das áreas laterais dos troncos.}$$

* A área lateral de um tronco de cone de revolução é igual à circunferência da seção média multiplicada pela geratriz do tronco.

** Observe o leitor que quando Δx_1 tende a zero, ϵ_1 também tende a zero.

Esta pode ser escrita sob a forma

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} 2\,\pi y_i\,[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_i - 2\,\pi \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\,[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_i.$$

TERCEIRO PASSO. Aplicando o teorema fundamental à primeira soma (usando os limites $OA = a$ e $OB = b$), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\,\pi y_i\,[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_i = \int_a^b 2\,\pi y\,[1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

O limite da segunda soma de (4) quando $n \to \infty$ é zero*. Logo a área da superfície de revolução gerada pela revolução do arco CD em tôrno de OX é dada pela fórmula

$$(K) \qquad S_x = 2\,\pi \int_a^b y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx\,,$$

onde S_x indica a área. A fórmula pode também ser escrita como segue:

$$(L) \qquad S = 2\,\pi \int_a^b y\,ds.$$

Semelhantemente acha-se

$$(M) \qquad S_y = 2\,\pi \int_c^d x\,ds$$

quando OY é o eixo de revolução.

Em (L) e (M) ds tem uma das três formas (C), (D), (E) do § 95, precisamente,

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}\,,$$

---

* Vê-se isto fàcilmente como segue. Indiquemos a segunda soma por S_n. Se ϵ é igual ao máximo dos números positivos $|\epsilon_1|$, $|\epsilon_2|$, ... $|\epsilon_n|$, então,

$$S_n \leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_i.$$

A soma do segundo membro é, pelo § 162, igual à soma das cordas CP, EF, etc. Seja l_n esta soma. Então $S_n \leq \epsilon l_n$. Como $\lim_{n\to\infty} \epsilon = 0$, $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$.

dependendo da escolha da variável independente. A última forma deve ser usada quando a curva é dada por equações paramétricas. Quando usar (L) ou (M), calcule primeiro ds.

A fórmula (L) pode ser lembrada fàcilmente se considerarmos uma estreita faixa da superfície compreendida entre dois planos perpendiculares ao eixo de revolução como sendo aproximadamente a superfície de um tronco de cone de revolução de geratriz ds com uma seção média de cicrunferência igual a $2\pi y$, e portanto de área lateral $2\pi y\, ds$.

Exemplo ilustrativo 1. O arco da parábola cúbica

$$a^2 y = x^3 \tag{5}$$

compreendido entre os pontos de abscissas $x = 0$ e $x = a$ gira em tôrno de OX. Achar a área da superfície de revolução gerada.

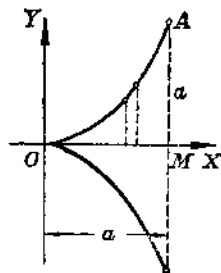
SOLUÇÃO. De (5), $y' = \frac{3x^2}{a^2}$. Logo

$$ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{a^2}(a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Então, elemento de área $= 2\pi y ds = \frac{2\pi}{a^4}(a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} x^3\, dx.$

Logo, por (L),

$$S_x = \frac{2\pi}{a^4}\int_0^a (a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \frac{\pi}{27a^4}\left[(a^4 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)\, a^2 = 3{,}6\, a^2. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar a área do elipsóide de revolução gerado pela rotação, em tôrno de OX, da elipse cujas equações paramétricas são (ver (3), § 81) $x = a\cos\phi$, $y = b \operatorname{sen}\phi$.

SOLUÇÃO. Temos

$$dx = -a \operatorname{sen}\phi\, d\phi, \quad dy = b\cos\phi\, d\phi,$$

e

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2 \operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}\, d\phi.$$

Logo, elemento de área $= 2\pi y\, ds = 2\pi b\,(a^2\operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi.$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2} S_x = 2\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi. \tag{6}$$

Para integrar, ponhamos $y = \cos\phi$. Então $du = -\operatorname{sen}\phi\, a\phi$, e

$$a^2\operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi = a^2(1 - \cos^2\phi) + b^2\cos^2\phi = a^2 - (a^2 - b^2)\, u^2.$$

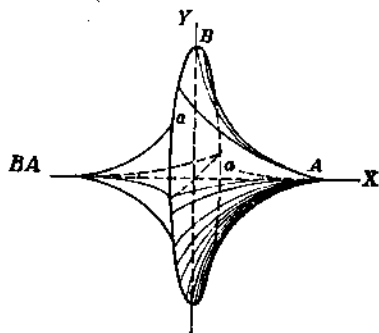
Portanto, usando os novos limites $u = 1$, $u = 0$ e trocando-os (§ 150), obtemos

$$\tfrac{1}{2} S_x = 2 \pi b \int_0^1 [a^2 - b^2) u^2]^{\frac{1}{2}} d \quad u. \qquad (a > b)$$

Desenvolvendo por (22),

$$S_x = 2 \pi b^2 + \frac{2 \pi ab}{e} \text{ arc sen } e, \text{ onde } e = \text{excentricidade} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \text{ Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 3. Achar a área da superfície gerada pela revolução da hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ em tôrno do eixo dos xx.

Solução. Aqui $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$;

$$ds = \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx$$

Substituindo em (L), notando que o arco BA gera só metade da superfície, temos

$$\frac{S_x}{2} = 2 \pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

Esta é uma integral imprópria pois a função a ser integrada é descontínua quando $x = 0$. Usando a definição (1), § 154, obtemos

$$\frac{S_x}{2} = \frac{6 \pi a 5^2}{5}. \quad \therefore \quad S_x = \frac{12 \pi a^2}{5}.$$

PROBLEMAS

1. Achar por integração a área da superfície de uma esfera gerada pela revolução do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em torno de um diâmetro. *Resp.* $4 \pi r^2$.

2. Achar por integração a área da superfície do cone gerado pela revolução, em torno de OX, do segmento de reta ligando a origem com o ponto (a, b).

Resp. $\pi b \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Achar por integração a área da superfície do cone gerado pela revolução, em torno de OX, do segmento da reta $y = 2x$, cuja projeção sobre OX é o segmento $[0, 2]$. Ache também a área gerada pela revolução em torno de OY. Verifique seus resultados geomètricamente.

4. Achar por integração a área lateral de um tronco de cone gerado pela revolução, em torno de OX, do segmento da reta $2y = x - 4$, cuja projeção sôbre OX é o segmento $[0, 5]$. Verificar o resultado geomètricamente.

5. Achar a área da superfície gerada pela revolução, em tôrno de OY, do arco da parábola $y = x^2$, cuja projeção sôbre OY é o segmento $[0, 2]$.

6. Achar a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, do arco de parábola $y = x^2$, compreendido entre $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

7. Achar a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, do arco de parábola $y^2 = 4 - x$, que está no primeiro quadrante. *Resp.* 36, 18.

8. Achar a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, do arco da parábola $y^2 = 2px$, cuja projeção sobre OX é o segmento $[0, 4p]$. *Resp.* $\frac{52}{3}\pi p^2$.

9. Achar a área da superfície gerada pela revolução, em tôrno de OY, do arco de $y = x^3$ compreendido entre $(0, 0)$ e $(2, 8)$.

Achar a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, de cada uma das seguintes porções de curvas.

10. $9y = x^3$, de $x = 0$ a $x = 2$. *Resp.* $\frac{98}{81}\pi$

11. $y^2 = 9x$, de $x = 0$ a $x = 4$. 49π.

12. $y^2 = 24 - 4x$, de $x = 3$ a $x = 6$. $\frac{56}{3}\pi$.

13. $6y = x^2$, de $x = 0$ a $x = 4$. $\dfrac{(820 - 81 \ln 3)\pi}{72}$.

14. $y = e^{-x}$, de $x = 0$ a $x = \infty$. $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$

15. Laço de $9ay^2 = x(3a - x)^2$. $3\pi a^2$.

16. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$, de $x = a$ a $x = 2a$. $\frac{47}{16}\pi a^2$.

17. Um laço de $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$. $\frac{1}{4}\pi a^2$.

18. $y^2 + 4x = 2\log y$, de $y = 1$ a $y = 2$. $\frac{10}{3}\pi$.

19. ciclóide $\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$ *Resp.* $\frac{64}{3}\pi a^2$.

20. cardióide $\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta), \\ y = a(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta). \end{cases}$ $\frac{128}{5}\pi a^2$.

21. $y^2 = 4x$, de $x = 0$ a $x = 3$.

22. $x^2 + y^2 = 4$, de $x = 1$ a $x = 2$.

23. $x^2 + 4y^2 = 36$.

24. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Achar a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OY, de cada uma das curvas seguintes

25. $x = y^3$, de $y = 0$ a $y = 3$. *Resp.* $\frac{1}{27}\pi[(730)^{\frac{3}{2}} - 1]$.

26. $y = x^3$, de $y = 0$ a $y = 3$.

27. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$, de $x = a$ a $x = 3a$. $(20 + \ln 3)\pi a^2$

28. $4y = x^2 - 2\ln x$, de $x = 1$ a $x = 4$. 24π.

29. $2y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, de $x = 2$ a $x = 5$. *Resp.* 78π.

30. $y^2 = x^3$, de $x = 0$ a $x = 8$. 713.

31. $4y = x^2$, de $y = 0$ a $y = 4$.

33. $4x^2 + y^2 = 64$.

32. $x^2 + 4y^2 = 16$.

34. $9x = y^3$, de $y = 0$ a $y = 3$.

Achar a área da superfície gerada pela revolução de cada uma das seguintes curvas.

Em torno de OX — Em torno de OY

35. Elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$.

Sugestão. e = excentricidade da elipse

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

36. Catenária $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

de $x = 0$ a $x = a$. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$. $2\pi a^2(1 - e^{-1})$.

37. $x^4 + 3 = 6\,xy$, de $x = 1$ a $x = 2$.

$\frac{47}{16}\pi$. $\pi\,(\frac{15}{4} + \ln 2)$.

38. $\begin{cases} x = e^{\theta} \operatorname{sen}\theta, \\ y = e^{\theta}\cos\theta, \end{cases}$ de $\theta = 0$ a $\dfrac{\pi}{2}$.

$\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^{\pi} - 2)$. $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{5}(2\,e^{\pi} + 1)$.

39. $3\,x^2 + 4\,y^2 = 3a^2$. $\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\pi a^2$. $(4 + 3\ln 3)\dfrac{\pi a^2}{2}$.

40. O coeficiente angular da tratória em cada ponto da curva que esteja no primeiro quadrante é dado por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-y}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Mostrar que a superfície gerada pela revolução, em torno de OX, do arco que liga os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $2\,\pi c\,(y_1 - y_2)$.

41. A área, no primeiro quadrante, limitada pelas curvas cujas equações são $y = x^3$ e $y = 4\,x$ faz uma revolução em torno de OX. Achar a área total da superfície gerada. *Resp.* 410,3.

42. A área limitada pelo eixo dos yy e as curvas $x^2 = 4\,y$ e $x - 2\,y + 4 = 0$ gira em tôrno de OY. Ache a área total da superfície gerada. *Resp.* 141,5.

43. Ache a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, do arco da curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ que vai do ponto onde $x = 1$ até o ponto $x = 3$. *Resp.* $\dfrac{208\,\pi}{9}$.

44. Achar a área total da superfície do sólido gerado pela revolução, em torno de OX, da área limitada pelas duas parábolas $y^2 = 4\,x$ e $y^2 = x + 3$.

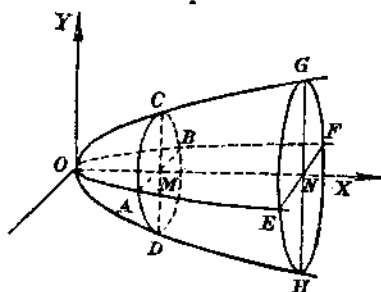
Resp. $\dfrac{1}{6}\pi\,(17\sqrt{17} + 32\sqrt{2} - 17) = 51{,}53$.

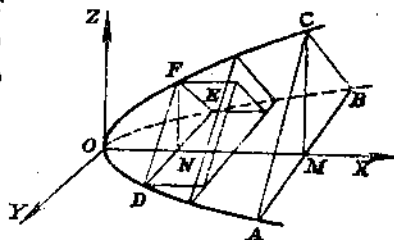
45. Achar a área da superfície gerada pela revolução, em torno de OX, de um arco da curva $y = \operatorname{sen} x$. *Resp.* 14,42.

165. — Sólidos com seções transversais conhecidas. No § 160 estudamos o volume de um sólido de revolução, como o que mostra a figura seguinte, em que tôda seção por plano perpendicular ao eixo dos xx é um círculo. Se $OM = x$, $MC = y$, então

(1) Área da seção transversa

$$ACBD = \pi y^2 = \pi\,[(\phi\,x)]^2,$$

se $y = \phi\,(x)$ é a equação da curva geradora OCG. Logo, *a área da seção transversa por um plano perpendicular a OX é uma função da distancia ($= x$) entre o plano da seção e o ponto O.*

Vamos examinar agora os volumes dos sólidos que não são de revolução, quando é possível exprimir a área de cada seção plana do sólido, que seja perpendicular a uma reta fixa (como OX), como função da distância entre o plano da seção e um ponto fixo (como O).

Dividamos o sólido em n partes por seções planas equidistantes, perpendiculares a OX, e seja Δx a distância entre duas seções paralelas consecutivas.

Seja FDE uma face de uma das seções e seja $ON = x$. Então, por hipótese,

$$\text{(2)} \qquad \text{Área } FDE = A\,(x).$$

O volume desta parte é aproximadamente igual a

$$\text{(3)} \qquad \text{Área } FDE \times \Delta x = A\,(x)\,\Delta x \qquad \text{(base} \times \text{altura).}$$

Então $\sum_{i=1}^{n} A\,(x_i)\,\Delta x_i$ = soma dos volumes de todos os prismas. O limite desta soma é o volume que se quer calcular; logo, pelo teorema fundamental,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A\,(x_i)\,\Delta x_i = \int A\,(x)\,dx\,,$$

e temos a fórmula

$$(N) \qquad V = \int A\,(x)\,dx\,,$$

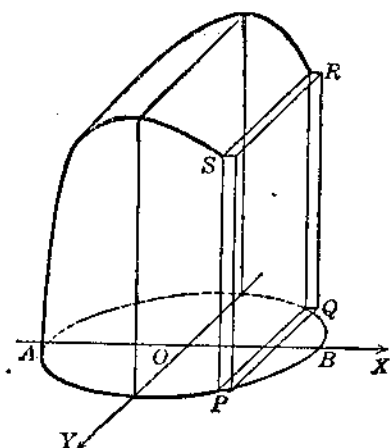
onde $A\,(x)$ é definido em (2).

Exemplo ilustrativo 1. A base de um sólido é um círculo de raio r. Tôdas as secções perpendiculares a um fixado diâmetro da base são quadrados. Achar o volume do sólido.

Solução. Tomemos o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ do plano XY como base e OX como o diâmetro fixado. Então a seção $PQRS$ perpendicular a OX é um quadrado de área $4\,y^2$, se $PQ = 2y$ (na figura, omitiu-se a porção do sólido a direita da seção $PQRS$).

Logo, $A(x) = 4\,y^2 = 4\,(r^2 - x^2)$,

e, por (N),

$$\text{volume} = 4 \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \tfrac{16}{3}\,r^3 . \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar o volume de um conóide circular reto, cuja base tem raio r e cuja altura é igual a a.

Solução. Consideremos o sólido como mostra a figura e seja PQR uma seção perpendicular a OX; PQR é um triângulo isósceles. Como

$$RM = \sqrt{2rx - x^2}$$

(obtida de $x^2 + y^2 = 2\,rx$, equação do círculo $ORAQ$, sendo $y = RM$) e

$$MP = a ,$$

a área da seção é

$$a\sqrt{2\,rx - x^2} = A(x).$$

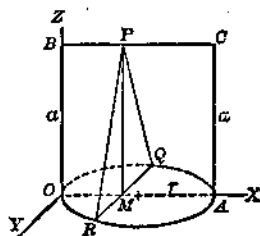
Substituindo em (N),

$$V = a\int_0^{2r} \sqrt{2rx - x^2}\,dx = \frac{\pi r^2 a}{2} . \quad \textit{Resp.}$$

O volume é metade do volume do cilindro de mesma base e altura.

Exemplo ilustrativo 3. Calcular o volume do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

por uma única integração.

Solução. Consideremos uma seção do elipsóide, perpendicular a OX, como $ABCD$, com semi-eixos b' e c'. A equação da elipse $HEJG$ do plano XOY é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Desta equação tiramos $y (= b')$ em têrmos de $x (= OM)$ e obtemos

$$b' = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Semelhantemente, da equação da elipse $EFGI$ do plano XOZ, obtemos

$$c' = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Logo, a área da elipse (seção) $ABCD$ é

$$\pi b' c' = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2) = A(x) .$$

Substituindo em (N),

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3} \pi abc . \quad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

1. Um sólido tem base circular de raio r. A reta AB é um diâmetro da base. Achar o volume do sólido se cada seção plana perpendicular a AB é

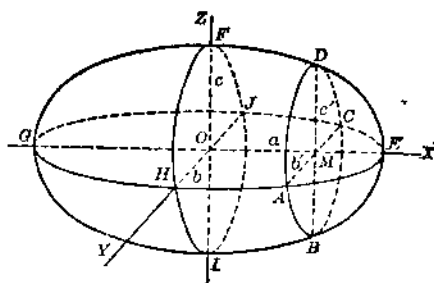
(a) um triângulo equilátero; *Resp.* $\frac{4}{3} r^3 \sqrt{3}$.

(b) um triângulo retângulo isósceles com hipotenusa no plano da base; *Resp.* $\frac{4}{3} r^3$.

(c) um triângulo retângulo isósceles com um cateto no plnao da base; *Resp.* $\frac{8}{3} r^3$.

(d) um triângulo isósceles com altura igual a 20; *Resp.* $10 \pi r^2$.

(e) um triângulo isósceles com altura igual à base. *Resp.* $\frac{8}{3} r^3$.

2. A base de um sólido é uma elipse cujos eixos medem 20 polegadas e 10 polegadas. Achar o volume do sólido se cada seção perpendicular ao eixo maior é

(*a*) um quadrado; *Resp.* 1,333 pol. cub.
(*b*) um triângulo equilátero; *Resp.* 577,3 pol. cub.
(*c*) um triângulo isósceles com altura 10 polegadas.
Resp. 785,4 pol. cub.

3. Um segmento de parábola com corda perpendicular ao eixo é base de um sólido. Sabendo que a corda dista 8 polegadas do vértice da parábola e que tem 16 polegadas de comprimento, achar o volume do sólido se cada seção perpendicular ao eixo da base é

(*a*) um quadrado; *Resp.* 1 024 pol. cub.
(*b*) um triângulo equilátero; 443,4 pol. cub.
(*c*) um triângulo isósceles cuja altura é 10 polegads.
Resp. 426,7 pol. cub.

4. Uma bola de futebol americano tem 16 pol. de comprimento e uma seção contendo uma costura é uma elipse cujo diâmetro menor mede 8 polegadas. Achar o volume (*a*) se o couro está tão têso que uma seção transversa é um quadrado; (*b*) se a seção transversa é um círculo.

Resp. (*a*) $341\frac{1}{3}$ pol. cub.; (*b*) 553,9 pol. cub.

5. De um cilindro de raio igual a 5 polegadas corta-se uma cunha por dois planos, um perpendicular ao eixo do cilindro e outro passando pelo diâmetro do círculo desta seção e inclinado de 45° em relação ao plano da seção. Achar o volume da cunha.

Resp. $\frac{250}{3}$ pol. cub.

6. Dois cilindros de raios iguais a r tem os eixos cortando-se em ângulo reto. Achar o volume da parte comum aos dois cilindros.

Resp. $\frac{16}{3} r^3$.

7. Um círculo move-se de tal modo que o seu centro descreve uma circunferência e o plano que o contém permanece paralelo a um dado plano. Sabendo que este é perpendicular ao plano que contém a circunferência descrita e que esta e o círculo móvel têm mesmo raio a, achar o volume do sólido gerado pelo círculo móvel.

Resp. $\frac{2}{3} a^3 (3\pi + 8)$.

8. Um triângulo equilátero variável move-se de tal modo que um extremo de sua base descreve a curva $y = +4\sqrt{ax}$ e o outro a curva $y = +2\sqrt{ax}$. Sabendo que o plano que contém o tri-

ângulo permanece perpendicular a OX, achar o volume gerado pelo triângulo quando o plano que o contém se move da origem até o ponto de abscissa igual a a. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a^3$.

9. Um retângulo move-se a partir de um ponto fixo de modo tal que uma de suas dimensões é igual à distância entre o plano que contém o retângulo e o ponto fixo, e a outra dimensão é o quadrado dessa distância. Achar o volume gerado pelo retângulo quando o plano que o contém move-se até a uma distância de 2 pés do ponto fixo. *Resp.* 4 pés cub.

10. Os pontos simétricos, em relação a OX, da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ são os extremos da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles variável, móvel de tal modo que o plano que o contém é sempre perpendicular ao plano da elipse. Achar o volume do sólido gerado pelo triângulo quando o plano que o contém percorre todo o eixo maior da elipse. *Resp.* $\frac{4}{3}ab^2$.

Achar os volumes dos sólidos compreendidos entre as quádricas e os planos seguintes:

11. $z = x^2 + 4y^2$; $z = 1$. *Resp.* $\frac{1}{4}\pi$.

12. $4x^2 + 9z^2 + y = 0$; $y + 1 = 0$. $\frac{1}{12}\pi$.

13. $x^2 + 4y^2 = 1 + z^2$; $z + 1 = 0$; $z - 1 = 0$. $\frac{4}{3}\pi$.

14. $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2$; $x = 0$; $x = 2$. $\frac{14}{45}\pi$.

15. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. $\frac{2}{9}\pi$.

16. $z^2 = x^2 + 9y^2$; $z + 1 = 0$. $\frac{1}{9}\pi$.

17. Dadas as curvas $z = 4 - x^2$ no plano XZ e $x^2 + y^2 = 4$ no plano XY, de cada ponto da primeira, situado acima da segunda, traçam-se paralelas ao plano YZ que encontram a segunda curva. Calcular o volume do sólido cuneiforme assim obtido.

Resp. 6π.

18. Achar o volume do sólido limitado pelo hiperbolóide de uma fôlha $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$ e os planos $x = 0$ e $x = a$.

Resp. $\frac{4}{3}\pi\,abc$.

19. Um sólido é limitado por uma fôlha do hiperbolóide de duas fôlhas $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ e o plano $x = 2a$. Achar o volume.

Resp. $\frac{4}{3} \pi abc$.

20. Achar o volume do sólido limitado pela superfície

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$ *Resp.* $\frac{8}{5} \pi abc$.

OUTROS PROBLEMAS

1. Achar a área do laço da curva

$y^2 = (x + 4)(x^2 - x + 2y - 4)$. *Resp.* $\frac{256}{15}$.

2. Um ponto move-se sobre uma parábola de modo tal que a velocidade de variação da área descrita pelo segmento que o une ao foco é constante. Em um segundo o ponto move-se do vértice a um dos extremos da corda focal perpendicular ao eixo da parábola. Pergunta-se qual a posição do ponto depois dos oito segundos seguintes.

Resp. Distância do foco $= \frac{5}{2}$ do comprimento da corda focal perpendicular ao eixo.

3. Achar o perímetro da figura limitada pela reta $y = 1$ e a curva $4y = e^{2x} + e^{-2x}$. *Resp.* $\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) = 3{,}05$.

4. O arco OP da curva $xy = x - y$ liga a origem ao ponto $P(x_1, y_1)$ e limita com o eixo dos xx e a reta $x = x_1$ uma área A. O mesmo arco limita com o eixo dos yy e a reta $y = y_1$ uma área B. Prove que os volumes obtidos pela revolução de A em torno de OX e pela de B em torno de OY são iguais.

5. A área limitada pela curva $16y^2 = (x + 4)^3$ e a sua tangente no ponto (12, 16) gira em tôrno de OX. Achar o volume encerrado. *Resp* $\frac{1024}{9} \pi$.

6. A base de um sólido é a área limitada pela parábola $y^2 = 2px$ e a corda focal perpendicular ao eixo da parábola. Toda seção do sólido feita por um plano perpendicular à mencionada corda é um retângulo cuja altura é igual à distância entre a seção e o eixo da parábola. Achar o volume do sólido. *Resp.* $\frac{1}{4} p^3$.

7. A elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ é dada. Sobre ela forma-se um sólido de tal modo que todas as seções planas perpendiculares ao eixo dos xx são elipses cujos focos estão sobre a dada elipse. Os eixos maior e menor de cada seção são proporcionais aos da elipse dada. Achar o volume do sólido. *Resp.* $\frac{225}{4}\pi$.

8. Seja (x, y) um ponto da curva do § 159, sendo O a origem e OA o eixo dos xx. Mostre que (D) pode ser posta sob a forma

$$\text{(1)} \qquad \text{Área} = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)\,,$$

usando a transformação (5), § 1. Os limites são determinados pelas coordenadas das extremidades da curva.

9. Deduza a fórmula do problema precedente diretamente da figura, fazendo uso de (B) e (C), § 158.

A fórmula (1) do problema (8) é útil para as curvas dadas por equações paramétricas. Achar as seguintes áreas, por (1).

10. Área compreendida entre a involuta de um círculo

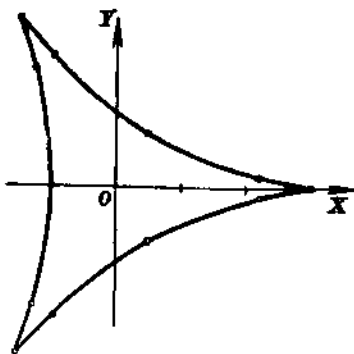
$$x = r\cos\theta + r\theta\,\text{sen}\,\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta - r\theta\cos\theta$$

e o eixo dos xx, desde $\theta = 0$ até $\theta = \pi$.

11. Área encerrada pela hipociclóide de três cúspides

$$\begin{cases} x = 2r\cos\theta + r\cos 2\theta, \\ y = 2r\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}\,2\theta. \end{cases}$$

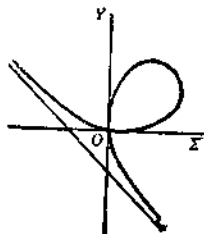
(ver figura) *Resp.* $2\pi r^2$.

12. Um fio reto uniforme atrai uma partícula P segundo a lei da gravitação. A partícula esta na linha do fio mas não no fio. Prove que o fio atrai a partícula como se sua massa estivesse concentrada num ponto do fio cuja distância a P é média proporcional entre as distâncias de P aos extremos do fio.

13. Achar a área do laço do folium de Descartes $x^3 + y^3 = 3\,axy$.

Sugestão. Seja $y = tx$; então $x = \dfrac{3\,at}{1 + t^3}$,

$$y = \frac{3\,at^2}{1 + t^3} \text{ e } dx = \frac{1 - 2t^3}{b(1 + t^3)^2}\,3\,a\,dt.$$

Os limites para t são 0 e ∞.

Capítulo XVI

INTEGRAÇÃO FORMAL POR ARTIFÍCIOS

166. — Introdução. A integração formal apóia-se no uso de tabelas de integrais. Se um dado integrando não figura nas tabelas, procuramos transformá-lo de modo que a sua integração venha a depender de integrações de funções para as quais as tabelas fornecem fórmulas. Para isso usam-se artifícios como

(*a*) integração por partes (§ 136),
(*b*) decomposição das funções racionais,
(*c*) substituição conveniente de variável.

Vamos examinar os casos (*b*) e (*c*).

167. — Integração das funções racionais. Uma função racional é uma fração cujos têrmos são polinômios, isto é, funções do tipo $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, sendo $a_0, a_1, \dots, a_n$ constantes. Se o grau do numerador é maior ou igual ao do denominador, a fração pode ser expressa como soma de um polinômio e de uma função racional cujo numerador tem grau menor que o do denominador. Por exemplo,

$$\frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 + x - 3 + \frac{5x + 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Como é simples a integração de um polinômio, podemos, pois, nos deter ao exame da integração das funções racionais cujo numerador tem grau menor que o denominador

Afim de integrar uma função racional é necessário muitas vêzes exprimi-la como soma algébrica de *frações simples*, isto é, frações

que sabemos integrar. Isto é sempre possível, como veremos a seguir.

CASO I. *O denominador decompõe-se em fatores que são todos do primeiro grau e nenhum dêles é repetido.*

A cada fator linear não repetido, como $x - a$, corresponde uma *fração simples* da forma

$$\frac{A}{x - a},$$

onde A é constante. A função racional dada pode ser expressa como soma de frações dêste tipo. Os exemplos mostram como.

Exemplo ilustrativo. Achar $\int \frac{(2x + 3)\,dx}{x^3 + x^2 - 2x}$.

SOLUÇÃO. Sendo $x, x - 1, x + 2$ os fatôres do denominador, pomos*

$$(1) \qquad \frac{2x + 3}{x(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2},$$

onde A, B e C são constantes a se determinar.

Eliminando os denominadores, (1) fornece

$$(2) \qquad 2x + 3 = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2)x + C(x - 1)x,$$

$$2x + 3 = (A + B + C)x^2 + (A + 2B - C)x - 2A.$$

Como esta equação é uma identidade, igualamos os coeficientes das mesmas potências de x nos dois membros, de acordo com o princípio de identidade de polinômios. Obtemos, assim, um sistema de três equações

$$(3) \qquad \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A + 2B - C = 2 \\ \quad\; - 2A = 3. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}.$$

* Veja Capítulo XX de "Advanced Algebra" de Hawkes (Ginn and Company, Boston). No processo da decomposição da fração racional não entram nem o sinal de integração nem dx.

Substituindo estes valores em (1),

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}.$$

$$\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}.$$

$$= -\tfrac{3}{2}\ln x + \tfrac{5}{3}\ln(x-1) - \tfrac{1}{6}\ln(x+2) + \ln c$$

$$= \ln\frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}. \quad \textit{Resp.}$$

Um método mais rápido de achar os valores de A, B e C de (2) é o seguinte:

Seja 0 o fator x; então $3 = -2A$, ou $A = -\frac{3}{2}$

Seja 0 o fator $x - 1$, ou, seja $x = 1$; então $5 = 3B$, ou $B = \frac{5}{3}$

Seja 0 o fator $x + 2$, ou seja $x = -2$, então $-1 = 6C$, ou $C = -\frac{1}{6}$.

Na integração de funções racionais, *o número de constantes a ser determinadas é sempre igual ao grau do denominador da fração racional.*

CASO II. *Os fatores do denominador são todos do primeiro grau* e alguns são repetidos.

A cada fator repetido n vêzes, como $(x-a)^n$, corresponde a soma de n *frações simples*

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{L}{x-a},$$

na qual A, B, ..., L são constantes. Estas *frações simples* são fàcilmente integráveis. Por exemplo.

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Exemplo ilustrativo. Achar $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$.

SOLUÇÃO. Como $x - 1$ ocorre três vezes como fator, pomos

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Eliminando os denominadores.

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$$
$$x^3 + 1 = (A + D)x^3 + (-3A + C - 2D)x^2 + (3A + B - C + D)x - A$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} A + D &= 1, \\ -3A + C - 2D &= 0, \\ 3A + B - C + D &= 0, \\ -A &= 1. \end{aligned}$$

Resolvendo, $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$, e

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

$$\therefore \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\ln x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln(x-1) + C$$

$$= -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{x} + C. \qquad \textit{Resp.}$$

EXERCÍCIOS

Calcule as seguintes integrais

1. $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x} = \ln\frac{x^2 - 2x}{(x+1)^2} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{(5x^2-3)\,dx}{x^3 - x} = \ln x^3(x^2-1) + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{(4x+3)\,dx}{4x^3 + 8x^2 + 3x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2} + C$

4. $\displaystyle\int \frac{(4x^3+2x^2+1)\,dx}{4x^3 - x} = x + \frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \ln(x+1)(x-1)^2 - \frac{1}{x+1} + C$

6. $\displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{(z-1)^3} = \ln(z-1) - \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2(z-1)^2} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{(y^4 - 8)\,dy}{y^3 + 2\,y^2} = \frac{y^2}{2} - 2\,y + \frac{4}{y} + 2 \ln (y^2 + 2\,y) + C.$

8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x - 3)\,dx}{x^3 + x^2} = 4 \ln \frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\,0{,}3492.$

9. $\displaystyle\int_2^4 \frac{(x^3 - 2)\,dx}{x^3 - x^2} = \frac{5}{2} + \ln \frac{4}{3} = 2{,}7877.$

10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{(2 - x^2)\,dx}{x^3 + 3\,x^2 + 2x} = \ln \frac{9}{10} = -\,0{,}1054.$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{(3 - x)\,dx}{x^3 + 4x^2 + 3\,x} = \ln \frac{81}{80} = 0{,}0125.$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(3\,x^2 + 7\,x)\,dx}{(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3)} = \ln \frac{4}{3} = 0{,}2877.$

13. $\displaystyle\int_0^5 \frac{(x^2 - 3)\,dx}{(x + 2)\,(x + 1)^2} = \ln \frac{7}{2} - \frac{5}{3} = -\,0{,}4139.$

14. $\displaystyle\int_0^4 \frac{9\,x^2\,dx}{(2\,x + 1)\,(x + 2)^2} = 5 \ln 3 - 4 = 1{,}4930.$

Calcule cada uma das seguintes integrais.

15. $\displaystyle\int \frac{8\,dx}{x^3 - 4\,x}.$

16. $\displaystyle\int \frac{(5\,x^2 - 9)\,dx}{x^3 - 9\,x}.$

17. $\displaystyle\int \frac{(3\,z + 7)\,dz}{(z + 1)\,(z + 2)\,(z + 3)}.$

18. $\displaystyle\int \frac{(3\,x^2 + 11\,x + 2)\,dx}{(x + 3)\,(x^2 - 1)}.$

19. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(2\,x + 3)\,(4\,x^2 - 1)}.$

20. $\displaystyle\int \frac{(t^4 + 1)\,dt}{t^3 - t}.$

21. $\displaystyle\int \frac{(x^2 - x - 5)\,dx}{x^3 + 5\,x^2}.$

22. $\displaystyle\int \frac{(5\,x^2 + 14\,x + 10)\,dx}{(x + 2)\,(x+1)^2}.$

23. $\displaystyle\int \frac{(24\,y^2 + 10\,y + 5)\,dy}{(2\,y - 1)\,(2\,y + 1)^2}.$

24. $\displaystyle\int \frac{(x + 2)\,dx}{x^4 + 2\,x^3 + x^2}.$

25. $\displaystyle\int \frac{(x^3 - 2x - 4)\,dx}{x^4 + 2\,x^3}.$

26. $\displaystyle\int \frac{(2x^2 + 1)\,dx}{(x - 2)^3}.$

27. $\displaystyle\int \frac{(y^4 - 3\,y^3)\,dy}{(y^2 - 1)\,(y - 2)}.$

28. $\displaystyle\int \frac{(2\,t^4 + 3\,t^3 - 20\,t - 28)\,dt}{(t^2 - 4)\,(2\,t - 1)}.$

CASO III. *O denominador contém fatores do segundo grau mas nenhum é repetido.*

Para cada fator do segundo grau não repetido, como x^2+px+q, corresponde uma *fração simples* da forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q},$$

sendo $$4q > p^2.$$

O método para a integração desta fração é o seguinte:

Completamos o quadrado no denominador:

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2+q-\tfrac{1}{4}p^2=(x+\tfrac{1}{2}p)^2+\tfrac{1}{4}(4q-p^2). \qquad (4q>p^2)$$

Pomos $u=x+\frac{1}{2}p$. Então $x=u-\frac{1}{2}p$, $dx=du$. Substituindo êstes valores, a nova integral em têrmos da variável u é imediatamente calculável.

Exemplo ilustrativo 1. Achar $\displaystyle\int\frac{4\,dx}{x^3+4x}$.

SOLUÇÃO. Ponhamos $\displaystyle\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$.

Eliminando os denominadores, $4=A(x^2+4)+x(Bx+C)=(A+B)x^2+$ $+Cx+4A$.

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos

$$A+B=0,\ C=0,\ 4A=4.$$

Isto dá $A=1$, $B=-1$, $C=0$, de modo que $\displaystyle\frac{4}{x(x^2+4)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$.

$$\therefore\quad \int\frac{4\,dx}{x(x^2+4)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+4}$$

$$=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\ln c=\ln\frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}. \qquad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Prove que

$$\int\frac{dx}{x^3+8}=\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{12}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Solução. Fatorando, $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$,

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+4} + \frac{C}{x+2},$$

$$1 = (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 - 2x + 4),$$

$$1 = (A + C)x^2 + (2A + B - 2C)x + 2B + 4C.$$

Então $\quad A = -\frac{1}{12},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{1}{12}.$

Logo $$\int \frac{dx}{x^3+8} = \int \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2-2x+4}\,dx + \int \frac{\frac{1}{12}dx}{x+2}$$

$$(4) \qquad = \frac{1}{12}\int \frac{4-x}{x^2-2x+4}\,dx + \frac{1}{12}\ln(x+2) + C.$$

Ora, $\quad x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 = u^2 + 3$, se $x - 1 = u$.

Então, $\quad x = u + 1$, $dx = du$, e

$$\int \frac{4-x}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{3-u}{u^2+3}\,du = \sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(u^2+3).$$

Substituindo de volta u por $x - 1$, usando (4) e reduzindo, temos o resultado.

Caso IV. *O denominador contém fatores do segundo grau, alguns dos quais são repetidos.*

A cada fator do segundo grau repetido n vezes, como $(x^2 + px + q)^n$, corresponde uma soma de n *frações simples,*

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} + \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{Lx+M}{x^2+px+q}.$$

Para a integração destas é necessária a "fórmula de redução"

$$(5) \qquad \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} + \right.$$

$$\left. + (2n-3)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right],$$

que demonstraremos no próximo capítulo. Se $n > 2$, é mistér a aplicação repetida de (5). Se p não é zero, completamos o quadrado:

$$x^2 + px + q = (x + \tfrac{1}{2}p)^2 + \tfrac{1}{4}(4q - p^2) = u^2 + a^2, \text{ etc.},$$

como antes.

Exemplo ilustrativo. Prove que

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln(x^2+1) + \frac{1+3x}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Solução. Pois que $x^2 + 1$ ocorre duas vezes como fator, pomos

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1}.$$

Eliminando os denominadores

$$2x^3 + x + 3 = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x e resolvendo, vem

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 2, \quad D = 0,$$

Logo
$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-x+3}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$
$$= \ln(x^2+1) - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + $$
$$+ 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

As primeiras destas duas integrais é calculada pela fórmula (4), a segunda por (5) acima, com $u = x$, $a = 1$, $n = 2$. Obtemos, assim,

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x\right] + C.$$

Reduzindo, temos a resposta.

Conclusão. Do que se viu, conclui-se que toda função racional, isto é, quociente de dois polinômios, cujo denominador possa

ser expresso como produto de funções reais do primeiro e segundo graus, exprime-se como soma de um polinômio e de *frações simples*, isto é, frações que sabemos integrar. Mostramos como se integram as *frações simples*. Temos, pois, o

TEOREMA. *A integral de uma função racional cujo denominado pode ser expresso por um produto de fatores reais do primeiro e segundo graus, é exprimível em termos de funções algébricas, logarítmicas e trigonométricas inversas, isto é, em têrmos de funções elementares.*

PROBLEMAS

Calcular as integrais

1. $\int \frac{(4x^2+6)\,dx}{x^3+3x} = \ln x^2(x^2+3) + C.$

2. $\int \frac{(x^2+x)\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \ln(x-1) + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

3. $\int \frac{(2t^2-8t-8)\,dt}{(t-2)(t^2+4)} = 2\ln\frac{t^2+4}{t-2} + C.$

4. $\int \frac{(x^2+x-10)\,dx}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+4}{2x-3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C.$

5. $\int \frac{(x-18)\,dx}{4x^3+9x} = \ln\frac{4x^2+9}{x^2} + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x}{3} + C.$

6. $\int \frac{(2y^3+y^2+2y+2)\,dy}{y^4+3y^2+2} = \ln(y^2+2) + \operatorname{arc\,tg} y + C.$

7. $\int \frac{dz}{z^4+z^2} = -\frac{1}{z} - \operatorname{arc\,tg} z + C.$

8. $\frac{2x\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2} = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{x+1} + C.$

9. $\int \frac{(x^3+3x)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C.$

10. $\int \frac{(x^5+9x^3-9x^2-9)\,dx}{x^3+9x} = \frac{x^3}{3} - \ln x(x^2+9)^4 + C.$

11. $\int \frac{(4x^2+2x+8)dx}{x(x^2+2)^2} = \ln\frac{x^2}{x^2+2} + \frac{x}{2x^2+4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

12. $\int \frac{t^5\,dt}{(t^2+4)^2} = \frac{t^2}{2} - 4\ln(t^2+4) - \frac{8}{t^2+4} + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{(x^5+4x^3)\,dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{(x^2+2)^2} + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^4-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} - 2\,\text{arc tg}\,x + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{(2z^2+3z+2)\,dz}{(z+2)(z^2+2z+2)} = 2\ln(z+2) - \text{arc tg}\,(z+1) + C.$

17. $\displaystyle\int \left(\frac{t+3}{t^2+4t+5}\right)^2 dt = \text{arc tg}\,(t+2) - \frac{1}{t^2+4t+5} + C.$

18. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(5x^2+4)\,dx}{x^3+4x} = 3\ln 4 = 4{,}1589.$

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x\,dx}{(x+2)(x^2+1)} = \ln\frac{8}{9} + \frac{\pi}{4} = 0{,}667.$

20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x^2+x+3)\,dx}{(x+1)(x^2+1)} = \ln 4 + \frac{\pi}{4} = 2{,}171.$

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(4x^2+2x)\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2 = 0{,}592.$

22. $\displaystyle\int_3^4 \frac{(5t^3-4t)\,dt}{t^4-16} = \ln\frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln\frac{20}{13} = 1{,}522.$

23. $\displaystyle\int_0^2 \frac{(z^3+2z^2+6z+8)\,dz}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} = 1{,}257.$

Calcule cada uma das integrais abaixo

24. $\displaystyle\int \frac{(6x^2+3x+4)\,dx}{x^3+2x}.$

25. $\displaystyle\int \frac{(z^4+3)\,dz}{(z+1)(z^2+1)}.$

26. $\displaystyle\int \frac{(3x^3+3x+1)\,dx}{x^4+3x^2}.$

27. $\displaystyle\int \frac{(3x^3+x^2+3)\,dx}{x^4+3x^2}.$

28. $\displaystyle\int \frac{(5x^2+12x+9)\,dx}{x^3+3x^2+3x}.$

29. $\displaystyle\int \frac{(4x^3+3x^2+18x+12)\,dx}{(x^2+4)^2}.$

30. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8y\,dy}{(2y+1)(4y^2+1)}.$

31. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(2x^3-4)\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2}.$

32. $\displaystyle\int_1^3 \frac{(x+10)\,dx}{x^3+2x^2+5x}.$

33. $\displaystyle\int_0^3 \frac{(2x^3+18)\,dx}{(x+3)(x^2+9)}.$

168. — Integração por substituição de uma nova variável; integração por racionalização. No último parágrafo mostramos que toda função racional, cujo denominador possa ser expresso como produto de fatores reais do primeiro e segundo graus, pode ser integrada. Só um número pequeno, relativamente falando, de funções algébricas que *não são racionais* podem ser integradas em termos de funções elementares. A integração de algumas dessas funções pode ser conduzida à de funções racionais por uma conveniente substituição da variável ou mesmo à de funções cujas integrais figuram na lista de integrais imediatas (§ 128). O método de integrar uma função que não é racional por substituição da variável de modo a conduzir a integração à de uma função racional chama-se algumas vezes de *integração por racionalização*. Este método é muito importante e será objeto de estudo nêste parágrafo, para os casos mais importantes.

DIFERENCIAIS CONTENDO APENAS POTÊNCIAS FRACIONÁRIAS DE x. *A integração de tais expressões pode ser conduzida à de uma função racional pela substituição.*

$$x = z^n ,$$

onde n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes de x.

Realmente, assim fazendo, x, dx e cada radical pode ser expresso racionalmente como função de z.

Exemplo ilustrativo 1. Prove que $$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1 + x^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln\left(1 + x^{\frac{3}{4}}\right) + C.$$

SOLUÇÃO. Aqui $n = 4$. Logo, pomos $x = z^4$.

Então $$x^{\frac{1}{2}} = z^2, \quad x^{\frac{3}{4}} = z^3, \quad dx = 4\,z^3\,dz\,.$$

Logo $$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1 + x^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{z^2}{1 + z^3}\,4\,z^3\,dz = 4\int \frac{z^5}{1 + z^3}\,dz$$

$$= 4\int\left(z^2 - \frac{z^2}{1 + z^3}\right)dz = \frac{4}{3}\,z^3 - \frac{4}{3}\ln\left(1 + z^3\right) + C\,.$$

Fazendo a substituição de volta $z = x^{\frac{1}{4}}$, obtemos o resultado.

A forma geral da expressão irracional aqui tratada é então

$$R\,(x^{\frac{1}{n}})\,dx\,,$$

onde R indica uma função racional de $x^{\frac{1}{n}}$.

Diferenciais contendo apenas potências fracionárias de $a + bx$. *A integração de tais expressões pode ser conduzida à de uma função racional mediante a substituição*

$$a + bx = z^n\,,$$

onde n é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes de $a + bx$.

Realmente, assim fazendo, x, dx e cada radical podem ser expressos racionalmente em termos de z.

Exemplo ilustrativo 2. Achar $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Solução. Pomos $$1 + x = z^2.$$

Então $$dx = 2\,z\,dz,\ (1+x)^{\frac{3}{2}} = z^3,\ (1+x)^{\frac{1}{2}} = z\,.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2\,z\,dz}{z^3 + z} = 2\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= 2\,\text{arc tg}\,z + C = 2\,\text{arc tg}\,(1+x)^{\frac{1}{2}} + C\,,$$

quando substituímos, de novo, z em termos de x.

A integral tratada aqui tem a forma

$$R\left[x, (a+bx)^{\frac{1}{n}}\right] dx\,,$$

onde R indica função racional.

PROBLEMAS

Calcule as seguintes integrais

1. $\displaystyle\int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)\,x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{3}} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x - x^{\frac{4}{3}}} = 3\ln\frac{x^{\frac{1}{3}}}{1-x^{\frac{1}{3}}} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{3}}\right)dx}{6\,x^{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{27}\,x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{13}\,x^{\frac{13}{12}} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4x+1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{6x^2+6x+1}{12\,(4x+1)^{\frac{3}{2}}} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{\frac{5}{8}} - x^{\frac{1}{8}}} = \frac{8\,x^{\frac{3}{8}}}{3} + 2\ln\frac{x^{\frac{1}{8}}-1}{x^{\frac{1}{8}}+1} + 4\operatorname{arc\,tg} x^{\frac{1}{8}} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\,(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}} + C.$

8. $\displaystyle\int y\sqrt[3]{a+y}\,dy = \frac{3}{28}\,(4y-3a)\,(a+y)^{\frac{4}{3}} + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x+1}+1)\,dx}{\sqrt{x+1}-1} = x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}-1)+C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+a}} = \frac{3}{2}\,(x+a)^{\frac{2}{3}} - 3\,(x+a)^{\frac{1}{3}} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x+a}) + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{(t+5)\,dt}{(t+4)\sqrt{t+2}} = 2\sqrt{t+2} + \sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{t+2}{2}} + C.$

12. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = 2\operatorname{arc\,tg} 2 - \frac{\pi}{2}.$

13. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2\ln 3.$

14. $\displaystyle\int_1^4 \frac{y\,dy}{\sqrt{2+4y}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$

15. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2t}\,(9 + \sqrt[3]{2t})} = 3 - 9 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3}.$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}\,dx}{x+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$

17. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{dt}{2\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}} = 5{,}31.$

18. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3} = 8 + \frac{3}{2}\pi\sqrt{3}.$

Calcule as integrais

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x} + 5}.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1 - \sqrt[3]{x})}.$

21. $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{x\sqrt{x-3}}.$

22. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{(2y+3)^{\frac{4}{3}}}.$

23. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)^{\frac{1}{4}} - (t+1)^{\frac{5}{4}}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}} - (x-2)^{\frac{3}{4}}}.$

25. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{(x+5)\sqrt{x+4}}.$

26. $\displaystyle\int \frac{(2 - \sqrt{2x+3})\,dx}{1 - 2x}.$

27. Calcule a área limitada pela curva $y = x + \sqrt{x+1}$, o eixo dos xx e as retas $x = 3$ e $x = 8$. *Resp.* $40\frac{1}{6}$.

28. Calcule o volume gerado pela revolução em torno de OX da área do problema precedente.

29. Achar o volume gerado pela revolução em torno de OX da área no primeiro quadrante limitada pelos eixos coordenados e cada uma das seguintes curvas.

(*a*) $y = 2 - \sqrt{x}$.

(*b*) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$.

(*c*) $y = a - \sqrt{ax}$.

(*d*) $y = 4 - x^{\frac{2}{3}}$.

30. Achar a área limitada pelas curvas $y = 2x + \sqrt{2x+1}$, $y = x - \sqrt{2x+1}$ e as retas $x = 4$ e $x = 12$.

31. Achar a área limitada pela curva

$$(x - 1)\, y^2 = (x + 1)\,(2\, y - 1)$$

e as retas $x = 3$ e $x = 8$. *Resp.* $4\left[\sqrt{2} + \ln \dfrac{4 + \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}}\right]$.

169. — Diferenciais binomiais. Uma diferencial da forma

$$(1) \qquad x^m\,(a + bx^n)^p\, dx\,,$$

onde a e b são constantes e os expoentes m, n e p números racionais diz-se uma *diferencial binomial.*

Ponhamos $\qquad x = z^{\alpha}$; então $dx = \alpha z^{\alpha-1}\, dz$,

e $$x^m\,(a + bx^n)^p\, dx = az^{m\alpha+\alpha-1}\,(a + bz^{n\alpha})^p\, dz.$$

Se o inteiro α é escolhido de modo a serem inteiros $m\alpha$ e $n\alpha$*, vemos que a dada diferencial é equivalente a uma outra da mesma forma onde m e n foram substituídos por inteiros. Temos também que

$$(2) \qquad x^m\,(a + bx^n)^p\, dx = x^{m+np}\,(ax^{-n} + b)^p\, dx$$

transforma a dada diferencial numa outra de mesma forma onde o expoente n de x foi substituído por $-n$, Portanto, qualquer que seja o sinal de n, em uma das duas diferenciais o expoente de x de dentro do parêntesis será certamente positivo.

Quando p é inteiro positivo, a binomial pode ser desenvolvida e integrada têrmo a têrmo. A seguir, suporemos que p é um número fracionário; substituí-lo-emos, pois, por $\dfrac{r}{s}$, ond e r e s são inteiros**.

Podemos dizer, portanto, que

Tôda diferencial pode ser posta sob a forma

$$x^m\,(a + bx^n)^{\frac{r}{s}}\, dx\,,$$

onde m, n, r e s são inteiros e n é positivo.

---

* É sempre possível escolher α de modo que $m\alpha$ e $n\alpha$ sejam inteiros, pois podemos tomar α como o mínimo múltiplo comum dos denominadores de m e n.

** O caso de p ser inteiro não está excluído pois que é um caso particular, precisamente aquele em que $r = p$, $s = 1$.

No próximo parágrafo, mostraremos que a integração de (1) pode ser feita por racionalização, nas seguintes condições:

CASO I. *Quando* $\dfrac{m+1}{n}$ = *inteiro ou zero, pondo-se*

$$a + bx^n = z^s.$$

CASO II. *Quando* $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{r}{s}$ = *inteiro ou zero, pondo-se*

$$a + bx^n = z^s x^n.$$

Exemplo ilustrativo 1. $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \int x^3 (a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{b^2}\,\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C.$$

SOLUÇÃO. $m = 3$, $n = 2$, $r = -3$, $s = 2$; aqui $\dfrac{m+1}{n} = 2$, um inteiro. Logo, estamos no Caso I e por isso pomos

$a + bx^2 = z^2$; portanto $x = \left(\dfrac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$, $dx = \dfrac{z\,dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}}$, e $(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} = z^3$

$$\therefore \int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{z\,dz}{b^{\frac{1}{2}}(z^2-a)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{z^3}$$

$$= \frac{1}{b^2}\int (1 - az^{-2})\,dz = \frac{1}{b^2}(z + az^{-1}) + C$$

$$= \frac{1}{b^2}\,\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}} + C.$$

Exemplo ilustrativo 2. $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C.$$

SOLUÇÃO. $m = -4$, $n = 2$, $\dfrac{r}{s} = -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{r}{s} = -2$, um inteiro.

Estamos, pois, no Caso II e por isto pomos

$$1 + x^2 = z^2x^2, \quad z = \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

logo, $$x^2 = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad 1 + x^2 = \frac{z^2}{z^2 - 1}, \quad \sqrt{1 + x^2} = \frac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}};$$

temos também $$x = \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad x^4 = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}, \quad dx = -\frac{z\,dz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1 + x^2}} = -\int \frac{\dfrac{z\,dz}{(z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{(z^2 - 1)^2} \cdot \dfrac{z}{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}} =$$

$$= -\int (z^2 - 1)\,dz.$$

$$= z - \frac{z^3}{3} + C = \frac{(2x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{3x^3} + C$$

PROBLEMAS

Calcule as integrais

1. $\displaystyle\int x^5\sqrt{1 + x^3}\,dx = \frac{2(3x^3 - 2)(1 + x^3)^{\frac{3}{2}}}{45} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1 + x^3}} = \frac{2(x^3 - 2)\sqrt{1 + x^3}}{9} + C.$

3. $\displaystyle\int x^5(8 + x^3)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2(5x^3 - 16)(8 + x^3)^{\frac{5}{2}}}{105} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(a + bx^3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2(2a + bx^3)}{3b^2\sqrt{a + bx^3}} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1 - x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{(1 + x^3)^{\frac{1}{3}}}{x} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 (1 + x^3)^{\frac{1}{3}}} = - \frac{(1 + x^3)^{\frac{2}{3}}}{2\, x^2} + C\,.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 (1 + x^4)^{\frac{3}{4}}} = - \frac{(1 + x^4)^{\frac{1}{4}}}{x} + C\,.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n (1 + x^n)^{\frac{1}{n}}} = - \frac{(1 + x^n)^{\frac{n-1}{n}}}{(n - 1)\, x^{n-1}} + C\,.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 (1 + x^3)^{\frac{4}{3}}} = - \frac{1 + 3\, x^3}{2\, x^2 (1 + x^3)^{\frac{1}{3}}} + C\,.$

10. $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{1 + x^4}\, dx}{x^2} = \ln (x^2 + \sqrt{1 + x^4}) - \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^2} + C\,.$

11. $\displaystyle\int x^5 \sqrt{1 - x^3}\, dx.$ 12. $\displaystyle\int \frac{x^8\, dx}{\sqrt{a + bx^3}}\,.$

13. $\displaystyle\int x^5 (a^3 - x^3)^{\frac{3}{2}}\, dx\,.$ 14. $\displaystyle\int \frac{(x^5 + 2\, x^2)\, dx}{(1 + x^3)^{\frac{3}{2}}}\,.$

15. $\displaystyle\int x\, (1 + x^3)^{\frac{1}{3}}\, dx\,.$

170. — Condições de integração por racionalização da diferencial binomial.

(A) $$x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}}\, dx\,.$$

Caso I. *Ponhamos* $a + bx^n = z^s$.

Então $(a + bx^n)^{\frac{1}{s}} = z,$ e $(a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = z^r\,;$

temos também $x = \left(\dfrac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$ e $x^m = \left(\dfrac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$

logo $$dx = \frac{s}{bn}\, z^{s-1} \left(\frac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n} - 1} dz\,.$$

Substituindo em (A), obtemos

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} dx = \frac{s}{bn} z^{r+s-1} \left(\frac{z^s - a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n} - 1} dz.$$

O segundo membro é racional quando

$$\frac{m+1}{n}$$

é inteiro ou zero.

Caso II. *Ponhamos* $a + bx^n = z^s x^n$.

Então $\quad x^n = \dfrac{a}{z^s - b}$, e $\; a + bx^n = z^s x^n = \dfrac{az^s}{z^s - b}$.

Logo $\qquad (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} (z^s - b)^{-\frac{r}{s}} z^r$;

temos também $\quad x = a^{\frac{1}{n}} (z^s - b)^{-\frac{1}{n}}, \quad x^m = a^{\frac{m}{n}} (z^s - b)^{-\frac{m}{n}}$;

$$dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{1}{n}} z^{s-1} (z^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} dz.$$

Substituindo em (A), obtemos

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s}} (z^s - b)^{-\left(\frac{m+1}{n} + \frac{r}{s} + 1\right)} z^{r+s-1} dz.$$

O segundo membro desta expressão é racional quando $\dfrac{m+1}{n} +$ $+ \dfrac{r}{s}$ é um inteiro ou zero.

Portanto, a integração da diferencial binomial

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} dx$$

pode ser conduzida à integração de função racional nos casos dados no parágrafo precedente.

171. — Transformação de diferenciais trigonométricas.

TEOREMA. *A integração de uma função trigonométrica envolvendo racionalmente apenas* $\operatorname{sen} u$ *e* $\cos u$ *pode ser transformada pela substituição*

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = z\,,$$

ou, o que é o mesmo, pelas substituições

$$(2) \qquad \operatorname{sen} u = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad du = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

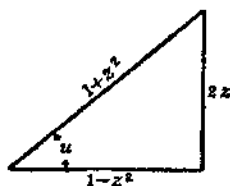
numa outra de função que é racional em z.

DEMONSTRAÇÃO. Da fórmula para a tangente da metade de um ângulo ((5), § 2), temos, quadrando ambos os membros

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1-\cos u}{1+\cos u}.$$

Substituindo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} u$ por z e tirando o valor de $\cos u$,

$$(3) \qquad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

uma das fórmulas (2). O triângulo retângulo da figura mostra a igualdade (3) e dá também o valor de $\operatorname{sen} u$ que figura em (2). Finalmente, de (1),

$$u = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z\,,$$

e portanto $$du = \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

Assim, ficam provadas as relações (2).

É evidente que se uma função trigonométrica envolver $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, $\sec u$, $\operatorname{cossec} u$ apenas racionalmente, ela estará incluída no teorema supra pois estas quatro funções podem ser expressas racionalmente em termos de $\operatorname{sen} u$, ou $\cos u$, ou ambas estas funções. Resulta, pois, que toda função trigonométrica racional pode ser integrada contanto que a transformada da função em termos de z possa ser decomposta na soma de *frações simples* (Veja § 167).

Exemplo ilustrativo. Prove que $$\int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3}\right) + C.$$

Solução. Ponhamos $2x = u$. Então $x = \frac{1}{2} u$, $dx = \frac{1}{2} du$. Substituindo êstes valores e depois usando (2), temos

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{5 + 4 \operatorname{sen} u} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5 + \frac{8z}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{5z^2 + 8z + 5}$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{5z + 4}{3}\right) + C.$$

Substituindo de volta z por $\operatorname{tg} \frac{1}{2} u = \operatorname{tg} x$, obtemos o resultado acima.

EXERCÍCIOS

Calcule as seguintes integrais

1. $$\int \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C.$$

3. $$\int \frac{d\phi}{5 + 4 \cos \phi} = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}\right) + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{4+5\cos x} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right)+C.$

5. $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{3+\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}x-\cos x+3} = \operatorname{arc\,tg}\left(1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$

7. $\displaystyle\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{5-3\cos\theta} = -\frac{\theta}{3}+\frac{5}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)+C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sec x+5} = \frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{15}\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right)+C.$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{4-3\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}.$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{12+13\cos\phi} = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}.$

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\operatorname{sen}x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{3+5\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{4}\ln 3.$

Calcule cada uma das seguintes integrais

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}x-\cos x}.$

14. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\operatorname{ctg}\theta+\operatorname{cossec}\theta}.$

15. $\displaystyle\int \frac{d\phi}{13-5\cos\phi}.$

16. $\displaystyle\int \frac{dt}{13\cos t-5}.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos x+1}.$

18. $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{2+\operatorname{sen}\alpha}.$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\operatorname{sen}x}.$

20. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{5+4\operatorname{sen}\theta}.$

21. $\displaystyle\int \frac{dt}{5\sec t-4}.$

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}.$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3+2\cos\theta}.$

24. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2+\cos\alpha}.$

172. — Outras substituições. Até agora as substituições usadas conduziram a integração da função dada à de uma função racional. Num grande número de casos, porém, pode-se fazer substi-

tuições que conduzem a uma integração que sabemos efetuar sem ser a de função racional. Para tais casos, contudo, não há regras gerais; só a experiência adquirida com o cálculo de um grande número de integrais pode nos guiar.

Uma substituição muito útil é

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2}$$

chamada substituição recíproca. Usemo-la no exemplo seguinte.

Exemplo ilustrativo. Achar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\, dx$.

Solução. Fazendo uso da substituição $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\, dx = -\int (a^2z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, z\, dz = -\frac{(a^2z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3\,a^2} + C =$$

$$= -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,a^2x^3} + C.$$

EXERCÍCIOS

Calcule as seguintes integrais

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x + x^2}} = \ln\left(\frac{cx}{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}\right).$

   Ponha $x = \frac{1}{z}$.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 - x + 2} + x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - x + 2} + x + \sqrt{2}}\right) + C.$

   Ponha $\sqrt{x^2 - x + 2} = z - x$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x - 1}} = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(x + \sqrt{x^2 + 2\,x - 1}\right) + C.$

   Ponha $\sqrt{x^2 + 2\,x - 1} = z - x$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2 + 2\,x} - \sqrt{2 - x}}{\sqrt{2 + 2\,x} + \sqrt{2 - x}}\right) + C.$

   Ponha $\sqrt{2 + x - x^2} = (x + 1)\, z$.

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C.$

Ponha $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z.$

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\text{arc sen}\left(\frac{1+x}{2x}\right) + C.$ Ponha $x = \frac{1}{z}.$

7. $\int \frac{-dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}} = \ln\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x}\right) + C.$

Ponha $x = \frac{1}{z}.$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = -\frac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\right) + C.$ Ponha $x = \frac{1}{z}.$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}} = -\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}$

$+ \ln\left(\frac{1+x+\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}\right) + C.$

Ponha $x = \frac{1}{z}.$

10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}} = \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3\,\text{arc sen}\left(\frac{1-3x}{6x}\right) + C.$

Ponha $x = \frac{1}{z}.$

11. $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx}{x^4} = 6.$ Ponha $x = \frac{1}{z}.$

12. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \text{arc tg}\,e - \frac{\pi}{4}.$ Ponha $e^x = z.$

13. $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \pi.$ Ponha $x = a\,\text{sen}^2 z.$

14. $\int_0^1 \sqrt{2t+t^2}\,dt = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$ Ponha $t+1 =$

Calcule cada uma das seguintes integrais

15. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$. Ponha $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$.

16. $\displaystyle\int \frac{4x\,dx}{(x^2 - 2x + 3)^{\frac{3}{2}}}$. Ponha $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$.

17. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\sqrt{5x - 6 - x^2}}$. Ponha $\sqrt{5x - 6 - x^2} = (x-2)z$.

18. $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{5x - 6 - x^2}}$. Ponha $\sqrt{5x - 6 - x^2} = (x-2)z$.

Capítulo XVII

FÓRMULAS DE REDUÇÃO. USO DE TABELAS DE INTEGRAIS

173. — Introdução. Neste capítulo completa-se o estudo da integração formal. O objetivo é estabelecer diretrizes para o uso de tabelas de integrais. Damos métodos para a dedução de certas fórmulas gerais, chamadas *fórmulas de redução,* que figuram em todas as tabelas.

174. — Fórmulas de redução para diferenciais binomiais. Quando a diferencial binomial não pode ser integrada imediatamente por nenhum dos métodos vistos até agora, é costume empregar fórmulas de redução, deduzidas pelo uso da integração por partes. Por estas fórmulas de redução, a dada diferencial é expressa como soma de dois termos, um dos quais não afetado do sinal de integração e o outro, uma integral da mesma forma que a original, mas, mais fácil de ser calculada. As seguintes são as quatro principais fórmulas de redução.

$$(A)\quad \int x^m (a + bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m-n+1}\ (a + bx^n)^{p+1}}{(np + m + 1)\, b} - \frac{(m - n + 1)\, a}{(np + m + 1)\, b}\int x^{m-n} (a + bx^n)^p\, dx\,.$$

$$(B)\quad \int x^m (a + bx^n)^p\, dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{np + m + 1} + \frac{anp}{np + m + 1}\int x^m (a + bx^n)^{p-1}\, dx.$$

$$(C) \quad \int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1}}{(m+1)\, a}$$

$$- \frac{(np + n + m + 1)\, b}{(m+1)\, a} \int x^{m+n} (a + bx^n)^p \, dx.$$

$$(D) \quad \int x^m (a + bx^n)^p \, dx = - \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{p+1}}{n\,(p+1)\, a}$$

$$+ \frac{np + n + m + 1}{n\,(p+1)\, a} \int x^m (a + bx^n)^{p+1} \, dx.$$

Não é desejável que o estudante saiba de cor estas fórmulas e sim que saiba qual a função de cada uma e quando cada uma delas deixa de valer. Assim:

A fórmula (A) diminui m de n; não vale quando $np+m+1 = 0$.

A fórmula (B) diminui p de 1; não vale quando $np + m + 1 = 0$.

A fórmula (C) aumenta m de n; não vale quando $m + 1 = 0$.

A fórmula (D) aumenta p de 1; não vale quando $p + 1 = 0$.

I. *Dedução da fórmula* (A). A fórmula de integração por partes é

$$(1) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (A), \ \S\ 136$$

Podemos aplicar esta fórmula à integração de

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

pondo $u = x^{m-n+1}$ * e $dv = (a + bx^n)^p x^{n-1} dx$;

então $du = (m - n + 1)\, x^{m-n} dx$ e $v = \dfrac{(a + bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)}$.

* Afim de integrar dv pela fórmula da potência é necessário que x, fora do parêntesis, tenha o expoente $n - 1$. Subtraindo $n - 1$ de m, resta $m - n + 1$ para expoente de x em u.

Substituindo em (1),

$$(2)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

Mas $\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx = \int x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)\,dx$

$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx + b\int x^m (a+bx^n)^p\,dx\,.$$

Substituindo isto em (2), obtemos

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)} - \frac{(m-n+1)\,a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\,.$$

Transpondo o último termo para o primeiro membro, efetuando os cálculos e tirando $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, obtemos a fórmula (A).

Vê-se, pela fórmula (A), que a integração de $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ vai depender da integração de outra diferencial da mesma forma na qual m foi substituído por $m-n$. Por aplicações repetidas da fórmula (A), m pode ser diminuído de um múltiplo qualquer de n.

Quando $np+m+1=0$, a fórmula (A) falha (pois o denominador se anula). Mas, nêste caso

$$\frac{m+1}{n} + p = 0\,;$$

logo, podemos aplicar o método do § 169 e a fórmula não é necessária.

II. *Dedução da fórmula* (*B*). Separando os fatores, podemos escrever

$$(3)\quad \int x^m (a + bx^n)^p \, dx = \int x^m (a + bx^n)^{p-1} (a + bx^n) \, dx$$

$$= a \int x^m (a + bx^n)^{p-1} \, dx$$

$$+ b \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} \, dx \, .$$

Apliquemos a fórmula (*A*) ao último termo de (3), substituindo-se na fórmula m por $m + n$ e p por $p - 1$. Temos

$$b \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} \, dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{np + m + 1}$$

$$- \frac{a (m + 1)}{np + m + 1} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} \, dx \, .$$

Substituindo isto em (3) e reduzindo os termos semelhantes, obtemos a fórmula (*B*).

Cada aplicação da fórmula (*B*) diminui p de uma unidade. A fórmula (*B*) falha no mesmo caso em que (*A*).

III. *Dedução de* (*C*). Tirando da fórmula (*A*)

$$\int x^{m-n} (a + bx^n)^p \, dx \, ,$$

e substituindo m por $m + n$, obtemos (*C*).

Cada vez que aplicamos (*C*), m é substituído por $m + n$. Quando $m + 1 = 0$, a fórmula (*C*) falha, mas nsete caso a diferencial pode ser tratada pelo método do § 169 e portanto a fórmula não é necessária.

IV. *Dedução de* (*D*). Tirando da fórmula (*B*)

$$\int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx ,$$

e substituindo p por $p + 1$, obtemos (*D*).

Cada aplicação de (*D*) aumenta p de uma unidade. Evidentemente, (*D*) falha quando $p + 1 = 0$, mas então $p = -1$ e a expressão é racional.

A fórmula (5) do Caso IV, § 167, é um caso especial de (*D*), quando $m = 0$, $p = -n$, $n = 2$, $a = a^2$, $b = 1$.

Exemplo ilustrativo 1. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

Solução. Aqui $m = 3$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = -1$.

Nêste caso aplicamos a fórmula de redução (*A*) porque a integração será conduzida à de $\int x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$, à qual pode-se aplicar a fórmula da potência. Portanto, substituindo em (*A*), obtemos

$$\int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{3-2+1}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-1(-1+3+1)} -$$

$$- \frac{1(3-2+1)}{-1(-1+3+1)} \int x^{3-2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\int x(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2 + 2)(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Exemplo ilustrativo 2. $\displaystyle\int \frac{x^4 dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}a^2x\right)\sqrt{a^2 - x^2}$

$$+ \frac{3}{8}a^4 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$$

Sugestão. Aplique (*A*) duas vezes

Exemplo ilustrativo 3. $\int (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2}$

$$+ \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$$

Sugestão. Aqui $m = 0$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $a = a^2$, $b = 1$. Aplique (*B*) uma vez.

Exemplo ilustrativo 4. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{2x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} x + C.$

Sugestão. Aplique (*C*) uma vez.

PROBLEMAS

Calcule cada uma das seguintes integrais.

1. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$

2. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{3}(x^2 - 2a^2)\sqrt{a^2 + x^2} + C.$

3. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{15}(3x^4 + 4x^2 + 8)\sqrt{1 - x^2} + C.$

4. $\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$

5. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$

6. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$

7. $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 + 2a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} + C.$

8. $\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x(3a^2 - 2x^2)}{3a^4(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$

9. $\int (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{8}x(2x^2 + 5a^2)\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3}{8}a^4\ln(x +$

$$+ \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

10. $\int x^2\sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{8}x(2x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{1}{8}a^4\ln(x +$

$$+ \sqrt{x^2 + a^2}) +$$

11. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}}{2} + \frac{3a^2}{2}\text{arc cos}\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$

Sugestão $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int x^{\frac{3}{2}}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}dx.$ Aplique (A) duas vêzes

12. $\int \frac{y^3dy}{\sqrt{4y-y^2}} = -\frac{1}{3}(y^2+5y+30)\sqrt{4y-y^2} + 20\,\text{arc cos}\left(1-\frac{y}{2}\right) + C.$

13. $\int \frac{ds}{(a^2+s^2)^3} = \frac{s}{4a^2(a^2+s^2)^2} + \frac{3\,s}{8a^4(a^2+s^2)} + \frac{3}{8a^5}\text{arc tg}\frac{s}{a} + C.$

14. $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{9-4y^2}} = -\frac{1}{8}\,y\sqrt{9-4y^2} + \frac{9}{16}\,\text{arc sen}\,\frac{2\,y}{3} + C.$

15. $\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{1+4\,t^2}} = \frac{1}{24}(2\,t^2-1)\sqrt{1+4\,t^2} + C.$

16. $\int y^2\sqrt{4-9y^2}dy = \frac{1}{36}\,y(9y^2-2)\sqrt{4-9y^2} + \frac{2}{27}\text{arc sen}\frac{3y}{2} + C.$

17. $\int \frac{t^2\,dt}{(1+9\,t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{9\,t^2+2}{81\sqrt{1+9\,t^2}} + C.$

18. $\int t^2\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{1}{32}t(1+8t^2)\sqrt{1+4t^2} - \frac{1}{64}\ln(2t + \sqrt{1+4t^2}) + C.$

Calcule cada uma das integrais

19. $\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^2}.$

20. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

21. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}dx}{x^4}.$

22. $\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{4-x^6}}.$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}dx}{x}.$

24. $\int \frac{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}dx}{x}.$

25. $\int \frac{s^7\,ds}{(a+bs^4)^{\frac{2}{3}}}.$

26. $\int \frac{z^8\,dz}{\sqrt{5-z^3}}.$

27. $\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2}.$

28. $\int \frac{dt}{t^3\sqrt{1-4\,t^2}}.$

29. $\int (9\,y^2+4)^{\frac{3}{2}}dy.$

175. — Fórmulas de redução para diferenciais trigonométricas. O método do último parágrafo, fazendo a dada integral depender de outra do mesmo tipo, chama-se de *redução sucessiva*.

Vamos aplicar agora o mesmo método às diferenciais trigonométricas deduzindo e ilustrando o uso das seguintes fórmulas de redução trigonométricas:

$$(E)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\, dx.$$

$$(F)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n} x\, dx.$$

$$(G)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x\, dx.$$

$$(H)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n} x\, dx.$$

Aqui o estudante deve notar que

A fórmula (E) diminui n de 2; não vale quando $m + n = 0$.
A fórmula (F) diminui m de 2; não vale quando $m + n = 0$.
A fórmula (G) aumenta n de 2; não vale quando $n + 1 = 0$.
A fórmula (H) aumenta m de 2; não vale quando $m + 1 = 0$.

Para deduzir estas fórmulas aplicamos como anteriormente a fórmula de integração por partes, precisamente,

$$(1)\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (A),\ \S\ 136.$$

Seja $u = \cos^{n-1} x$, e $dv = \operatorname{sen}^m x \cos x\, dx$;

então $du = -(n-1)\cos^{n-2} x \operatorname{sen} x\, dx$, e $v = \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1}$.

Substituindo em (1), obtemos

$$(2) \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = + \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Do mesmo modo, se pusermos

$$u = \operatorname{sen}^{m-1} x, \text{ e } dv = \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx\,,$$

obtemos

$$(3) \quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx = - \frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x \, dx.$$

$$\text{Mas} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x \, dx - \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx.$$

Substituindo isto em (2), reduzindo os termos semelhantes e tirando $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, obtemos (E).

Fazendo uma substituição similar em (3), obtemos (F).

Tirando a integral do segundo membro da fórmula (E) e aumentando n de 2, obtemos (G).

Do mesmo modo obtemos (H) da fórmula (F).

As fórmulas (E) e (F) falham quando $m + n = 0$, a fórmula (G) quando $n + 1 = 0$ e a fórmula (H) quando $m + 1 = 0$. Nêstes casos, porém, podemos efetuar a integração por métodos vistos anteriormente.

É claro que quando m e n são inteiros, a integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

pode ser conduzida, por uma das fórmulas de redução acima, a uma das seguintes integrais

$$\int dx, \int \operatorname{sen} x\, dx, \int \cos x\, dx, \int \operatorname{sen} x \cos x\, dx, \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \\ = \int \operatorname{cossec} x\, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\, dx, \int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen} x}, \int \operatorname{tg} x\, dx, \int \operatorname{ctg} x\, dx,$$

e estas nós aprendemos a integrar.

Exemplo ilustrativo 1. Prove que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^5 x}{6} + \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{24} + \frac{1}{16}(\operatorname{sen} x \cos x + x) + C.$$

SOLUÇÃO. Aplicando primeiro a fórmula (F), obtemos

$$(4) \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^5 x}{6} + \frac{1}{6}\int \cos^4 x\, dx.$$

[Aqui $m = 2$, $n = 4$.]

Aplicando a fórmula (E) à integral do segundo membro de (4), obtemos

$$(5) \qquad \int \cos^4 x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\, dx.$$

[Aqui $m = 0$, $n = 4$.]

Aplicando a fórmula (E) ao segundo membro de (5), obtemos

$$(6) \qquad \int \cos^2 x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Substituindo o resultado (6) em (5) e depois este resultado em (4), obtemos a resposta acima.

Exemplo ilustrativo 2. Provar que

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 2x}\, dx = \frac{1}{4}\sec 2x \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{4}\ln(\sec 2x + \operatorname{tg} 2x) + C.$$

SOLUÇÃO. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x} \cdot \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^3 2x}.$

Seja $2x = u$. Então $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$, e

$$(7) \qquad \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^{-3} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-3} u\, du.$$

Aplicando (*G*) à nova integral em (7), com $m = 2$, $n = -3$, e substituindo x por u, vem

$$(8) \qquad \int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-3} u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^3 u \cos^{-2} u}{-2} + \frac{1}{-2}\int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-1} u\, du$$

Apliquemos (*F*) à nova integral em (8), com $m = 2$, $n = -1$. Temos

$$(9) \qquad \int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-1} u\, du = -\operatorname{sen} u + \int \cos^{-1} u\, du = -\operatorname{sen} u + \ln(\sec u + \operatorname{tg} u).$$

Substituindo (9) em (8) e o resultado em (7) e pondo $u = 2x$, obtemos a resposta.

PROBLEMAS

Verifique as seguintes integrações

1. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \operatorname{sen} x \cos x \left[\frac{1}{6}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{16}\right] + \frac{x}{16} + C.$

2. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}\, dx = \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{3} + 3 \ln \cos \frac{x}{3} + C.$

3. $\int \operatorname{ctg}^4 \theta\, d\theta = -\frac{\operatorname{ctg}^3 \theta}{3} + \operatorname{ctg}\theta + \theta + C.$

4. $\int \sec^3 t\, dt = \frac{1}{2}\sec t \operatorname{tg} t + \frac{1}{2}\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) + C.$

5. $\int \operatorname{cossec}^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{cossec} x \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}\ln(\operatorname{cossec} x - \operatorname{ctg} x) + C.$

6. $\int \operatorname{cossec}^5 \theta\, d\theta = -\frac{\operatorname{cossec}\theta \operatorname{ctg}\theta}{4}\left(\operatorname{cossec}^2\theta + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}\ln(\operatorname{cossec}\theta - \operatorname{ctg}\theta) + C$

7. $\int \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi\, d\phi = \frac{1}{8}\operatorname{sen}\phi \cos\phi\,(2\operatorname{sen}^2\phi - 1) + \frac{1}{8}\phi +$

8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ctg}^2 2\theta\, d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 2\theta \operatorname{cossec} 2\theta - \frac{1}{4}\ln(\operatorname{cossec} 2\theta - \operatorname{ctg} 2\theta) + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{\cos x}{3\operatorname{sen}^3 x} - \frac{2\cos x}{3\operatorname{sen} x} + C.$

10. $\displaystyle\int \cos^6\theta\, d\theta = \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{48}[8\cos^4\theta + 10\cos^2\theta + 15] + \frac{5\theta}{16} + C.$

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{16}.$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{8}.$

13. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 2\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{32}.$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^8\phi\, d\phi = \frac{35\pi}{128}.$

15. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}.$

Calcule cada uma das seguintes integrais.

16. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6 2\theta\, d\theta.$

17. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^3\frac{\theta}{2}\, d\theta.$

18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\cos^5 x}.$

19. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\theta}.$

20. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3\frac{\theta}{2}\, d\theta.$

21. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 x\, dx.$

22. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta\cos^3\theta\, d\theta$

23. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen}\theta)^4\, d\theta.$

176. — Uso de uma tabela de integrais. Os métodos de integração dados nos Capítulos XII, XVI e XVII foram orientados no sentido de reduzir uma dada integral a uma ou mais das Integrais Imediatas, § 128. Vários expedientes foram elaborados visando este fim, como

> integração por partes (§ 136);
> integração por decomposição em frações simples,
> (§ 167), integração por substituição de uma nova variável,
> (§ § 168-172); uso de fórmulas de redução (§ § 174-175).

Quando, porém, se tem em mãos uma tabela de integrais mais ou menos boa, o primeiro passo a se dar num problema de integração formal é procurar na tabela uma fórmula que sirva para re-

solver o problema sem o uso de qualquer dos expedientes mencionados. Uma tabela de integrais é dada no Capítulo XXVII. Vamos resolver com ela alguns exemplos.

Exemplo ilustrativo 1. Pela tabela de integrais, prove que

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+x}{x}\right) + C.$$

Solução Use 14, com $a = 2$, $b = 1$ e $u = x$.

Sem a tabela, o exercício poderia ser feito como no Caso II, § 167.

Exemplo ilustrativo 2. Verifique, pela tabela de integrais, que

$$\int \frac{dx}{x(9+4x^2)} = \frac{1}{18}\ln\left(\frac{x^2}{9+4x^2}\right) + C.$$

Solução. Use 22, com $a = 3$, $b = 2$ e $u = x$.

Êste exemplo, sem a tabela, é resolvido pelo Caso III, § 167.

Exemplo ilustrativo 3. Verifique, pela tabela de integrais, que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+3x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{4+3x}-2}{\sqrt{4+3x}+2} + C.$$

Solução. Use 31, com $a = 4$, $b = 3$ e $u = x$.

Êste exemplo, sem a tabela, resolve-se pela substituição $4 + 3x = z^2$, como se viu no § 168.

Exemplo ilustrativo 4. Verifique pela tabela de integrais que

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+4x-7}} = \frac{\sqrt{3x^2+4x-7}}{3} -$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\ln(6x+4+2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+4x-7}) + C.$$

Solução. Use 113, com $a = -7$, $b = 4$, $c = 3$, e $u = x$.

Sem a tabela, o exemplo pode ser tratado como o exemplo ilustrativo 2, § 132.

Exemplo ilustrativo 5. Verifique pela tabela de integrais que

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{3x}(2\,\text{sen}\,2x + 3\cos 2x)}{13} + C.$$

Solução. Use 154, com $a = 3$, $n = 2$, $u = x$.

Sem a tabela, o exemplo pode ser resolvido por integração por partes. Veja o exemplo ilustrativo 6, § 136.

Em muitos problemas a dada integral não pode ser identificada com alguma da tabela assim fàcilmente como nos exemplos precedentes. Nestes casos, procuramos na tabela uma integral parecida com a dada e tal que esta possa ser transformada na da tabela por uma conveniente mudança de variável. Este método foi constantemente usado no Capítulo XII e desde então, em todos os casos de integração.

Exemplo ilustrativo 6. Verifique, pela tabela de integrais, que

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}\ln\frac{2x}{3+\sqrt{4x^2+9}} + C.$$

SOLUÇÃO. A fórmula 74 é parecida. Ponhamos $u = 2x$. Então $x = \frac{1}{2}u$ $dx = \frac{1}{2}du$ e substituindo êstes valores na dada integral, obtemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+9}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+9}}.$$

Portanto, aplicando 47, com $a = 3$, e substituindo de novo $u = 2x$, $a = 3$, temos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3+\sqrt{4x^2+9}}{2x}\right) + C.$$

Sem a tabela, poderíamos proceder como no exemplo ilustrativo 2, § 135.

Exemplo ilustrativo 7. Verifique, pela tabela de integrais, que

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3}dx = -\frac{2}{27}\frac{(9x-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + C.$$

SOLUÇÃO. A fórmula 84 é semelhante. Ponhamos $u = 2x$. Então $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$. Substituindo, obtemos

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{2}u-u^2}}{\frac{1}{8}u^3}\frac{du}{2} = 4\int \frac{\sqrt{\frac{9}{2}u-u^2}}{u^3}du.$$

Agora esta é 84 com $a = 9/4$. Aplicando 84 e substituindo de volta u por $2x$, obtemos o resultado desejado.

Se nenhuma fórmula da tabela pode ser aplicada, como nos dois casos precedentes, ainda há a possibilidade de que o uso de um ou mais dos expedientes mencionados no princípio deste parágrafo possa conduzir a novas integrais solúveis pela tabela. Não há diretrizes gerais a não ser as regras já dadas para o emprego dos citados expedientes.

O leitor deve ter presente a disposição das fórmulas na tabela. As integrais imediatas do § 128 aparecem nos devidos lugares. As fórmulas de redução do § 174 são dadas, com modificações, pelas fórmulas 96-104. As fórmulas de redução do § 175 e outras para vários casos são as de números 157-174. Uma maior capacidade na técnica da integração advirá da familiaridade com a tabela e da prática em usá-la.

PROBLEMAS

Calcule cada uma das seguintes integrais

1. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+5}\,dx = \tfrac{1}{15}(3x^2-10)(x^2+5)^{\frac{3}{2}} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dt}{(1-4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{\sqrt{1-4t^2}} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9x^2-4}} = \frac{x}{18}\sqrt{9x^2-4} + \frac{2}{27}\ln(3x+\sqrt{9x^2-4}) + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{2-\cos 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta) + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2 + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{x^2} = -\frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{2x} - \frac{3a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$

7. $\displaystyle\int e^t \operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\,dt = \tfrac{1}{4}e^t(2-\operatorname{sen} t - \cos t) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\,d\theta}{1+\cos\theta} = 2\ln(1+\cos\theta) - 2\cos\theta + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2x+x^2} = \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C.$

10. $\displaystyle\int x^3\operatorname{sen} x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 - \tfrac{1}{2}x^2\cos x^2 + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = 2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x-1} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9t^2+4}\,dt}{t} = \sqrt{9t^2+4} - 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{9t^2+4}}{t}\right) + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{du}{u^4\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{(a^2+2u^2)\sqrt{a^2-u^2}}{3a^4u^3} + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x}} = \frac{1}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{4-x}+2}\right) - \frac{\sqrt{4-x}}{4x} + C.$

Calcule cada uma das seguintes integrais.

15. $\int \frac{x^5\,dx}{5+4x^2}$.

16. $\int (a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}\,du$.

17. $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$.

18. $\int \frac{\operatorname{ctg} t\,dt}{a+b\operatorname{sen} t}$.

19. $\int \sqrt{\frac{1+2y}{1-2y}}\,dy$.

20. $\int \frac{\sqrt{4x^2-25}\,dx}{x^2}$.

21. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}$.

22. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y-1}}$.

23. $\int \sqrt{\frac{3+x^2}{2+x^2}}\,x\,dx$.

24. $\int \frac{d\theta}{5+3\operatorname{sen} 2\theta}$.

25. $\int \frac{d\theta}{3+5\operatorname{sen} 2\theta}$.

26. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^6+a^6}}$.

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

28. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$.

29. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

30. $\int \frac{\sqrt{x^3-1}\,dx}{x}$.

31. $\int \frac{\sqrt{x+4}\,dx}{x}$.

32. $\int e^t\cos^2 t\,dt$.

33. $\int \frac{\operatorname{ctg}\theta\,d\theta}{4+\operatorname{sen}^2\theta}$.

Calcule cada uma das seguintes integrais definidas.

34. $\int_0^3 \frac{x\,dx}{(1+x)^2} = 0{,}636$.

35. $\int_1^{\frac{5}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{25-9x^2}} = \frac{4}{25}$.

36. $\int_0^2 \frac{dx}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{45}$.

37. $\int_1^2 \frac{dt}{t(5-t^2)} = 0{,}277$.

38. $\int_0^2 (4x^2+9)^{\frac{3}{2}}\,dx = 112{,}9$.

39. $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-u}{a+u}}\,du = \pi a$.

40. $\int_1^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-2x^2}} = 1{,}338$.

41. $\int_1^2 \frac{\sqrt{9-2x^2}\,dx}{x^2} = 1{,}129$.

42. $\int_1^2 \frac{\sqrt{9-2x^2}\,dx}{x} = 1{,}467$.

43. $\int_0^1 t^2e^{-t}\,dt = 0{,}1605$.

44. $\int_1^2 \frac{dy}{y^2\sqrt{4y^2+5}}$.

45. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\operatorname{sen}^4\theta\,d\theta$.

46. $\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{(4x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$.

47. $\int_0^1 e^{-\frac{t}{5}}\cos\tfrac{1}{2}\pi t\,dt$.

48. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}$.

49. $\int_0^{\pi} \phi\cos\tfrac{1}{3}\phi\,d\phi$.

OUTROS PROBLEMAS

1. Verifique os resultados seguintes

$$(a)\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)}=\ln 3. \qquad (b)\int_1^{e^2}\frac{dx}{x(1+\ln x)^2}=\frac{2}{3}.$$

2. Uma parábola de eixo paralelo a OY passa pela origem e pelo ponto (1, 2). Achar a equação da curva quando a área compreendida entre a parábola e o eixo dos xx é um máximo ou um mínimo.

Resp. $y = 6x - 4x^2$ dá um mínimo.

3. Desenhe a curva $y\sqrt{x} = \ln x$. Ache o volume do sólido de revolução que se obtém quando gira em torno de OX a área limitada pela curva, o eixo dos xx e duas paralelas a OY, uma passando pelo ponto máximo da curva e a outra pelo ponto de inflexão.

Resp. $\frac{296}{81}\pi$.

4. Um cone circular reto de metal é feito de modo que a densidade num ponto qualquer P é $20(5 - r)$ libras por pé cúbico, onde r é a distância em pés entre o ponto P e o eixo do cone. Achar o pêso do cone se a altura e o raio da base medem cada um 3 pés.

Resp. 630π libras.

Nota. O peso de um elemento de densidade uniforme é o seu volume vezes a densidade.

5. Uma esfera metálica ôca tem raio interior igual a 6 polegadas e raio exterior igual a 10 polegadas. A densidade do metal num ponto P varia na razão inversa da distância entre P e o centro da esfera e na superfície esférica exterior a densidade é duas onças por polegada cúbica. Achar o peso da esfera.

Resp. $2\,560\pi$ onças.

6. Sendo n um inteiro par, mostre que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\frac{(n-1)(n-3)\ldots(1)}{n(n-2)\ldots(2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

7. Sendo n um inteiro ímpar, ache o valor de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^n x\,dx.$$

Capítulo XVIII

CENTRÓIDES, PRESSÃO DE UM FLUIDO E OUTRAS APLICAÇÕES

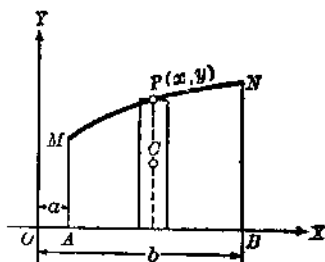
177. — Momento de área; centróides. O centróide de uma área plana é definido do seguinte modo.

Um pedaço de cartão fino, liso e duro, suspenso por um ponto, tomará a posição horizontal, se o ponto estiver diretamente sob o centro de gravidade. O ponto de suspensão nestas condições diz-se o *centróide* da área da superfície plana do cartão.

Reconhecem-se imediatamente os centróides de certas áreas consideradas em geometria elementar. Para um retângulo ou um círculo o centróide coincide com o centro geométrico. De fato, se uma figura plana possui um centro de simetria, este ponto é o centróide. Se uma figura plana tem um eixo de simetria, o centróide estará sobre esse eixo.

As considerações seguintes levam à determinação do centróide por meios matemáticos. Está fora do alcance dêste livro justificar os argumentos por mecânica.

Consideremos a área $AMPNB$ da figura. Dividamo-la em n retângulos, cada um de base Δx. A figura mostra um dêsses retângulos. Seja dA sua área e $C(h, k)$ o seu centróide. Então

$$(1)\quad dA = y\,dx\,,\quad h = x\,,\quad k = \tfrac{1}{2}\,y\,.$$

O *momento de área* deste retângulo elementar em relação a OX (ou OY) é o produto da área do retângulo pela distância entre o cen-

tróide e OX (ou OY). Se estes momentos são, respectivamente, dM_x e dM_y, então

$$(A) \qquad dM_x = k\,dA\,, \quad dM_y = h\,dA\,.$$

O *momento de área* para a figura $AMPNB$ é obtido pela aplicação do teorema fundamental (§ 156) à soma dos momentos de área dos n retângulos elementares. Obtemos, pois,

$$(B) \qquad M_x = \int k\,dA\,, \quad M_y = \int h\,dA\,.$$

Finalmente, se $(\bar{x}, \bar{y})$ é o centróide da área $AMPNB$ e A é a área, então as relações entre os momentos de área (B) e $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são dados por

$$(C) \qquad A\bar{x} = M_y, \quad A\bar{y} = M_x.$$

Para calcular $\bar{x}$ e $\bar{y}$, achamos os momentos de área M_x e M_y. Por (1) e (B), êstes são, para a figura acima,

$$(2) \qquad M_x = \tfrac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx\,, \quad M_y = \int_a^b xy\,dx\,,$$

nas quais o valor de y, em termos de x, provém da equação da curva MPN.

Se a área A é conhecida, temos, por (C),

$$(3) \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}.$$

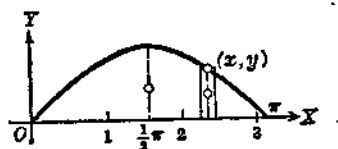
Se A não é conhecida, ela pode ser achada por integração, como no § 145.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o centróide da área sob um arco da senóide.

$$(4) \qquad y = \operatorname{sen} x$$

SOLUÇÃO. Construindo um retângulo elementar, temos

$$(5) \qquad dA = y\,dx = \operatorname{sen} x\,dx\,,$$

$$dM_x = k\,dA = \tfrac{1}{2}y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\,dx, \quad dM_y = h\,dA = xy\,dx = x\operatorname{sen} x\,dx\,.$$

Os limites são $x = 0$, $x = \pi$. Logo,

$$(6)\quad A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = 2,\ M_x = \tfrac{1}{2} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{4}\pi,\ M_y = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx = \pi.$$

Portanto, de (3), $\overline{x} = \frac{1}{2}\pi$, $\overline{y} = \frac{1}{8}\pi$. *Resp.*

O valor de $\overline{x}$ podia ser antecipado pois a reta $x = \frac{1}{2}\pi$ é um eixo de simetria.

Exemplo ilustrativo 2. Na figura, a curva OPA é um arco da parábola $y^2 = 2px$. Achar o centróide da área $OPAB$.

Solução. Desenhemos um retângulo elementar, como o da figura e marquemos o centróide (h, k). Então

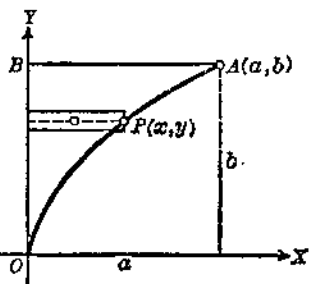
$$dA = x\,dy,\ h = \tfrac{1}{2}x,\ k = y$$

Usando (A), $dM_x = k\,dA = xy\,dy$.

$$dM_y = h\,dA = \tfrac{1}{2}x^2\,dy.$$

Achando x em termos de y de $y^2 = 2px$ e integrando entre os limites $y=0$, $y=b$, obtemos

$$A = \frac{b^3}{6p},\ M_x = \frac{b^4}{8p},\ M_y = \frac{b^5}{40p^2}.$$

Logo $\overline{x} = \dfrac{3b^2}{20p}$, $\overline{y} = \frac{3}{4}b$. Mas $x = a$, $y = b$ satisfazem a equação $y^2 = 2px$. Logo $b^2 = 2pa$ e $\overline{x} = \frac{3}{10}a$. O centróide é portanto $\left(\frac{3}{10}a, \frac{3}{4}b.\right)$ *Resp.*

PROBLEMAS

Achar o centróide de cada uma das áreas limitadas pelas seguintes curvas.

1. $y^2 = 2px,\ x = h.$ *Resp.* $\left(\frac{3}{5}h, 0\right)$.
2. $y = x^3,\ x = 2,\ y = 0.$ $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{7}\right)$.
3. $y = x^3,\ y = 4x$, (Primeiro quadrante). $\left(\frac{16}{15}, \frac{64}{21}\right)$.
4. $x = 4y - y^2,\ y = x.$ $\left(\frac{12}{5}, \frac{3}{2}\right)$.
5. $y^2 = 4x,\ 2x - y = 4.$ $\left(\frac{8}{5}, 1\right)$.
6. $y = x^2,\ y = 2x + 3.$ $\left(1, \frac{17}{5}\right)$.

7. $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 6x - x^2 - 3.$ (2, 1).

8. $y = x^3,\ y = 8,\ x = 0.$

9. $y = 6x - x^2,\ y = x.$

10. $y = 4x - x^2,\ y = 2x - 3.$

11. $y = x^3 - 3x,\ y = x.$ (Primeiro quadrante).

12. $y^2 = a^2 - ax,\ x = 0,\ y = 0.$ (Primeiro quadrante).

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y = 0,\ x = 2a.$ (Primeiro quadrante)

14. Achar o centróide da área limitada pelos eixos coordenados e a parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. *Resp.* $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{5}a.$

15. Achar o centróide da área limitada pelo laço da curva $y^2 = 4x^2 - x^3.$ *Resp.* $\bar{x} = \frac{16}{7},\ \bar{y} = 0.$

16. Achar o centróide da porção no primeiro quadrante da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ *Resp.* $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi},\ \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}.$

17. Achar o centróide da área limitada pela parábola $y^2 = 2px$ e a reta $y = mx.$ *Resp.* $\bar{x} = \frac{4p}{5m^2}\ \bar{y} = \frac{p}{m}.$

18. Achar o centróide da área limitada pelas parábolas $y^2 = ax$ e $x^2 = by.$ *Resp.* $\bar{x} = \frac{9}{20}a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}},\ \bar{y} = \frac{9}{20}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}.$

19. Achar o centróide da área limitada pela cissóide $y^2(2a - x) = x^3$ e a sua assíntota $x = 2a.$ *Resp.* $\bar{x} = \frac{5}{3}a,\ \bar{y} = 0.$

20. Achar o centróide da área limitada pela curva $x^2y = 4a^2(2a - y)$ e o eixo dos xx. *Resp.* $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{1}{2}a.$

21. Achar a distância entre o centro do círculo e o centróide da área de um setor circular de ângulo igual a 2θ.

Resp. $\frac{2r\,\text{sen}\,\theta}{3\theta}.$

22. Achar a distância entre o centro do círculo e o centróide da área de um segmento circular cuja corda subtende um ângulo cêntrico igual a 2θ *Resp.* $\frac{2r\,\text{sen}^3\theta}{3(\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta)}.$

23. Achar o centróide da área limitada pela cardióide

$$\rho = a\,(1 + \cos\theta) \qquad \textit{Resp.} \quad \bar{x} = \tfrac{5}{6}\,a,\ \bar{y} = 0.$$

24. Achar o centróide da área limitada por um laço da curva $\rho = a\cos 2\,\theta$. *Resp.* Distância da origem $= \dfrac{128\,a\,\sqrt{2}}{105\,\pi}$.

25. Achar o centróide da área limitada por um laço da curva $\rho = a\cos 3\,\theta$. *Resp.* Distância da origem $= \dfrac{81\,a\,\sqrt{3}}{80\,\pi}$.

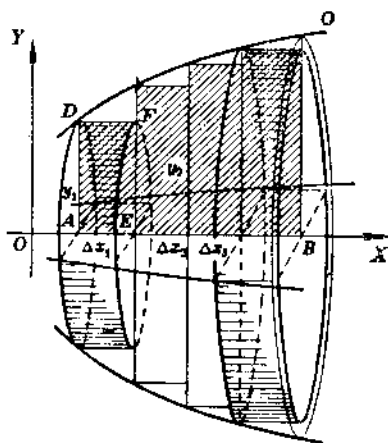
178. — Centróide de um sólido de revolução. O centro de gravidade de um sólido homogêneo coincide com o centróide do corpo, considerado como sólido geométrico. O centróide estará em cada plano de simetria que porventura tenha o sólido.

Para chegar a uma definição matemática do centróide de um sólido de revolução, é necessário modificar o que se disse no parágrafo precedente apenas nos detalhes.

Seja OX o eixo de revolução do sólido. O centróide deve estar neste eixo. Seja dV um elemento de volume, isto é, um cilindro de revolução com altura Δx e raio y. Então $dV = \pi\,y^2\,\Delta x$. O *momento de volume* deste cilindro em relação ao plano passando por OY e perpendicular a OX é

$$(1) \qquad dM_y = x\,dV = \pi\,x\,y^2\,\Delta x.$$

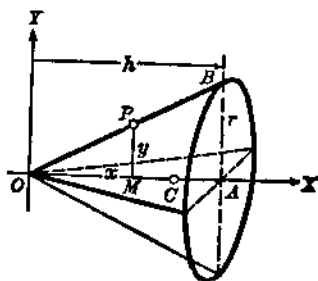
O *momento de volume do sólido* é, pois, achado pelo teorema fundamental, sendo, portanto, $\bar{x}$ dado por

$$(2) \qquad V\bar{x} = M_y = \int \pi\,xy^2\,dx$$

Exemplo ilustrativo. Achar o centróide de um cone de revolução.

Solução. A equação do elemento OB é

$$\frac{y}{x} = \frac{AB}{OA} = \frac{r}{h}, \text{ ou } y = \frac{rx}{h}.$$

Logo, $M_y = \int_0^h \pi x \frac{r^2x^2}{h^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi r^2 h^2.$

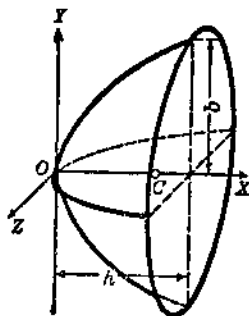
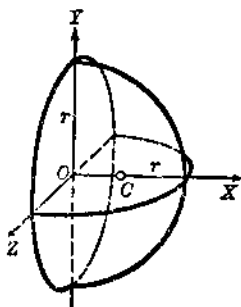
Como $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $\bar{x} = \frac{3}{4}h$. *Resp.*

PROBLEMAS

Ache o centróide de cada um dos seguintes sólidos

1. Hemiesfera. (ver figura). *Resp.* $\bar{x} = \frac{3}{8}r$.

2. Parabolóide de revolução (ver figura)

Resp. $\bar{x} = \frac{2}{3}h$.

A área limitada por OX e cada curva dada abaixo gira em torno de OX. Achar o centróide do sólido de revolução gerado.

3. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = 2a$.

4. $2xy = a^2$, $x = \frac{1}{2}a$, $x = 2a$.

5. $ay = x^2$, $x = a$. *Resp.* $\bar{x} = \frac{5}{6}a$.

6. $y^2 = 4x$, $x = 1$, $x = 4$.

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $x = 1$. $\bar{x} = \frac{21}{44}$.

8. $y = a \operatorname{sen} x$, $x = \frac{1}{2}\pi$.

A área limitada por OY e cada uma das curvas abaixo gira em tôrno de OY. Achar o centróide do sólido de revolução gerado.

9. $y^2 = 4ax$, $y = b$. *Resp.* $\bar{y} = \frac{5}{6}b$.

10. $x^2 - y^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$. $\bar{y} = \frac{9}{16}$.

11. $ay^2 = x^3$, $y = a$.

12. Os raios das bases de um tronco de cone são iguais a 3 polegadas e 6 polegadas. A altura mede 8 polegadas. Ache o centróide.

13. Achar o centróide do sólido obtido pela revolução em tôrno de OY da área no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$, $x = a$ e a parábola $y^2 = 4\,ax$. *Resp.* $\bar{y} = \frac{5}{6}\,a$.

14. Achar o centróide do sólido obtido pela revolução em torno de OX da parte da área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que esta no primeiro quadrante.

15. Achar o centróide do sólido obtido pela revolução em tôrno de OX da área no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = 0$, $x = 2\,a$ e a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

16. Achar o centróide do sólido formado pela revolução em torno de OX da área limitada pelas retas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$.

17. Achar o centróide do sólido formado pela revolução em tôrno de OX da área limitada pelas retas $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ e a curva $y = \operatorname{sen} 2\,x$.

18. Achar o centróide do sólido formado pela revolução em torno de OX da área limitada pelas retas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e a curva $y = e^x$.

19. A área limitada por uma parábola, a corda focal perpendicular ao eixo da parábola e este eixo gira em torno da mencionada corda focal. Achar o centróide do sólido gerado.

Resp. Distância do foco $= \frac{5}{32}$ do comprimento da corda focal perpendicular ao eixo.

179. — Pressão de um fluido. Vamos ver como se calcula a pressão de um fluido sôbre uma parede vertical.

Seja $ABDC$ parte da área da superfície vertical de uma parede de um reservatório. Quer-se determinar a pressão total do fluido sobre esta área. Tracemos os eixos como na figura, com o eixo dos yy sobre a superfície do fluido. Dividamos AB em n subintervalos e, como na figura, construamos retângulos dentro da área. Então a área de um retângulo (como EP) é $y\,\Delta x$. Se a superfície deste retângulo está em posição horizontal, e sua distância à superfície de fluido é x, então a pressão do fluido sobre ela é

superfície do fluido

$$W\,x\,y\,\Delta x,$$

[A pressão de um fluido sobre uma dada superfície horizontal é igual ao pêso de uma coluna do fluido apoiando-se na superfície. Esta superfície é, pois, a base da coluna e a distância que a separa da superfície do fluido é a altura da coluna.]

onde W = peso de uma unidade de volume do fluido. Como a pressão de um fluido é a mesma em todas as direções, temos que $W\,xy\,\Delta x$ será também (aproximadamente) a pressão do fluido sobre o retângulo EP quando a sua superfície esta em posição vertical. Logo, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} Wx_iy_i\Delta x_i$$

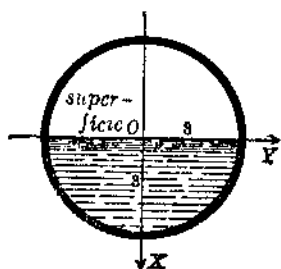
representa aproximadamente a pressão do fluido sobre todos os retângulos. A pressão sobre a área $ABDC$ é, pois, o limite desta soma. Portanto, pelo teorema fundamental,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} Wx_iy_i\Delta x_i = \int Wxy\,dx\,.$$

Portanto, a pressão de um fluido sobre uma superfície vertical submersa, limitada por uma curva, o eixo dos xx e as duas horizontais $x = a$ e $x = b$ é dada pela fórmula

$$(D) \qquad \text{Pressão do fluido} = W\int_a^b yx\,dx\,,$$

onde o valor de y, em termos de x, provém da dada equação da curva.

Tomaremos 62 libras ($= W$) como peso de um pé cúbico de água.

Exemplo ilustrativo 1. Um tubo circular tem 6 pés de diâmetro e esta cheio dágua pela metade. Achar a pressão sôbre a tampa do tubo.

SOLUÇÃO. A equação do círculo é $x^2 + y^2 = 9$.

Logo $$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Tomando $x = 0$ e $x = 3$ como limites de integração na fórmula (D) e notando que $W = 62$, a pressão a direita do eixo dos xx é

$$62 \int_0^3 \sqrt{9 - x^2} \cdot x\,dx = \left[-\frac{62}{3}(9 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = 558.$$

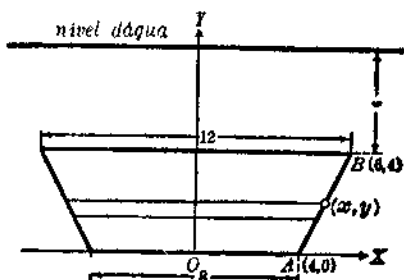
Portanto a pressão total é $2 \times 558 = 1116$ libras. *Resp.*

A parte essencial do raciocínio acima é que a pressão ($= dP$) sôbre uma faixa elementar é igual (aproximadamente) ao produto da área da faixa ($= dA$) pela distância desta à superfície do fluido ($= h$) e pelo pêso ($= W$) de uma unidade de volume do fluido, isto é,

$$(E) \qquad dP = Wh\,dA.$$

Tendo isto presente, os eixos de coordenadas podem ser escolhidos em qualquer posição conveniente.

Exemplo ilustrativo 2. Uma comporta de uma represa tem a forma de um trapézio, como mostra a figura. Achar a pressão sobre a comporta quando a superfície da água esta a quatro pés acima do topo da comporta.

SOLUÇÃO. Escolhendo os eixos OX e OY como mostra a figura e considerando uma faixa elementar como a da figura, temos, usando (E),

$$dA = 2\,x\,dy,$$
$$h = 8 - y,$$
$$dP = W\,(8 - y)\,2\,x\,dy.$$

A equação de AB é $y = 2x - 8$. Tirando x desta e substituindo, obtém-se

$$dP = W(8 - y)(y + 8)\,dy = W(64 - y^2)\,dy.$$

Integrando entre os limites $y = 0$ e $y = 4$, tem-se

$$P = W\int_0^4 (64 - y^2)\,dy = \frac{704}{3}W = 14.549 \text{ libras.} \quad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

Nos problemas seguintes o eixo dos yy esta dirigido verticalmente para cima e o dos xx sobre a superfície do líquido. Indicando com W o peso de uma unidade de volume do líquido, calcular a pressão sobre as áreas dos polígonos de vértices

1. $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -6)$, $(0, 0)$. *Resp.* $18\,W$.
2. $(0, 0)$, $(3, -6)$, $(0, -6)$, $(0, 0)$. $36\,W$.
3. $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(0, -4)$, $(-2, -2)$, $(0, 0)$. $16\,W$.

4. Calcular a pressão sobre a metade inferior de uma elipse cujos semi-eixos medem duas e três unidades, (*a*) quando o eixo maior está sobre a superfície do líquido, (*b*) quando o eixo menor esta sobre a superfície.

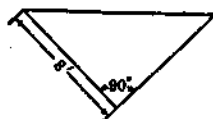
Resp. (*a*) $8\,W$; (*b*) $12\,W$.

5. Um tanque de gasolina, em posição horizontal, termina por elipses. O eixo horizontal de cada uma destas mede 12 pés e o vertical 6 pés. Calcular a pressão num dos extremos do tanque quando ele está cheio pela metade, sabendo que a gasolina pesa 60 libras por pé cúbico.

Resp. 2 160 libras.

6. Uma parede lateral de uma cuba é um segmento de parábola (com vértice para o fundo). Os extremos da parte superior da parede distam de 8 pés e a altura dela é de 16 pés. Calcular a pressão sobre a parede quando a cuba esta cheia de um líquido que pesa 70 libras por pé cúbico.

Resp. 38 229 libras.

7. Uma parede lateral de uma tina é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 8 pés cada um. Calcular a pressão sobre a parede quando a tina esta cheia de água. ($W = 62{,}5$) *Resp.* 3 771 libras.

8. Uma parede lateral de uma tina é um triângulo isósceles de altura 5 pés e base 5 pés. Calcular a pressão sobre a parede quando a tina está cheia de água. *Resp.* 1 302 libras.

9. Um tanque cilíndrico horizontal de diâmetro 8 pés esta cheio de gasolina pela metade. Sabendo que esta pesa 60 libras por pé cúbico, calcular a pressão sôbre uma parede lateral.

Resp. 2 560 libras.

10. Calcular a pressão sobre uma parede lateral se o tanque do problema anterior esta cheio.

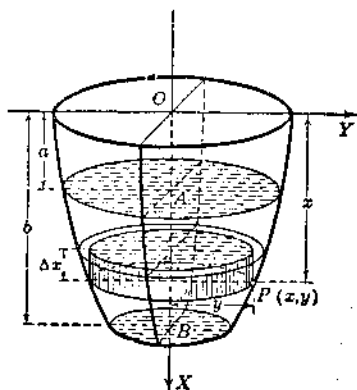
11. Uma comporta retangular de uma represa tem 10 pés de largura e 6 pés de altura. Achar (*a*) a pressão sobre a comporta quando o nível da água está 8 pés acima do topo da comporta, (*b*) qual deve ser o nível da água para que a pressão seja o dobro da achada em (*a*). ($W = 62{,}5$).

Resp. (*a*) 41 250 libras; (*b*) 11 pés.

12. Mostre que a pressão sobre uma superfície vertical é o produto do peso de uma unidade cúbica do líquido, pela área da superfície e pela distância entre o centróide da área e a superfície do líquido.

13. Um tanque cilíndrico vertical de diâmetro 30 pés e altura 50 pés está cheio de água. Achar a pressão sobre a superfície lateral.

Resp. 3 682 ton.

180. — Trabalho. O trabalho realizado por uma força constante F que causa a um corpo um deslocamento d na direção da força, é o produto Fd. Quando F é variável, esta definição conduz a uma integral. Consideraremos aqui dois exemplos.

Trabalho realizado para tirar um líquido de um vaso. Examinemos o problema de achar o trabalho realizado para tirar um líquido de um reservatório que tem a forma de um sólido de revolução cujo eixo é vertical. É conveniente tomar o eixo dos xx coincidindo com o eixo de revolução e o dos yy coincidindo com o nível da parte superior do reservatório.

Consideremos um reservatório como o da figura. Queremos calcular o trabalho realizado quando se retira o líquido que, no caso da figura, está compreendido entre as cotas a e b.

Dividamos AB em n subintervalos; pelos pontos de divisão, tracemos planos perpendiculares ao eixo de revolução e, como no § 160, construamos cilindros de revolução. O volume de um qualquer destes cilindros é $\pi y^2 \Delta x$ e o peso do líquido nele contido é $W\pi y^2 \Delta x$, onde $W =$ pêso de uma unidade cúbica do fluido. O trabalho realizado para levantar este cilindro de fluido até o exterior do reservatório (através de uma altura x) é

$$W\pi y^2 x \Delta x.$$

[O trabalho realizado no levantamento é igual ao pêso multiplicado pelo deslocamento vertical.]

O trabalho realizado para levantar todos os cilindros até o exterior do reservatório é a soma

$$\sum_{i=1}^{n} W \pi y_i^2 x_i \Delta x_i$$

Portanto, o trabalho realizado para esvasiar o reservatório é o limite desta soma, isto é, pelo teorema fundamental,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} W \pi y_i^2 x_i \Delta x_i = \int W \pi y^2 x \, dx .$$

Tem-se, pois, que o trabalho realizado para esvasiar um reservatório cuja forma é a de um sólido de revolução e que esta cheio desde a cota a até a cota b é dado pela fórmula

$$(F) \qquad \text{Trabalho} = W\pi \int_a^b y^2 x \, dx ,$$

onde o valor de y, em termos de x, provém da equação da curva que gerou o sólido.

Exemplo ilustrativo 1. Calcular o trabalho realizado para tirar a água de um reservatório hemisférico de profundidade igual a 10 pés.

Solução. A equação do círculo é

$$x^2 + y^2 = 100$$

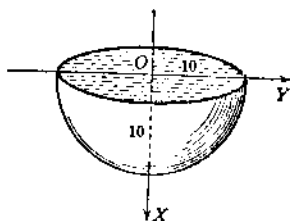
Logo

$$y^2 = 100 - x^2,$$

$$W = 62 ,$$

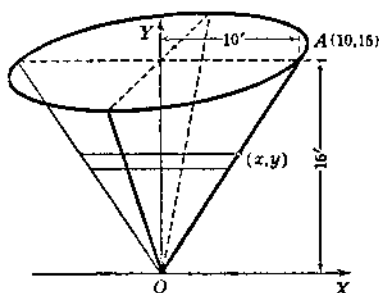
e os limites de integração são $x = 0$ e $x = 10$.

Substituindo em (F), achamos

$$\text{Trabalho} = 62\pi \int_0^{10} (100 - x^2)\, x dx = 155.000\, \pi \text{ libras por pé.}$$

O princípio essencial no raciocínio acima é o seguinte: o elemento de trabalho ($= dw$) realizado para alçar um volume elementar ($= dV$) a uma altura h é

$$dw = W\,h\,dV\,,$$

onde W = peso de uma unidade de volume do fluido. Tendo isto presente, os eixos de coordenadas podem ser escolhidos de qualquer modo conveniente.

Exemplo ilustrativo 2. Uma cisterna cônica é tal que o raio da parte superior mede 20 pés e a altura 15 pés. Sabendo que a superfície da água na cisterna esta 5 pés abaixo da parte superior, achar o trabalho realizado para esvasiar a cisterna.

Solução. Tomemos eixos OX e OY como na figura. Então

$$dV = \pi x^2\,dy\,,$$
$$h = 15 - y\,.$$
$$dw = W\,(15 - y)\,\pi x^2\,dy\,.$$

A equação do elemento OA é $x = \frac{2}{3}\,y$. Substituindo,

$$dw = \pi W\,(15 - y)\,\frac{4}{9}\,y^2\,dy = \frac{4}{9}\,\pi W\,(15\,y^2 - y^3)\,dy\,.$$

Os limites são $y = 0$ e $y = 10$, pois a água tem 10 pés de profundidade. Integrando,

$$w = \frac{4}{9}\,\pi W \int_0^{10} (15\,y^2 - y^3)\,dy = 216.421 \text{ libras por pé.} \quad \textit{Resp.}$$

Trabalho realizado por um gás em expansão. Quando um gás num cilindro se expande contra um pistão e passa do volume de v_0 pés cúbicos para o volume de v_1 pés cúbicos, o trabalho que realiza empurrando o pistão é expresso, em libras por pé, pela fórmula

$$(G) \qquad \text{Trabalho} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv\,,$$

onde p = pressão em libras por pé quadrado.

Demonstração. Suponhamos que o volume cresça de v a $v+dv$.

Seja c = área da seção transversal do cilindro.

Então $\frac{dv}{c}$ = distância que o pistão percorre.

Como pc = força que causa a expansão dv, temos

$$\text{Elemento de trabalho realizado} = pc\frac{dv}{c} = p\,dv.$$

A fórmula (G) resulta daqui pelo teorema fundamental. Para usar (G), a relação entre p e v durante a expansão deve ser conhecida. Esta relação tem a forma

$$(1) \qquad pv^n = \text{constante},$$

onde n é uma constante.

Numa expansão isotérmica, isto é, numa expansão em que a temperatura permanece constante, tem-se $n = 1$ e a relação pressão-volume é:

$$(2) \qquad pv = p_0v_0 = p_1v_1\,.$$

No gráfico de (1) (diagrama pressão-volume), com volumes como abscissas e pressões como ordenadas, a área sob a curva dá, numèricamente, o trabalho realizado, em virtude da fórmula (G). Numa expansão isotérmica, o gráfico é uma hipérbole equilátera, pois tem-se a relação (2).

PROBLEMAS

1. Uma cisterna cilíndrica vertical, de diâmetro 16 pés e profundidade 20 pés, está cheia de água ($W = 62{,}5$). Calcular o trabalho necessário para tirar a água da cisterna.

Resp. $800\,000\,\pi$ libras por pé.

2. Se a cisterna do problema anterior esta cheia pela metade, calcular o trabalho para tirar a água.

3. Uma cisterna cônica cujo bordo tem 20 pés de diâmetro e cuja profundidade tem 20 pés esta cheia de água ($W = 62{,}5$). Calcular o trabalho necessário para alçar a água a 15 pés de altura acima do nível do bordo da cisterna.

Resp. $\frac{2\,500\,000\,\pi}{3}$ libras por pé.

4. Um tanque hemisférico de diâmetro 10 pés esta cheio de gasolina pesando 60 libras por pé cúbico. Calcular o trabalho nessário para alçar a gasolina até o bordo do tanque.

Resp. 9 375 π libras por pé

5. Um tanque hemisférico de diâmetro 20 pés esta cheio de gasolina pesando 60 libras por pé cúbico. A gasolina é alçada a 10 pés acima do bordo do tanque por uma bomba de $\frac{1}{2}$ H.P. (isto é, a bomba pode fazer um trabalho de 16 500 libras por pé num minuto). Quanto tempo levará a bomba para esvaziar o tanque?

6. Achar o trabalho para tirar a água de um reservatório semi-elíptico ($W = 62$). O bordo é um círculo de diâmetro 6 pés e a profundidade é de 5 pés. O reservatório está cheio.

Resp. 3 487 $\frac{1}{2}$ π libras por pé.

7. Um reservatório cônico de 12 pés de profundidade esta cheio de um líquido que pesa 80 libras por pé cúbico. O bordo do reservatório é um círculo de 8 pés de diâmetro. Calcular o trabalho necessário para alçar o líquido ao bordo do reservatório.

Resp. 15 360 π libras por pé.

8. Um tanque é hemisférico na parte inferior e cilíndrico na parte superior. A altura do cilindro é 10 pés, os diâmetros tanto do cilindro como da esfera medem 24 pés. Achar o trabalho realizado para tirar a água do tanque, sabendo que o nível superior desta esta a dois pés do bordo do tanque.

9. Um balde de peso M é levantado do fundo de um poço de h pés de profundidade. O peso da corda presa ao balde e com a qual se o levanta pesa m libras por pé. Achar o trabalho realizado.

10. Uma quantidade de ar com volume inicial de 200 pés cúbicos e sob a pressão de 15 libras por polegada quadrada é comprimida até o limite de 80 libras por polegada quadrada. Determinar o volume no limite e o trabalho realizado nesta operação se vale a lei isotérmica, isto é, $pv =$ constante.

Resp. 37,5 pés cub.; 723 000 libras por pé.

11. Determine o volume final e o trabalho realizado no problema anterior se subsiste a lei adiabática, isto é, $pv^n = C$, sendo $n = 1{,}4$.

Resp. 60 pés cub.; 648 000 libras por pé.

12. O ar à pressão de 15 libras por polegada quadrada é comprimido de 200 pés cúbicos até 50 pés cúbicos. Determinar a pressão final e o trabalho realizado se a lei é $pv = C$.

Resp. 60 libras por pol. quad.; 599 000 libras por pé.

13. Resolva o problema 12 se a lei é $pv^n = C$, sendo $n = 1,4$.

Resp. 104,5 libras por pol. quad.; 801 000 libras por pé.

14. Uma quantidade de gás com volume inicial de 16 pés cúbicos e pressão de 60 libras por polegada quadrada se expande até a pressão de 30 libras por polegada quadrada. Determine o volume final e o trabalho realizado pelo gás se a lei é $pv = C$.

Resp. 32 pés cub.; 95 800 libras por pé.

15. Resolva o problema 14 se a lei é $pv^n = C$, tomando $n = 1,2$.

Resp. 28,5 pés cúbicos; 75 600 libras por pé.

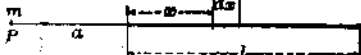
16. Uma quantidade de ar com volume inicial de 200 pés cúbicos e pressão de 15 libras por polegada quadrada é comprimida até 30 pés cúbicos. Determinar a pressão final e o trabalho realizado se a lei é $pv = C$.

17. Resolver o problema 16 se a lei é $pv^n = C$, sendo $n = 1,4$.

18. Um gás expande-se de uma pressão inicial de 80 libras por polegada quadrada e volume de 2,5 pés cúbicos ao volume de 9 pés cúbicos. Achar o trabalho realizado se a lei é $pv^n = C$, sendo $n = 1,0646$.

19. Resolva o problema 18 se $n = 1,131$.

20. Determine a atração exercida por uma vara reta, fina, homogênea, de espessura uniforme, de comprimento l e de massa M sobre um ponto material P de massa m situado a uma distância a de uma das extremidades da vara e sobre a reta de direção da vara.

Solução. Suponhamos a vara divida em porções iguais, cada uma com comprimento dx (elemento de comprimento).

Sendo $\frac{M}{l}$ = massa de uma unidade de comprimento da vara,

temos $\frac{M}{l}dx$ = massa de cada elemento de comprimento.

A lei de Newton para medir a atração entre duas massas é

$$\text{Fôrça de atração} = \frac{\text{produto das massas}}{(\text{distância entre as massas})^2};$$

portanto a força de atração entre a partícula em P e o elemento de vara é

$$\frac{\frac{M}{l}\,m\,dx}{(x+a)^2},$$

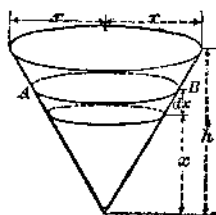
a qual é, pois, *um elemento da força de atração pedida.* Sendo a atração entre a partícula em P e a vara o limite da soma de todos os tais elementos compreendidos entre $x = 0$ e $x = l$, temos

$$\text{Força de atração} = \int_0^l \frac{\frac{M}{l}\,m\,dx}{(x+a)^2} = \frac{Mm}{l}\int_0^l \frac{dx}{(x+a)^2} = +\frac{Mm}{a\,(a+l)}. \ \textit{Resp.}$$

21. Determine a atração no exemplo acima se P esta sobre a mediatriz da vara e a uma distância a dela.

$$\textit{Resp.}\ \frac{2\,mM}{a\sqrt{4\,a^2+l^2}}.$$

22. Um vaso tem a forma de um cone circular reto e esta cheio de água. Sendo h a altura do vaso e r o raio do bordo, em que tempo ele se esvazia através de um orifício de área a feito no vértice?

SOLUÇÃO. Despresando toda resistência de atrito, sabe-se que a velocidade de escoamento através de um orifício é a mesma que a adquirida por um corpo caindo livremente de uma altura igual à profundidade da água. Portanto, se x indica a profundidade da água,

$$v = \sqrt{2\,gx}.$$

Indiquemos por dQ o volume de água que se escoa no tempo dt e por dx a correspondente queda de nível da água. O volume de água escoado através do orifício numa unidade de tempo é

$$a\sqrt{2\,gx},$$

pois é a medida de um cilindro reto cuja base tem área a e cuja altura é $v\,(=\sqrt{2\,gx})$. Portanto, no tempo dt

$$(1) \qquad dQ = a\sqrt{2\,gx}\,dt.$$

Indicando por S a área da superfície da água quando a profundidade é x, temos, pela geometria,

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{x^2}{h^2}, \quad \text{ou} \quad S = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}$$

Mas o volume de água escoada no tempo dt pode também ser considerado como o volume de um cilindro AB cuja base tem área S e cuja altura é dx; logo,

$$(2) \qquad dQ = S\,dx = \frac{\pi r^2 x^2\,dx}{h^2}.$$

Igualando (1) e (2) e tirando dt,

$$dt = \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2 \sqrt{2\,xg}}.$$

Portanto, $$t = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2 dx}{ah^2 \sqrt{2\,gx}} = \frac{2\,\pi r^2 \sqrt{h}}{5\,a\sqrt{2\,g}} \qquad \textit{Resp.}$$

181. — Valor médio de uma função. Valor médio de um grupo de n números $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é a média aritmética desses números, ou seja, é o número

$$(1) \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

O valor médio de uma função

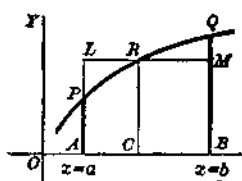
$$(2) \qquad y = \phi(x),$$

contínua num intervalo $[a, b]$, define-se do modo seguinte: divide-se $[a, b]$ num número qualquer n de partes iguais e considera-se o valor médio das ordenadas da função nos pontos de divisão. Indicando-se com y' este valor médio, com $y_1, y_2, \ldots, y_n$ as ordenadas nos pontos de divisão e com Δx o comprimento de cada subintervalo, temos

$$(3) \qquad y' = \frac{y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \ldots + y_n\,\Delta x}{b - a},$$

pois $n\,\Delta x = b - a$. Pois bem, o limite de y' quando $n \to \infty$ chama-se *valor médio de* $\phi(x)$ *no intervalo* $[a, b]$. Pelo teorema fundamental, temos portanto

$$(H) \qquad \left.\begin{array}{c}\text{Valor médio de}\\ \phi(x) \text{ de } x = a \text{ a } x = b\end{array}\right\} = \frac{\int_a^b \phi(x)\,dx}{b - a}$$

Desenhemos o gráfico de $y = \phi(x)$. O valor médio de $\phi(x)$ em $[a, b]$ é uma ordenada da curva (CR da figura) tal que a área do retângulo $ABML$ seja igual à área $ABQRP$ sob a curva.

A fórmula (H) também se escreve (onde y indica a função)

$$(I) \qquad \text{Valor médio} = \bar{y} = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a}$$

Exemplo ilustrativo. Dado o círculo

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

achar o valor médio das ordenadas do primeiro quadrante

(*a*) quando y é expresso como função da abscissa x;

(*b*) quando y é expresso como função do ângulo $\theta = MOP$.

SOLUÇÃO. (*a*) Como $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, o numerador em (I) é

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi r^2. \quad \text{Logo } \bar{y} = \tfrac{1}{4}\pi r = 0{,}785\,r. \quad \textit{Resp.}$$

(*b*) Como $y = r \operatorname{sen} \theta$, e os limites são $\theta = 0 = a$, $\theta = \frac{1}{2}\pi = b$, o numerador em (I) é

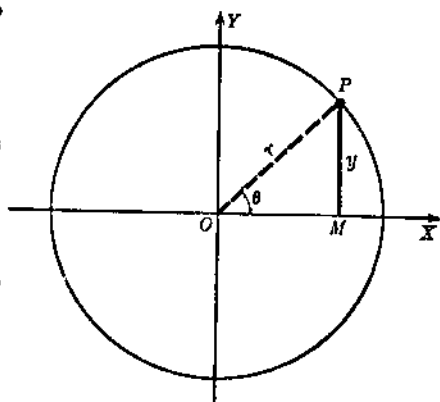
$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r \operatorname{sen} \theta d\theta = r. \quad \text{Como } b - a = \tfrac{1}{2}\pi, \text{ temos } \bar{y} = \frac{2r}{\pi} = 0{,}637\,r. \quad \textit{Resp.}$$

Como se vê, temos valores diferentes para y. O valor médio depende, pois da variável independente em relação à qual se acha o valor médio.

Em virtude do que se viu no exemplo acima, isto é, de que o valor médio de uma função depende da variável independente escolhida, escreveremos a fórmula (I) sob a forma

$$(5) \qquad \bar{y}_x = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a},$$

para indicar explìcitamente que a variável em relação à qual se calcula o valor médio de y é x.

Assim, no exemplo ilustrativo, temos $\bar{y}_x = 0{,}785\,r$, $\bar{y}_\theta = 0{,}637\,r$.

PROBLEMAS

1. Achar o valor médio de $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 10$.
Resp. $33\frac{1}{3}$.

2. Achar o valor médio de $y^2 = 4x$ desde $x = 0$ a $x = 4$.
Resp. $2\frac{2}{3}$.

3. Achar o valor médio das abscissas de $y^2 = 4x$ de $(0, 0)$ a $(4, 4)$, quando distribuídas uniformemente ao longo de OY. *Resp.* $1\frac{1}{3}$.

4. Achar o valor médio de $\operatorname{sen} x$ de $x=0$ a $x=\pi$. *Resp.* $\frac{2}{\pi}$.

5. Achar o valor médio de $\operatorname{sen}^2 x$ entre $x = 0$ e $x = \pi$. (Este valor médio é usado frequentemente na teoria das correntes alternadas). *Resp.* $\frac{1}{2}$.

6. Se uma partícula é lançada, num vácuo, para baixo com uma velocidade inicial de v_0 pés por segundo, a velocidade depois de t segundos é

$$v = v_0 + gt. \tag{1}$$

A velocidade depois de cair s pés é

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gs} \qquad (g = 32) \tag{2}$$

Achar o valor médio de v

(a) durante os 5 primeiros segundos, partindo do repouso;
Resp. 80 pés por segundo.

(b) durante os 5 primeiros segundos, partindo com uma velocidade inicial de 36 pés por segundo;
Resp. 116 pés por segundo.

c) durante os $2\frac{1}{2}$ primeiros segundos, partindo do repouso;
Resp. 40 pés por segundo.

(d) durante os primeiros 100 pés, partindo do repouso;
Resp. $53\frac{1}{3}$ pés por segundo.

(e) durante os primeiros 100 pés, partindo com uma velocidade inicial de 60 pés por segundo. *Resp.* $81\frac{2}{3}$ pés por segundo.

7. No movimento harmônico simples $s = a \cos nt$, achar o valor médio da velocidade durante um quarto de um período (a) em relação ao tempo, (b) em relação à distância.

8. Mostrar que num movimento harmônico simples a energia cinética média em relação ao tempo, em cada múltiplo de um quarto de período é a metade da energia cinética máxima.

9. Toma-se um ponto sobre um segmento de reta de comprimento a. Prove que (a) a área média do retângulo cujos lados são os dois segmentos é $\frac{1}{6}a^2$; (b) o valor médio da soma dos quadrados construídos sôbre os dois segmentos é $\frac{2}{3}a^2$.

10. Se um ponto move-se com aceleração constante, a média em relação ao tempo do quadrado da velocidade é $\frac{1}{3}(v_0^2+v_0v_1+v_1^2)$, onde v_0 é a velocidade inicial e v_1 a final.

11. Mostre que o percurso horizontal médio de uma partícula lançada com uma dada velocidade e um ângulo de elevação arbitrário é 0,6366 do percurso horizontal máximo.

Sugestão. Tome $\alpha = 0$ na fórmula do Problema 35, § 80.

As fórmulas

$$(6) \qquad \bar{x}_s = \frac{\displaystyle\int x\,ds}{\displaystyle\int ds}, \quad \bar{y}_s = \frac{\displaystyle\int y\,ds}{\displaystyle\int ds},$$

onde (x, y) é um ponto qualquer da curva e ds o elemento de arco, definem o centróide do arco. Elas dão respectivamente os valores médios das abscissas e das ordenadas dos pontos da curva quando distribuídos uniformemente ao longo dela. (Confronte § 177).

12. Mostre que a área lateral da superfície gerada pela revolução de um arco de curva plana em torno de uma reta do seu plano não cortando o arco é igual ao comprimento do arco vezes a circunferência do círculo descrito pelo centróide do arco (6). (Teorema de Pappus, confronte § 250).

Sugestão. Use (L) § 164.

13. Ache o centróide do arco da parábola $y^2 = 4x$ de (0,0) a (4, 4). *Resp.* $\bar{x} = 1{,}64$, $\bar{y} = 2{,}29$.

14. Achar o centróide de um arco do círculo $\rho = a$ entre $-\theta$ e θ.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{a \operatorname{sen} \theta}{\theta}$.

15. Achar o centróide da cardióide $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

Resp. $\bar{x} = \frac{4}{5}a$, $\bar{y} = 0$.

16. Achar, pelo teorema de Pappus, o centróide do arco do círculo $x^2 + y^2 = r^2$ que está no primeiro quadrante.

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$.

17. Achar, pelo teorema de Pappus, a superfície do toro gerada pela revolução do círculo $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ $(b > a)$ em tôrno do eixo dos yy.

18. Um retângulo gira em torno de um eixo que esta no seu plano e é perpendicular a uma diagonal num dos extremos desta. Achar a área da superfície gerada.

OUTROS PROBLEMAS

1. Uma área é limitada pelas linhas $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$ e $x = 3$. Achar o centróide. *Resp.* $\bar{x} = \frac{76}{37}$, $\bar{y} = \frac{281}{185}$.

2. A abscissa do centróide da área limitada pela curva $2y = x^2$ e uma certa linha passando pela origem é 1. Achar a ordenada do centróide. *Resp.* $\frac{4}{5}$.

3. Achar o centróide da área limitada por $y = x^n$ $(n > 0)$, o eixo dos xx e $x = 1$. Estudar o lugar geométrico do centróide quando n varia.

Resp. $\bar{x} = \dfrac{n+1}{n+2}$, $\bar{y} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)}$.

4. Achar a equação do lugar geométrico do centróide da área limitada pelo eixo dos xx e a parábola $y = cx - x^2$ quando c varia. *Resp.* $5y = 2x^2$.

5. Dadas a parábola $x^2 = 2py$ e uma oblíqua qualquer $y = mx + b$ encontrando a parábola nos pontos A e B, pelo ponto médio C de AB traça-se uma paralela ao eixo da curva encontrando a parábola em D. Prove que (a) a tangente à parábola em D é paralela à reta AB; (b) o centróide da área $ACBD$ esta sobre a reta CD.

6. Seja P um ponto da parábola $y = x^2$ e seja C o centróide da área limitada pela parábola, o eixo dos xx e a vertical por P. Achar a posição de P para que o ângulo OPC seja máximo.

Resp. Ordenada $= \frac{5}{14}$.

7. Uma cisterna tem a forma de um sólido gerado pela revolução, em tôrno do seu eixo vertical, de um segmento parabólico cuja corda tem 8 pés de comprimento e é perpendicular ao eixo a

uma distância de 8 pés do vértice. A cisterna está cheia de água pesando 62,5 libras por pé cúbico. Ache o trabalho necessário para alçar ao tôpo da cisterna a metade da água que ela contém,

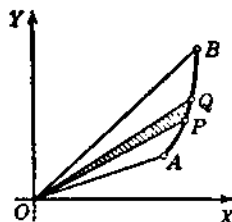
$$Resp.\quad 16\,000\,(\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{3} = 6\,937 \text{ libras por pé.}$$

8. Uma cisterna hemisférica de raio r está cheia de água. Dois homens A e B devem alçar a água dela, fazendo cada um, metade do trabalho. Se A começa primeiro, qual será a profundidade d da água quando êle terminou a parte que lhe toca no trabalho?

$$Resp.\quad \frac{d}{r} = 1 - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 0{,}459$$

9. Um tanque tem a forma de um cone circular. O fundo do tanque é o vértice do cone. Ele esta cheio de água a ser alçada por dois homens, cada um fazendo metade do trabalho. Ao terminar sua parte o primeiro homem, a razão entre a profundidade da água e a profundidade inicial era igual a z. Mostre que z é determinada pela equação $6z^4 - 8z^3 + 1 = 0$. Calcule o valor de z com duas decimais. *Resp.* 0,61.

10. Um poço tem 100 pés de profundidade. Um balde com capacidade de 2 pés cúbicos e pesando 3 libras é cheio de água no fundo do poço e depois alçado até o bordo à razão de 5 pés por segundo. Desprezando o peso da corda que serve para alçar o balde, achar o trabalho realizado na operação, sabendo-se que cai do balde em cada segundo 0,01 pés cúbicos de água .(Um pé cúbico de água pesa 62,4 libras). *Resp.* 12 156 libras por pé.

11. A área OAB (ver figura) é dividida em elementos como OPQ por retas tiradas de O. Mostre que a área A e os momentos de área M_y e M_x são dados por

$$A = \tfrac{1}{2}\int (xy' - y)\,dx,\quad M_x = \tfrac{1}{3}\int y\,(xy' - y)\,dx,$$
$$M_y = \tfrac{1}{3}\int x\,(xy' - y)\,dx.$$

(O centróide de um triângulo esta sobre cada mediana a dois terços da distância do vértice ao lado oposto).

12. Achar o centróide do setor hiperbólico limitado pela hipérbole equilátera $x = a \sec\theta$, $y = a \operatorname{tg}\theta$ e os raios da origem aos pontos $(a, 0)$ e (x, y).

$$Resp.\quad \bar{x} = \frac{2}{3}a\frac{\operatorname{tg}\theta}{\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)},\quad \bar{y} = \frac{2}{3}a\frac{\sec\theta - 1}{\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}$$

Capítulo XIX

SÉRIES

182. — Definições. *Uma sucessão* é um conjunto de números, bem ordenados por uma regra fixa.

Por exemplo, $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

e $$1, -x, \frac{x^2}{2}, -\frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, -\frac{x^5}{5}, \ldots$$

são sucessões.

Série é a sucessão formada pelas somas sucessivas dos termos de uma sucessão. O símbolo indicando a soma dos termos de uma sucessão representa a série que provém da sucessão. Assim, das sucessões acima obtemos as séries

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25, + \ldots$$

e $$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \ldots$$

Uma sucessão ou série diz-se *finita* quando tem um número limitado de têrmos. Se o número de termos é ilimitado, a sucessão ou série diz-se *infinita*.

Termo geral ou *n-egésimo termo* de uma sucessão (ou série) é o termo que, segundo a regra fixa, ocupa a ordem n.

Exemplo ilustrativo 1. No primeiro exemplo dado acima, o termo geral, ou n-egésimo termo, é n^2. O primeiro termo é obtido fazendo $n = 1$, o décimo termo fazendo $n = 10$, etc.

Exemplo ilustrativo 2. No segundo exemplo dado acima, o n-egésimo termo, exceto para $n = 1$, é $\frac{(-x)^{n-1}}{n-1}$.

Se uma sucessão é infinita, indica-se este fato por meio de pontinhos, como

$$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$$

Números fatoriais. Uma expressão que aparece frequentemente no estudo das séries é o produto de inteiros sucessivos, começando por 1. Assim, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ é chamado de "cinco fatorial" e é indicado por $\underline{|5}$ ou $5!$

Em geral, $$\underline{|n} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

diz-se "n fatorial". Esta subentendido que n é um inteiro positivo. A expressão $\underline{|n}$ não tem sentido se n não é inteiro positivo.

183. — Série geométrica. Para a série geométrica de n têrmos

$$(1) \qquad S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1},$$

mostra-se em álgebra elementar que

$$(2) \qquad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

sendo a primeira forma geralmente usada se $|r| < 1$ e a segunda se $|r| > 1$.

Se $|r| < 1$, então r^n decresce em valor absoluto quando n cresce

e $$\lim_{n\to\infty} (r^n) = 0 .$$

Pela fórmula (2) vemos portanto que (§ 16)

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} .$$

Logo, se $|r| < 1$, a soma S_n de uma série geométrica tende a um limite quando o número n de termos da série cresce indefinidamente. Diz-se, neste caso, que a série é *convergente.*

Se $|r| > 1$, então r^n tende ao infinito quando n cresce indefinidamente (§ 18) e por isto, pela segunda das fórmulas (2), a soma S_n tende ao infinito. Nêste caso diz-se que a série é *divergente.*

Um caso peculiar se apresenta quando $r = -1$; a série torna-se

$$(4) \qquad a - a + a - a + a - a \ldots .$$

Se n é par, a soma S_n é zero; se n é ímpar, a soma é a. Por isto, quando n cresce indefinidamente, a soma S_n não tende a nenhum limite. Uma tal série diz-se *oscilante.*

Exemplo ilustrativo. Consideremos a série geométrica, com

$$a = 1, \quad r = \tfrac{1}{2},$$

$$(5) \qquad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Achamos, por (2), que

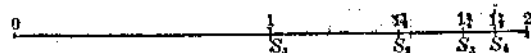
$$S_n = \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Então,

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = 2,$$

resultado que concorda com (3) para $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$.

É interessante examinar (5) geomètricamente. Para isto, marquemos valores sucessivos de S_n sobre uma reta, como na figura.

0 — 1 (S_1) — $1\frac{1}{2}$ (S_2) — $1\frac{3}{4}$ (S_3) — $1\frac{7}{8}$ (S_4) — 2

n	1	2	3	4	etc.
S_n	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{8}$	etc.

Cada ponto assim obtido é ponto médio do segmento compreendido entre o ponto precedente e o ponto 2. Logo, (6) é óbvia.

PROBLEMAS

Em cada uma das seguintes séries (*a*) descubra a lei de formação; (*b*) escreva mais três têrmos; (*c*) ache o *n*-egésimo termo (termo geral).

1. $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ *Resp.* n-egésimo termo $= 2^n$.

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ $\qquad \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}.$

3. $-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\cdots$. *Resp.* $\frac{n-2}{n+1}$.

4. $x+\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$. $\frac{nx^n}{\underline{|n}}$.

5. $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$. $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2^n\underline{|n}}$.

6. $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$. $\frac{(-a)^{n+1}}{2n+1}$.

Escreva os quatro primeiros termos da série cujo n-egésimo termo é o dado abaixo.

7. $\frac{2^{n-1}}{\sqrt{n}}$. *Resp.* $1+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{8}{\sqrt{4}}+\cdots$.

8. $\frac{n+2}{2n-1}$. $3+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+\frac{6}{7}+\cdots$.

9. $\frac{n}{3^{n-1}}$. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{9}+\frac{4}{27}+\cdots$.

10. $\frac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}$. $1+\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{3}}+\frac{x^3}{\sqrt{4}}+\cdots$.

11. $\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}}$. $x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots$.

12. $\frac{(x-a)^{n-1}}{\underline{|n}}$. 13. $\frac{(y+n)^{2n-1}}{2^n\underline{|n}}$. 14. $\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n+2}}$. 15. $\frac{3^{n-1}\theta^n}{2^n\underline{|n-1}}$.

184. — Séries convergentes e divergentes.

A soma

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

é uma função de n. Fazendo o número de termos ($= n$) crescer indefinidamente, dois casos podem-se dar.

Caso I. S_n tende a um limite, digamos u, isto é,

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = u.$$

Neste caso diz-se que a série é *convergente* e que *converge para valor* u, ou ainda que *tem o valor* u

CASO II. S_n não tende a um limite finito. Neste caso, a série diz-se *não convergente*

Exemplos de séries não convergentes são

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots ,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots .$$

Como se disse acima, para uma série convergente o valor da série é o número u (algumas vezes chamado *soma* da série) definido por (1). Uma série não convergente não tem soma.

Nas aplicações das séries, as convergentes são de muito maior importância. Por isto, é essencial ter meios para examinar uma série no que concerne à convergência ou não.

185. — Teoremas gerais. Antes de dar métodos especiais para o exame de uma série no que concerne à convergência, chamamos a atenção para os seguintes teoremas, cujas demonstrações são omitidas.

Teorema I. *Se S_n é uma variável que cresce sempre quando n cresce, mas não é nunca maior que um número fixo A, então quando n tende ao infinito, S_n tende a um limite u que não é maior que A.*

A figura ilustra a afirmação. Os pontos determinados pelos valores S_1, S_2, S_3, etc., aproximam-se do ponto u, sendo:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = u ,$$

S1 S2 S3 u A

e u é não maior que A.

Exemplo ilustrativo. Mostre que a série

$$(1) \qquad 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} + \ldots$$

é convergente.

SOLUÇÃO. Desprezemos o primeiro têrmo e escrevamos

$$(2) \qquad S_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}.$$

Consideremos a variável s_n definida por

$$(3) \qquad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

na qual substituimos todos os inteiros dos denominadores de (2), exceto 1, por 2. Òbviamente $S_n < s_n$. Em (3) temos uma série geométrica com $r = \frac{1}{2}$ e $s_n < 2$ qualquer que seja n (v. § 183). Logo S_n cresce sempre quando n cresce, mas é sempre menor que 2. Portanto S_n tende a um limite quando n cresce indefinidamente e este limite é menor que 2. Logo (1) é convergente e seu valor é menor que 3.

Veremos mais tarde que o valor de (1) é a constante $e = 2{,}71828 \ldots$, a base dos logaritmos naturais (§ 61).

Teorema II *Se S_n é uma variável que descrece sempre quando n cresce, mas não é nunca menor que um número fixo B, então quando n tende ao infinito, S_n tende a um limite que não é menor que B.*

Consideremos uma série convergente

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + ,$$

para a qual $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = u$.

Marquemos sobre uma reta os pontos determinados pelos valores S_1, S_2, S_3, etc. Quando n cresce, estes pontos aproximam-se do ponto determinado por u, acumulando-se em torno dele. Resulta, pois, evidentemente,

$$(A) \qquad \lim_{n \to \infty} u_n = 0 ,$$

isto é, numa série convergente, os termos da série se aproximam de zero no limite.

Por outro lado, se o termo geral (ou n-egésimo termo) de uma série não tende a zero quando n tende ao infinito, vê-se logo que a série não é convergente. Assim, (A) é condição necessária para uma série ser convergente; contudo (A) não é suficiente, isto é, mesmo que o termo geral tenda a zero não podemos garantir que a série seja convergente. Por exemplo, no caso da série harmônica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots ,$$

temos $$\lim_{n \to \infty} (u_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 ,$$

isto é, a condição (A) é satisfeita; contudo, mostraremos no § 186 que esta série é divergente.

Vamos agora estabelecer regras mais fáceis, em geral, que os teoremas acima, de serem aplicadas no exame da convergência ou não de uma série.

186. — Regra do confronto. Em muitos casos é fácil determinar se uma série é ou não convergente confrontando-a termo a têrmo com outra série que sabemos ser convergente ou divergente.

CONFRONTO PARA A CONVERGÊNCIA. SEJA

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

uma série de termos positivos que se quer examinar no que concerne à convergência. Se se conhece uma série convergente de termos positivos

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

cujos termos são sempre não menores que os correspondentes termos da série (1) que estamos examinando, então (1) é convergente e o seu valor não excede o da série (2).

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\quad s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n,$

e $\quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$

e suponhamos que $\quad \lim\limits_{n \to \infty} S_n = A.$

Então, como $\quad S_n < A \quad \text{e} \quad s_n \leq S_n,$

resulta $s_n < A$. Logo, pelo Teorema I, § 185, s_n tende a um limite que é não maior do que A, isto é, a série (1) é convergente e seu valor é não maior do que A.

Exemplo ilustrativo 1. Examinar o comportamento da série

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots .$$

SOLUÇÃO. Confrontemos com a série geométrica

$$(4) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots ,$$

que sabemos ser convergente. Os termos de (4) não são menores que os correspondentes termos de (3); logo (3) é convergente.

Seguindo uma linha de raciocínio semelhante ao aplicado a (1) e (2), podemos provar a

REGRA PARA A DIVERGÊNCIA. Seja

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots \tag{5}$$

uma série de termos positivos que são nunca menores que os correspondentes têrmos de uma série de termos positivos, precisamente,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots , \tag{6}$$

que sabemos ser divergente. Então, (5) é divergente.

Exemplo ilustrativo 2. Mostrar que a **série harmônica**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \tag{7}$$

é divergente.

SOLUÇÃO. Ponhamos a (7) sob a forma abaixo e a comparemos com a série (9). Os colchetes são introduzidos para ajudar o confronto.

$$1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \\ + \left[\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right] + \dots . \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \\ + \left[\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right] + \dots \tag{9}$$

Observamos o seguinte: os termos de (8) são não menores que os os correspondentes termos de (9). Mas (9) é divergente, pois a soma dos termos em cada colchete é $\frac{1}{2}$ e por isto S_n cresce indefinidamente quando n cresce indefinidamente. Logo, (8) é divergente.

Exemplo ilustrativo 3. Examinar o comportamento da série

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

SOLUÇÃO. Esta série é divergente pois os seus termos são maiores que termos correspondentes da série harmônica (7), que é divergente

A série "p"

$$(10) \qquad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

é útil na aplicação da regra do confronto.

TEOREMA. *A série "p" é convergente quando $p > 1$ e é divergente em caso contrário.*

DEMONSTRAÇÃO. Escrevamos (10) como abaixo e a confrontemos com a série escrita abaixo dela. Os colchetes são usados para ajudar no confronto.

$$(11) \qquad 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right] + \\ + \left[\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{15^p}\right] + \cdots .$$

$$(12) \qquad 1 + \left[\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right] + \left[\frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right] + \\ + \left[\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p}\right] + \cdots .$$

Para $p > 1$, os termos de (12) não são menores que os correspondentes termos de (11). Mas, em (12), as somas de dentro dos colchetes são

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}\,; \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{4}{4^p} = \frac{2^2}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2(p-1)}}\,;$$

$$\frac{1}{8^p} + \cdots + \frac{1}{8^p} = \frac{8}{8^p} = \frac{2^3}{2^{3p}} = \frac{1}{2^{3(p-1)}}\,,$$

e assim por diante. Logo, para examinar (12) no que concerne à convergência, podemos considerar a série

$$(13) \qquad 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3 + \cdots .$$

Quando $p > 1$, a série (13) é uma série geométrica de razão menor que 1 e portanto convergente. Logo, (10) é também convergente. Quando $p = 1$, a série (10) é a série harmônica e portanto divergente. Quando $p < 1$, os têrmos da série (10) são, a partir do primeiro, maiores que os correspondentes da série harmônica e portanto (10) é divergente neste caso.

Exempo Ilustrativo 4. Mostre que a série

$$(14)\quad \frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots$$

é convergente.

Solução. Em (14), $u_n < \frac{2n}{n^3}$, ou $\frac{1}{2}u_n < \frac{1}{n^2}$; logo, $\frac{1}{2}u_n$ é menor que o termo geral da série "p" quando $p = 2$. Portanto, a série em que cada termo é a metade do termo correspondente de (14) é convergente e portanto (14) é também convergente.

PROBLEMAS

Examine o comportamento de cada uma das seguintes séries

1. $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\cdots.$ *Resp.* Convergente.

2. $\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots.$ Divergente.

3. $\frac{2}{1}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\frac{2}{n^n}+\cdots.$ Convergente

4. $\frac{3}{1\cdot2}+\frac{3}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\cdots\frac{3}{n(n+1)}+\cdots.$ Convergente

5. $\frac{4}{2\cdot3}+\frac{8}{3\cdot4}+\frac{12}{4\cdot5}+$
$+\cdots\frac{4n}{(n+1)(n+2)}+\cdots.$ Divergente

6. $\frac{3}{2\cdot3\cdot4}+\frac{5}{3\cdot4\cdot5}+\frac{7}{4\cdot5\cdot6}+$
$+\cdots\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots.$ Convergente

7. $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots\frac{1}{5n}+\cdots$ Divergente.

8. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\frac{1}{n+3}+\cdots$. *Divergente*

9. $\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{28}+\cdots\frac{1}{3^n+1}+\cdots$. *Convergente*

10. $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$. Divergente

11. $\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\cdots\frac{1}{n^2+3}+\cdots$. Convergente

12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{26}+\cdots\frac{1}{3^n-1}+\cdots$. Convergente

13. $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 4\cdot 5}+\cdots$

$+\cdots\frac{n}{2(n+1)(n+2)}+\cdots$. Divergente

14. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\cdots$. Convergente

15. $\frac{2}{9}+\frac{2^2}{28}+\frac{2^3}{65}+\frac{2^4}{126}+\cdots$. 17. $\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\cdots$

16. $\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\frac{2}{12}+\cdots$. 18. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\cdots$.

187. — Regra de D' Alembert. Na série geométrica.

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+ar^{n+1}+\cdots,$$

a razão entre dois termos consecutivos ar^{n+1} e ar^n é a constante r.

Sabemos que a série é convergente quando $|r|<1$ e divergente quando $|r|\geq 1$. Pois bem, uma regra parecida com esta e válida para qualquer série será explicada a seguir.

Teorema. Seja

(1) $$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots$$

uma série de termos positivos. Consideremos os termos consecutivos gerais u_n e u_{n+1} e formemos a razão

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Procuremos o limite desta razão quando n tende ao infinito. Se

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

então:

I. *Quando $\rho < 1$, a série é convergente.*

II. *Quando $\rho > 1$, a série é divergente.*

III. *Quando $\rho = 1$, nada se pode dizer.*

DEMONSTRAÇÃO. I. Quando $\rho < 1$. Pela definição de limite (§ 14), podemos escolher n de tal forma grande, digamos $n = m$, que quando $n \geq m$ a razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ difira de ρ de tão pouco quanto se queira e, portanto, seja menor que uma fração própria r; temos pois,

$$u_{m+1} < u_m r\ ; \quad u_{m+2} < u_{m+1} r < u_m r^2\ ; \quad u_{m+3} < u_m r^3$$

e assim sucessivamente. Consequentemente, depois do termo u_m, cada termo da série (1) é menor que o correspondente termo da série geométrica

$$u_m r + u_m r^2 + u_m r^3 + \dots \tag{2}$$

Mas, como $r < 1$, a série (2), e, portanto, também a série (1), é convergente (§186).

II. Quando $\rho > 1$ (ou $\rho = \infty$). Seguindo a mesma linha de raciocínio que a anterior, pode-se mostrar que a série (1) é divergente.

III. Quando $\rho = 1$, a série pode ser convergente ou divergente, isto é, neste caso a regra da razão falha. Realmente, consideremos a série "p".

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p} + \cdots.$$

A razão $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ é $\left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p$;

portanto $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = (1)^p = 1\ (= \rho).$

Logo, $\rho = 1$ qualquer que seja o valor de p. Mas, no § 186 mostramos que

quando $p > 1$, a série converge, e

quand $p \leq 1$, a série diverge.

Vê-se assim que ρ pode ser 1 tanto para séries convergentes como para divergentes. Há outros meios a se aplicar nos casos em que $\rho = 1$, mas o estudo dêles está além do objeto dêste livro.

Não basta para a convergência que a razão entre um têrmo u_{n+1} e o anterior u_n seja menor que 1 para todos os valores de n; requer-se que o *limite desta razão seja menor que* 1. Por exemplo, na série harmônica, a razão $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ é sempre menor que 1, o *limite da razão*, contudo, é igual a 1.

O abandono de um grupo de têrmos entre os primeiros de uma série altera o *valor* dela mas não a *existência* do limite.

188. — Série alternada. Êste é o nome dado a uma série cujos têrmos são alternadamente positivos e negativos.

Teorema. *Se* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$.

é uma série alternada na qual cada têrmo é menor, em valor absoluto, que o precedente e se

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,,$$

então a série é convergente.

DEMONSTRAÇÃO. Quando n é par, S_n pode ser escrito de duas maneiras

$$(1) \qquad S_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{n-1} - u_n),$$

$$(2) \qquad S_n = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n\,.$$

Cada expressão entre parêntesis é positiva; logo, quando n cresce tomando apenas valores pares, (1) mostra que S_n cresce e (2) que S_n é sempre menor que u_1. Portanto, pelo teorema 1. § 185, S_n tende a um limite l. Mas S_{n+1} também tende a êste limite porque $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ e $\lim u_{n+1} = 0$. Logo, quando n cresce tomando

todos os valores pares ou ímpares, $S_n \to l$ e a série é, pois, convergente.

Exemplo ilustrativo. Examinar o comportamento da série alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Solução. Cada termo é menor, em valor absoluto, que o precedente e $u_n = 1/n$ tende a zero quando $n \to \infty$; logo, a série é convergente.

Uma consequência importante do teorema acima é a seguinte:

O erro que se comete desprezando os termos que seguem u_n não excede, em valor absoluto, o valor absoluto do termo u_{n+1}.

Assim, a soma de 10 termos no exemplo acima é 0,646 e o valor da série difere deste valor de menos que um onze avos.

189. — Convergência absoluta. Uma série diz-se *absolutamente* ou *incondicionalmente* convergente quando a série formada com os valores absolutos dos termos da dada série for convergente. Séries convergentes mas não absolutamente convergentes dizem-se *condicionalmente convergentes.*

Por exemplo, a série $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \cdots$

é absolutamente convergente pois a série (3), § 186, é convergente. A série alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

é condicionalmente convergente, pois a série harmônica é divergente.

Uma série com alguns termos positivos e alguns negativos é convergente se a série formada com os valores absolutos dos termos for convergente.

A demonstração deste teorema é omitida.

190. — Sumário. Admitindo que a regra de D'Alembert, § 187, subsiste sem fazer restrições sobre os sinais dos termos, podemos resumir nossos resultados nas seguintes

Diretrizes gerais para o exame do comportamento de uma série

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots.$$

Se se trata de uma série alternada cujos têrmos não crescem em valor absoluto e são tais que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\,,$$

então a série é convergente.

Se a série não está nas condições acima, formamos a razão $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *e a seguir calculamos o limite abaixo:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \rho.$$

I. *Quando* $|\rho| < 1$, *a série é absolutamente convergente.*

II. *Quando* $|\rho| > 1$, *a série é divergente.*

III. *Quando* $|\rho| = 1$, *nada se pode dizer. Confrontamos, então, a série com alguma que sabemos ser convergente, como*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\,; \quad (r < 1) \ (\textit{série geométrica})$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots\,; \ (p > 1) \quad (\textit{série "p"})$$

ou então com alguma que sabemos ser divergente, como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\,; \qquad (\textit{série harmônica})$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots\,; \quad (p < 1) \ (\textit{série "p"}).$$

Exemplo ilustrativo 1. Examinar o comportamento da série

$$1 + \frac{1}{\underline{|1}} + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \cdots.$$

SOLUÇÃO. Aqui $\qquad u_n = \dfrac{1}{\underline{|n-1}}, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{\underline{|n}}\,.$

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n}} = \frac{1}{n}\,.$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,,$$

e a série é convergente.

Exemplo ilustrativo 2. Examinar o comportamento da série

$$\frac{\underline{|1}}{10} + \frac{\underline{|2}}{10^2} + \frac{\underline{|3}}{10^3} + \cdots .$$

Solução. Aqui $\qquad u_n = \frac{\underline{|n}}{10^n},\quad u_n + 1 = \frac{\underline{|n+1}}{10^{n+1}}.$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\underline{|n+1}}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{\underline{|n}} = \frac{n+1}{10}.$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{10} = \infty ,$$

e a série é divergente.

Exemplo ilustrativo 3. Examinar o comportamento da série

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots .$$

Solução. Aqui $\quad u_n = \frac{1}{(2n-1)\,2n}, \qquad u_n + 1 = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.$

$$\frac{u_n + 1}{u_n} = \frac{(2n-1)\,2n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4n^2 - 2n}{4n^2 + 6n + 2}.$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{4n^2 - 2n}{4n^2 + 6n + 2} = 1 ,$$

pela regra do § 18. Logo, a regra de D'Alembert falha.

Mas, confrontando a dada série com a série "p", quando $p = 2$, precisamente

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots ,$$

vemos que ela é convergente, pois seus termos são menores que os correspondentes da série "p", a qual vimos que é convergente.

EXERCÍCIOS

Examine o comportamento de cada uma das seguintes séries

1. $\frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots .$

Resp. Convergente.

2. $\frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{6}{2^4} + \cdots .$ Convergente.

3. $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{3^3}{3\cdot 2^3}+\frac{3^4}{4\cdot 2^4}+\cdots.$ *Resp.* Divergente

4. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots\frac{\underline{|n}}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}+\cdots.$ Convergente.

5. $\frac{1}{1}+\frac{1.3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}\cdots.$ Convergente.

6. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots.$ Convergente

7. $\frac{5}{1}+\frac{5^2}{\underline{|2}}+\frac{5^3}{\underline{|3}}+\frac{5^4}{\underline{|4}}+\cdots.$ Convergente.

8. $\frac{1}{9}+\frac{\underline{|2}}{9^2}+\frac{\underline{|3}}{9^3}+\frac{\underline{|4}}{9^4}+\cdots.$ Divergente

9. $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{7}{3^4}+\cdots.$ 11. $\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}+\frac{1}{6\cdot 3^3}+\frac{1}{7\cdot 3^4}+\cdots.$

10. $1+\frac{2\underline{|2}}{5}+\frac{2^2\underline{|3}}{10}+\frac{2^3\underline{|4}}{17}+\cdots.$ 12. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{5}{5^3}+\frac{6}{5^4}+\cdots.$

11. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}+\cdots.$

191. — Séries de potências. *Série de potências de uma variável, digamos x,* é uma série do tipo

$$(1) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

onde a_0, a_1, a_2, ... são números independentes de x. Os expoentes de x são números inteiros positivos e se sucedem em ordem crescente. As séries de potências são de importância primordial no estudo do cálculo.

Uma série de potências em x, pode ser convergente para todos os valores de x, para nenhum valor de x, exceto $x = 0$, ou pode ser convergente para alguns valores de x diferentes de 0 e divergente para outros valores.

Vamos examinar (1) só para o caso em que os coeficientes são tais que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L,$$

onde L é um número determinado. Para ver a razão disto, façamos a razão (§ 187) entre o termo de ordem $n+1$ e o anterior, omitindo o primeiro termo; temos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x .$$

Logo, para todo valor fixo de x,

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x \right) = x \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = xL.$$

Temos dois casos:

I. Se $L = 0$, a série (1) converge para todos os valores de x, pois $\rho = 0$.

II. Se L não é zero, a série converge quando $xL\ (= \rho)$ é menor, em valor absoluto, que 1, isto é, quando x está no intervalo

$$-\frac{1}{|L|} < x < \frac{1}{|L|},$$

e diverge para todo valor de x fora dêste intervalo.

O intervalo em questão chama-se *intervalo de convergência* da série. Nos extremos a série pode convergir ou não, devendo cada um deles ser examinado separadamente. Dada uma série de potências e feita a razão entre o têrmo geral e o anterior, o intervalo de convergência é, pois, determinado pela regra do § 187.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o intervalo de convergência da série

$$x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \ldots . \tag{2}$$

Solução. A razão é nêste caso

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n^2}{(n+1)^2} x . \qquad \text{Ora,} \ \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 ,$$

pelo § 18. Portanto $\rho = -x$ e a série converge quando x é, em valor absoluto, menor que 1 e diverge quando é, em valor absoluto, maior que 1.

Examinemos os pontos extremos. Fazendo $x = -1$ em (2), obtemos

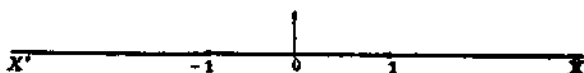
$$-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} - \cdots,$$

a qual é convergente (confronta-se com a série "p" com $p > 1$).

Fazendo $x = 1$ em (2), obtemos

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

que é uma série alternada convergente.

A série do exemplo acima tem $[-1, 1]$ como intervalo de convergência. Este pode também escrever-se $-1 \leq x \leq 1$ ou indicado gràficamente como segue

Exemplo ilustrativo 2. Determinar o intervalo de convergência da série

$$1 + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \cdots + \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} + \frac{x^{2n+2}}{\underline{|2n+2}} + \cdots$$

SOLUÇÃO. Omitindo o primeiro têrmo, temos

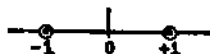
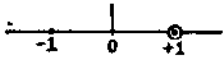
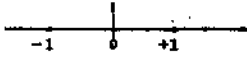
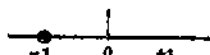
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\underline{|2n}}{\underline{|2n+2}} x^2 = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} x^2$$

Ora, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$. Logo, a série converge para todo valor de x.

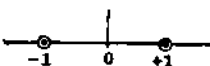
EXERCÍCIOS

Para que valores da variável são convergentes as séries seguintes:	Representações gráficas dos intervalos de convergência*

1. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. *Resp.* $-1 < x < 1$.

-1 0 +1

2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$. *Resp.* $-1 < x \leqq 1$.

3. $x + x^4 + x^9 + x^{16} + \cdots$. *Resp.* $-1 < x < 1$.

-1 0 +1

---

* Os pontos extremos que não estão incluídos nos intervalos de convergência tem círculos usados em torno de si.

4. $x+\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}+\cdots$. *Resp.* $-1 \leqq x < 1$.

5. $1+x+\dfrac{x^2}{\underline{|2}}+\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots$. *Resp.* Todos os valores de x.

6. $1-\dfrac{\theta^2}{\underline{|2}}+\dfrac{\theta^4}{\underline{|4}}-\dfrac{\theta^6}{\underline{|6}}+\cdots$. *Resp.* Todos os valores de θ.

7. $\phi-\dfrac{\phi^3}{\underline{|3}}+\dfrac{\phi^5}{\underline{|5}}-\dfrac{\phi^7}{\underline{|7}}+\cdots$. *Resp.* Todos os valores de ϕ.

8. $x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\dfrac{x^7}{7}+\cdots$.
Resp. $-1 \leqq x \leqq 1$.

9. $x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots$. *Resp.* $-1 < x < 1$.

10. $1-x+\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{x^3}{3^2}+\cdots$. $-1 \leqq x \leqq 1$.

11. $\dfrac{x}{1\cdot 2}-\dfrac{x^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{x^3}{3\cdot 2^3}-\dfrac{x^4}{4\cdot 2^4}+\cdots$. $-2 < x \leqq 2$.

12. $x+\dfrac{2x^2}{\underline{|2}}+\dfrac{3x^3}{\underline{|3}}+\dfrac{4x^4}{\underline{|4}}+\cdots$. Todos os valores.

13. $1+\dfrac{x^2}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1\cdot 3x^4}{2\cdot 4\cdot 2^4}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^6}+\cdots$. $-2 < x < 2$.

14. $\dfrac{ax}{2}+\dfrac{a^2x^2}{5}+\dfrac{a^3x^3}{10}+\cdots+\dfrac{a^nx^n}{n^2+1}+\cdots$. $(a>0)$ $-\dfrac{1}{a}\leqq x\leqq\dfrac{1}{a}$.

15. $1+\dfrac{x}{a}+\dfrac{x^2}{2a^2}+\dfrac{x^3}{3a^3}+\cdots$. $(a>0)$. *Resp.* $-a \leqq x < a$.

16. $1+\dfrac{2^2x}{\underline{|2}}+\dfrac{3^2x^2}{\underline{|3}}+\dfrac{4^2x^3}{\underline{|4}}+\cdots$. Todos os valores.

17. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2x}{2\cdot 3^2}+\dfrac{3x^2}{2^2\cdot 3^3}+\dfrac{4x^3}{2^3\cdot 3^4}+\cdots$. $-6 < x < 6$.

18. $x+4x^2+9x^3+16x^4+\cdots$.

19. $\dfrac{x}{1\cdot 2}+\dfrac{2x^2}{2\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{3x^3}{2^2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{4x^4}{2^3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$.

20. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{5}+\cdots$. **22.** $1-\dfrac{x}{10}+\dfrac{\underline{|2}\,x^2}{100}-\dfrac{\underline{|3}\,x^3}{1000}+\cdots$.

21. $\frac{10\,x}{1} + \frac{100\,x^2}{\underline{|2}} + \frac{1000\,x^3}{\underline{|3}} + \cdots$. 23. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$.

24. $1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{4^2} - \frac{x^6}{6^2} + \cdots$.

192. — Série binomial. Esta importante série é

$$(1) \quad 1 + mx + \frac{m\,(m-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + $$

$$+ \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+1)}{\underline{|n}}\,x^n + \cdots$$

onde m é uma constante.

Se m é inteiro positivo, (1) é uma série de $m + 1$ termos, pois todos os termos seguindo o que contém x^m tem o fator $m - m$ no numerador e portanto são nulos. Neste caso, (1) é o resultado obtido pela elevação de $1 + x$ à potência m. Se m não é inteiro positivo, a série contém infinitos termos.

Examinemos (1) no que concerne à convergência. Temos

$$u_n = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\,x^{n-1}$$

e $$u_{n+1} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots(m-n+2)\,(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\,n}\,x^n.$$

Logo, $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n}\,x = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right)x\,.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m+1}{n} - 1\right) = -1$, vemos que $\rho = -x$,

e a série é convergente para x menor que 1, em valor absoluto, e divergente para x maior que 1, em valor absoluto.

Do estudo da série de Maclaurin, § 194, resulta o seguinte: se m não é inteiro positivo e se $|x| < 1$, o valor da série binomial é igual a $(1 + x)^m$, isto é,

$$(2) \qquad (1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \cdots . \qquad (|x| < 1)$$

Se m é inteiro positivo, a série é finita e igual também a $(1 + x)^m$ para todos os valores de x.

A igualdade (2) exprime o *teorema binomial especial*. Podemos também escrever

$$(3) \qquad (a + b)^m = a^m (1 + x)^m, \text{ se } x = \frac{b}{a} \cdot$$

Desse modo, o primeiro membro de (3) pode também ser expresso como série de potências.

Damos abaixo exemplos de cálculos aproximados pela série binomial.

Exemplo ilustrativo. Achar $\sqrt{630}$ aproximadamente, usando a série binomial.

Solução. O quadrado perfeito mais próximo de 630 é 625. Escrevemos, então

$$\sqrt{630} = \sqrt{625 + 5} = 25 \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Escrevamos agora a (2) com $m = \frac{1}{2}$; temos

$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 + \cdots .$$

Nêste exemplo, $x = \frac{1}{125} = 0{,}008$. Logo,

$$\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + 0{,}004 - 0{,}000008 + 0{,}000000032 + \cdots .$$

$$(4) \qquad 25\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} = 25 + 0{,}1 - 0{,}0002 + 0{,}0000008 = 25{,}099801$$

(a menos do algarismo na sexta casa decimal). *Resp.*

A série em (4) é uma série alternada e portanto o erro na resposta é menor que 0,0000008.

193. — Outro tipo de série de potências. Usamos frequentemente séries do tipo

$$(1) \qquad b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + \cdots$$

na qual a e os coeficientes $b_0, b_1, \cdots, b_n, \cdots$ são constantes. Tal série diz-se de potências em $(x - a)$.

Apliquemos a regra de D'Alembert a (1), como no § 191.

Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = M\,,$$

teremos, para qualquer valor fixo de x,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (x-a)\,M\,.$$

Temos dois casos:

I. Se $M = 0$, a série (1) é convergente para todos os valores de x.

II. Se M não é zero, a série (1) converge no intervalo

$$a - \frac{1}{|M|} < x < a + \frac{1}{|M|}\,.$$

Exemplo ilustrativo. Examinar o comportamento da série

$$1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots$$

no que concerne à convergência.

Solução. Omitindo o primeiro termo,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n}{n+1}(x-1)\,.$$

Ora,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1\,.$$

Logo, $|\rho| = |\,x-1\,|$, e portanto a série converge quando x está compreendido entre 0 e 2. O extremo 2 pode estar incluído.

EXERCÍCIOS

1. Usando a série binomial, mostre que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Verifique o resultado dividindo diretamente.

Usando a série binomial, achar aproximadamente os valores dos seguintes números

2. $\sqrt{98}$. **5.** $\sqrt[5]{35}$. **8.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{990}}$. **11.** $\sqrt{\dfrac{26}{25}}$.

3. $\sqrt[3]{120}$. **6.** $\dfrac{1}{412}$. **9.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}}$. **12.** $\sqrt[3]{\dfrac{128}{125}}$.

4. $\sqrt[4]{630}$. **7.** $\dfrac{1}{\sqrt{412}}$. **10.** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{30}}$. **13.** $\sqrt[4]{\dfrac{17}{16}}$.

Para que valores da variável é convergente cada uma das seguintes séries?

14. $(x+1) - \dfrac{(x+1)^2}{2} + \dfrac{(x+1)^3}{3} - \dfrac{(x+1)^4}{4} + \cdots.$ *Resp.* $-2 < x \leqq 0$.

15. $(x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{3}} + \dfrac{(x-1)^4}{\sqrt{4}} + \cdots.$ $0 \leqq x < 2$.

16. $2(2x+1) + \dfrac{3(2x+1)^2}{\underline{|2}} + \dfrac{4(2x+1)^3}{\underline{|3}} + \cdots.$ Todos os valores.

17. $1 + (x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{2^2} + \dfrac{(x-2)^3}{3^2} + \dfrac{(x-2)^4}{4^2} + \cdots.$

18. $1 - 2(2x-3) + 3(2x-3)^2 - 4(2x-3)^3 + \cdots.$

19. $\dfrac{x-3}{1\cdot 3} + \dfrac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \dfrac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3} + \dfrac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \cdots.$

CAPÍTULO XX

DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE

194. — Série de Maclaurin. Estudamos neste capítulo o problema do desenvolvimento de uma função em série de potências, ou, em outras palavras, o da representação de uma função por uma série de potências.

Uma série de potências em x convergente é, òbviamente, uma função de x definida para todos os valores do intervalo de convergência. Podemos, pois, escrever

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Perguntamos: quando uma função é representada por uma série de potências, como são os coeficientes a_0, a_1, ..., a_n, etc., desta série? Para responder a esta pergunta, procedemos assim:

Ponhamos $x = 0$ em (1). Temos

$$(2) \qquad f(0) = a_0.$$

Logo, o primeiro coeficiente a_0 em (1) está determinado. *Admitamos* agora, que a série (1) possa ser derivada termo a termo e que essa derivação possa ser continuada. Teremos então

$$(3) \qquad \begin{cases} f'(x) = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \\ f''(x) = 2\,a_2 + 6\,a_3 x + \ldots + n\,(n-1)\,a_n x^{n-2} + \ldots \\ f'''(x) = 6\,a_3 + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\,a_n x^{n-3} + \ldots \end{cases}$$

etc.

Pondo $x = 0$, temos

$$(4) \quad f'(0) = a_1,\ f''(0) = \underline{|2}\,a_2,\ f'''(0) = \underline{|3}\,a_3, \ldots,\ f^{(n)}(0) = \underline{|n}\,a_n.$$

Tirando de (4) os valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$, etc., e substituindo em (1), temos

$$(A) \quad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{|\underline{1}} + f''(0)\frac{x^2}{|\underline{2}} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{|\underline{n}} + \ldots$$

Esta fórmula exprime $f(x)$ como uma série de potências. Dizemos "a função $f(x)$ está desenvolvida numa série de potências de x". Esta é a série de Maclaurin*.

Agora é necessário examinar (A) criticamente. Para isto, tendo em vista (G), § 124, podemos escrever, pondo $a = 0$ e $b = x$ na fórmula recordada,

$$(5) \quad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{|\underline{1}} + f''(0)\frac{x^2}{|\underline{2}} + \ldots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{|\underline{n-1}} + R,$$

onde $$R = f^{(n)}(x_1)\frac{x^n}{|\underline{n}}. \qquad (0 < x_1 < x)$$

O termo R diz-se o *resto depois do n-egésimo*. O segundo membro de (5) coincide com a soma dos n primeiros da série de Maclaurin. Indicando esta soma por S_n, a (5) torna-se pois

$$f(x) = S_n + R, \quad \text{ou} \quad f(x) - S_n = R.$$

Admitamos agora que, para um valor fixo $x = x_0$, R tenda a zero quando n tende ao infinito. Então S_n tenderá a $f(x_0)$ (§ 14), isto é, a série de Maclaurin converge em $x = x_0$ e seu valor é $f(x_0)$. Temos, assim, o seguinte resultado:

TEOREMA. *Para que a série* (A) *seja convergente e represente a função* $f(x)$ *é necessário e suficiente que*

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} R = 0\,.$$

É usualmente mais fácil determinar o intervalo de convergência (como no parágrafo precedente) do que a veracidade de (6). Mas nos casos simples os dois são igualmente fáceis.

* De Colin Maclaurin (1698-1746) que por primeiro a publicou em seu "Treatise of Fluxio (Edimburgo, 1742). Na realidade, a série é devida a Stirling (1692-1770).

Para uma função $f(x)$ ser representável por uma série (A) é, òbviamente, necessário que a função e as suas derivadas de todas as ordens sejam finitas. Isto, contudo, não é suficiente.

Exemplos de funções que não são representáveis por uma série de Maclaurin são

$$\ln x \quad \text{e} \quad \operatorname{ctg} x,$$

pois ambas são infinitas quando $x = 0$.

O estudante deve notar a importância de um desenvolvimento como (A). Ele intervém sempre que se quer calcular uma grandeza com dado grau de aproximação, uma vez que substitui uma função cujo valor num ponto é, eventualmente, difícil de se calcular, por um polinômio de coeficientes constantes e portanto cujo valor num ponto é sempre mais fácil de ser computado. Evidentemente, o polinômio deve ter tantos termos quantos necessários para dar o grau desejado de aproximação.

No caso de uma série alternada (§ 188), o erro que se comete parando num dado termo do desenvolvimento é, em valor absoluto, menor que o termo.

Exemplo ilustrativo 1. Desenvolver $\cos x$ em série e determinar para que valores de x ela converge.

Solução. Derivando e depois pondo $x = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&f(x) = \cos x, && f(0) = 1,\\
&f'(x) = -\operatorname{sen} x, && f'(0) = 0,\\
&f''(x) = -\cos x, && f''(0) = -1,\\
&f'''(x) = \operatorname{sen} x, && f'''(0) = 0,\\
&f^{IV}(x) = \cos x, && f^{IV}(0) = 1,\\
&f^{V}(x) = -\operatorname{sen} x, && f^{V}(0) = 0,\\
&f^{VI}(x) = -\cos x, && f^{VI}(0) = -1,\\
&\text{etc.}, && \text{etc.}
\end{aligned}$$

Substituindo em (A),

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots. \tag{7}$$

Confrontando com a série do Problema 6, § 191, vemos que a série converge para todos os valores de x.

Resultado para sen x, temos

$$(8) \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \ldots,$$

a qual converge para todos os valores de x (Problema 7, § 191).

Em (7) e (8) não é difícil mostrar que o resto R tende a zero quando n tende ao infinito, para qualquer valor fixo de x. Consideremos (7). Podemos escrever a derivada n-egésima sob a forma

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Logo $$R = \cos\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{\underline{|n}}.$$

Ora, $\cos\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right)$ nunca excede 1 em valor absoluto. Por outro lado, o segundo fator de R é o n-egésimo termo da série

$$x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots + \frac{x^n}{\underline{|r}} + \ldots,$$

a qual é convergente para todos os valores de x. Logo, o resto tende a zero quando n tende ao infinito (Ver (A), § 185), isto é, (6) é verdadeira.

Do exemplo acima vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{\underline{|n}} = 0\,.$$

Ora, vimos na página precedente que

$$R = f^{(n)}(x_1)\frac{x^n}{\underline{|n}}. \qquad (0 < x_1 < x)$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} R = 0$ se $f^{(n)}(x_1)$ permanece finita quando n cresce indefinidamente.

Exemplo ilustrativo 2. Usando a série (8) achada no último exemplo, calcular sen 1 com quatro decimais exatas.

SOLUÇÃO. Aqui $x = 1$ radiano, isto é, o ângulo é expresso em medida circular. Fazendo, pois, $x = 1$ em (8) do último exemplo, temos

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 5} - \frac{1}{\lfloor 7} + \frac{1}{\lfloor 9} - \cdots$$

Somando separadamente os termos positivos e negativos,

$$1 = 1{,}00000 \qquad \frac{1}{\lfloor 3} = 0{,}16667$$

$$\frac{1}{\lfloor 5} = 0{,}00833 \qquad \frac{1}{\lfloor 7} = 0{,}00020$$

$$1{,}00833 \qquad 0{,}16687$$

Logo $$\operatorname{sen} 1 = 1{,}00833 - 0{,}16687 = 0{,}84146\,,$$

com cinco decimais exatas, pois o erro cometido deve ser menor que $\frac{1}{\lfloor 9}$, isto é, menor que 0,000003. O valor de sen 1 pode, òbviamente, ser calculado com qualquer grau de aproximação; basta para isso incluir um número suficiente de termos da série.

EXERCÍCIOS

Verificar os seguintes desenvolvimentos em série de Maclaurin e determinar para que valores da variável êles são convergentes.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + \cdots$. *Resp.* Todos os valores

2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{\lfloor 2n-1} + \cdots$. Todos os valores

3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \cdots$.
$$-1 < x \leqq 1.$$

4. $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$.
$$-1 \leqq x < 1.$$

5. $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)\, x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)(2n-1)} + \cdots.$$
$$-1 \leqq x \leqq 1.$$

6. $\text{arc tg}\, x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$

$$-1 \leqq x \leqq 1.$$

7. $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + x - \dfrac{x^2}{|\underline{2}} - \dfrac{x^3}{|\underline{3}} + \dfrac{x^4}{|\underline{4}} + \dfrac{x^5}{|\underline{5}} - \right.$

$$\left. - \frac{x^6}{|\underline{6}} - \frac{x^7}{|\underline{7}} + \cdots\right).$$

Resp. Todos os valores

8. $\ln(a + x) = \ln a + \dfrac{x}{a} - \dfrac{x^2}{2a^2} + \dfrac{x^3}{3a^3} - \cdots.$

$$+ \frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}} + \cdots. \qquad -a < x \leqq a.$$

Verifique os seguintes desenvolvimentos

9. $\text{tg}\, x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \cdots.$

10. $\sec x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \cdots.$

11. $\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3} + x - \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{|\underline{2}} - \dfrac{x^3}{|\underline{3}} + \dfrac{\sqrt{3}\,x^4}{|\underline{4}} + \right.$

$$\left. + \frac{x^5}{|\underline{5}} \cdots\right).$$

12. $\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{8x^3}{3} + \cdots.$

13. $\text{arc tg}\, \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} - x + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{5} + \cdots.$

14. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \dfrac{x^2}{|\underline{2}} + \dfrac{x^4}{|\underline{4}} + \dfrac{x^6}{|\underline{6}} + \cdots.$

15. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = x - \dfrac{x^3}{|\underline{3}} + \dfrac{9x^5}{|\underline{5}} \cdots.$

16. $\ln \cos x = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} \cdots.$

Ache três termos do desenvolvimento em série de potências de x das seguintes funções

17. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

18. $\text{sen}\,(x + 1).$

19. $e^{\text{sen}\, x}$

20. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$

Calcule os valores das seguintes funções substituindo diretamente na série de potências equivalente o valor dado do argumento e tomando tantos termos quantos necessários para que o resultado obtido concorde com o que é dado.

21. $e = 2{,}7182\ldots$

Solução. Seja $x = 1$ na série do Problema 1; então

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{1}{\underline{|5}} + \cdots.$$

Primeiro têrmo	= 1,00000	
Segundo têrmo	= 1,00000	
Terceiro têrmo	= 0,500000	
Quarto têrmo	= 0,16667...	(Dividindo o terceiro têrmo por 3)
Quinto têrmo	= 0,04167...	(Dividindo o quarto têrmo por 4)
Sexto têrmo	= 0,00833...	(Dividindo o quinto têrmo por 5)
Sétimo têrmo	= 0,00139...	(Dividindo o sexto têrmo por 6)
Oitavo têrmo	= 0,00020...	(Dividindo o sétimo têrmo por 7)
Somando, e	= 2,71826...	*Resp.*

22. $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right) = 0{,}1973\ldots$; use a série do Problema 6.

23. $\cos 1 = 0{,}5403\ldots$; use a série em (7), Exemplo ilustrativo 1.

24. $\cos 10^\circ = 0{,}9848\ldots$; use a série em (7), Exemplo ilustrativo 1.

25. $\operatorname{sen} 0{,}1 = 0{,}0998$; use a série do Problema 2.

26. $\operatorname{arc\,sen} 1 = 1{,}5708\ldots$; use a série do Problema 5.

27. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$; use a série do Problema 2.

28. $\operatorname{sen} 0{,}5 = 0{,}4794\ldots$; use a série do Problema 2.

29. $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{\underline{|2}} + \frac{2^3}{\underline{|3}} + \cdots = 7{,}3890.$

30. $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\underline{|2}} + \frac{1}{2^3\underline{|3}} + \ldots = 1{,}6487.$

195. — Operações sobre séries. Pode-se efetuar muitas das operações da álgebra e do cálculo com as séries convergentes como as que se pode com polinômios. Os resultados seguintes são dados sem demonstração.

Sejam $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

e $$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

séries de potências convergentes. Delas podem-se obter novas séries de potências convergentes, como segue:

1. *Somando (ou subtraindo) têrmo a têrmo.*

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)\,x + \cdots + (a_n \pm b_n)\,x^n + \cdots$$

2. *Multiplicando e grupando têrmos como abaixo*

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2 + \cdots .$$

Exemplo ilustrativo 1. Cálculo de logaritmos. Das séries (Problemas 3 e 4, § 194)

$$\ln(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots,$$

$$\ln(1 - x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \cdots,$$

obtemos, por subtração de termos correspondentes, e usando (2), § 1, a nova série

$$(1) \qquad \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots\right).$$

Esta série converge quando $|x| < 1$.

Para transformar (1) numa forma mais cômoda para o cômputo, seja N um número positivo. Então, pondo

$$(2) \qquad x = \frac{1}{2N+1}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N},$$

obtemos $|x| < 1$ para todo valor de N. Substituindo em (1), resulta a fórmula

$$(3) \quad \ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2N+1)^5} + \cdots\right].$$

Esta série converge para todo valor positivo de N e é cômoda para o cálculo. Por exemplo, seja $N = 1$. Então

$$\ln (N + 1) = \ln 2, \frac{1}{2N + 1} = \frac{1}{3}.$$

Substituindo em (3), o resultado é $\ln 2 = 0{,}69315$.

Fazendo $N = 2$ em (3), obtemos

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \cdots\right] = 1{,}09861 \cdots$$

Vê-se que é apenas necessário calcular os logaritmos dos números primos deste modo, pois os logaritmos dos números não primos podem ser achados com as fórmulas (2) do § 1. Assim,

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 = 2{,}07944 \cdots,$$
$$\ln 6 = \ln 3 + \ln 2 = 1{,}79176 \cdots.$$

Os logaritmos acima são todos neperianos, ou naturais, isto é, são logaritmos em base $e = 2{,}71828\ldots$ Se quizermos achar os logaritmos de Briggs, ou comuns, onde a base usada é 10, o que devemos fazer é uma mudança de base pela fórmula

$$\log n = \frac{\ln n}{\ln 10}.$$

Assim,
$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{0{,}69315}{2{,}30258} = 0{,}3010 \cdots.$$

Na construção de uma tábua de logaritmos só alguns dos valores tabulados são calculados pelas séries, sendo achados os demais pelo emprêgo de teoremas da teoria dos logaritmos e vários artifícios que permitem a economia de trabalho.

Exemplo ilustrativo 2. Desenvolva $e^x \operatorname{sen} x$ em série de potências.

Solução. Das séries

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots \qquad \text{Problema 2, § 194}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots \quad \text{Prob. 1, § 194}$$

obtemos, por multiplicação,

$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \text{têrmos em } x^6, \text{etc.} \quad \textit{Resp.}$$

3. *Por divisão.* No exemplo abaixo mostramos um caso especial.

Exemplo ilustrativo 3. Da série que dá $\cos x$ (v. (7), § 194), ache a série de $\sec x$.

SOLUÇÃO. Sendo $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ e

$$\text{(4)} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots,$$

procedamos assim. Escrevamos (4) na forma $\cos x = 1 - z$, onde

$$\text{(5)} \qquad z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \cdots.$$

Então

$$\text{(6)} \qquad \sec x = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots,$$

para $|z| < 1$ (problema 1, § 193).

De (5), temos a série

$$z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \text{termos de grau mais alto.}$$

$$z^3 = \frac{x^6}{8} + \cdots.$$

Substituindo em (6), obtemos

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots \quad \textit{Resp.}$$

EXERCÍCIOS

Dados $\ln 2 = 0{,}69315$ e $\ln 3 = 1{,}09861$, calcular os seguintes logaritmos naturais, pelo método do exemplo acima.

1. $\ln 5 = 1{,}60944$.

2. $\ln 7 = 1{,}94591$.

3. $\ln 11 = 2{,}39790$.

4. $\ln 13 = 2{,}56495$.

Desenvolver em série as seguintes funções.

5. $e^{-t}\cos t = 1 - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + \cdots$.

6. $\frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \cdots$.

7. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + \cdots$.

8. $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}{1-\frac{1}{2}\theta} = \dfrac{1}{2}\theta + \dfrac{1}{4}\theta^2 + \dfrac{5}{48}\theta^3 + \dfrac{5}{96}\theta^4 + \cdots.$

9. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x} = 1 - \dfrac{1}{6}x^4 + \cdots.$

10. $e^x \operatorname{tg} x = x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 + \cdots.$

11. $e^{-x}\sec x = 1 - x + x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 + \cdots.$

12. $e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen} 2t = 2t - t^2 - \dfrac{13}{12}t^3 + \dfrac{5}{8}t^4 + \cdots.$

13. $(1+x)\cos\sqrt{x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{24}x^2 + \dfrac{29}{720}x^3 - \dfrac{11}{8064}x^4 + \cdots.$

14. $(1+2x)\operatorname{arc\,sen} x = x + 2x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{3}x^4 + \cdots.$

15. $\sqrt{1-x}\operatorname{arc\,tg} x = x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{11}{24}x^3 + \dfrac{5}{48}x^4 + \cdots.$

16. $\sqrt{1-\operatorname{tg} x} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{11}{48}x^3 - \dfrac{47}{384}x^4 + \cdots.$

17. $\sqrt{\sec x} = 1 + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{7}{96}x^4 + \cdots.$

18. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+\operatorname{sen} x} = x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{23}{12}x^4 + \cdots.$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{5-e^x}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16}x + \dfrac{11}{256}x^2 + \dfrac{151}{6144}x^3 + \cdots.$

20. $\sqrt{4+\operatorname{sen}\phi} = 2 + \dfrac{1}{4}\phi - \dfrac{1}{64}\phi^2 - \dfrac{61}{1536}\phi^3 + \cdots.$

Para as seguintes funções achar todos os termos da série que envolvem potências de x menores que x^5

21. $e^{-\frac{x}{5}}\operatorname{sen} x.$

22. $e^x \cos\frac{1}{2}\sqrt{x}.$

23. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos 2x}.$

24. $\sqrt{3+e^{-x}}.$

25. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}.$

26. $\sqrt{5-\cos x}.$

196. — Derivação e integração das séries de potências. Uma série de potências convergente

$$(1) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

pode ser derivada termo a termo em cada valor de x compreendido entre os extremos do intervalo de convergência e a série resultante é também convergente.

Por exemplo, da série

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \cdots$$

obtemos, por derivação, a série abaixo

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots.$$

As duas séries convergem para todos os valores de x (veja os Problemas 6 e 7, § 191).

A série (1) pode também ser integrada termo a termo se os limites de integração estão dentro do intervalo de convergência, e a série resultante é convergente.

Exemplo ilustrativo 1. Achar, por integração, a série de $\ln(1 + x)$.

Solução. Como $\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$, temos

$$(2) \qquad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

Ora,
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots,$$

quando $|x| < 1$ (§ 192). Substituindo em (2) e integrando o segundo membro termo a termo, obtemos

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots.$$

Esta série também converge quando $|x| < 1$ (Ver Problema 2, § 191).

Exemplo ilustrativo 2. Achar, por integração, a série de potências que representa $\operatorname{arc\,sen} x$.

SOLUÇÃO. Como $\frac{d}{dx}\text{arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, temos

$$\text{arc sen } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (x^2 < 1) \tag{3}$$

Pela série binomial ((2), § 192), pondo $m = -\frac{1}{2}$ e substituindo x por $-x^2$, temos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots.$$

Esta série converge quando $|x| < 1$. Substituindo em (3) e integrando têrmo a têrmo, obtemos

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots. \quad \textit{Resp.}$$

Esta série também converge quando $|x| < 1$ (veja o Problema 8, § 191).

Por esta série, o valor de π pode ser calculado imediatamente. De fato, como a série converge para valores de x compreendidos entre -1 e 1, podemos pôr $x = \frac{1}{2}$, o que fornece

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots,$$

ou $\qquad \pi = 3{,}1415\cdots.$

Evidentemente podiamos ter usado a série do Problema 6, § 194. As duas séries convergem, se bem que não tão ràpidamente como outras, que se obtém com processos mais complexos, e que fornecem o valor de π com um grande número de decimais exatas sem exigir muitos cálculos.

Exemplo ilustrativo 3. Usando séries, calcular aproximadamente o valor de $\int_0^1 \text{sen } x^2\,dx$.

SOLUÇÃO. Seja $z = x^2$. Então

$$\text{sen } z = z - \frac{z^3}{\underline{|3}} + \frac{z^5}{\underline{|5}} - \cdots. \qquad \text{Problema 2, § 194.}$$

$$\text{Logo} \quad \text{sen } x^2 = x^2 - \frac{x^6}{\underline{|3}} + \frac{x^{10}}{\underline{|5}} \cdots,$$

$$\int_0^1 \text{sen } x^2\,dx = \int_0^1\left(x^2 - \frac{x^6}{\underline{|3}} + \frac{x^{10}}{\underline{|5}}\right)dx, \text{ aproximadamente}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320}\right]_0^1 = 0{,}3333 - 0{,}0238 + 0{,}0008$$

$$= 0{,}3103. \quad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

1. Achar, por integração, a série de arc tg x.

2. Achar, por integração, a série de $\ln(1-x)$.

3. Achar a série de $\sec^2 x$, derivando a série de $\operatorname{tg} x$.

4. Achar a série de $\ln \cos x$, integrando a série de $\operatorname{tg} x$.

Usando séries, achar aproximadamente os valores das seguintes integrais.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x\, dx}{1+x}$. *Resp.* 0,3914.

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1-x}$. 0,185

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} e^x \ln(1+x)\, dx$. 0,0628.

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x^2}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 0,4815.

9. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(1+x)\, dx}{\cos x}$ *Resp.* 0,0295.

10. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{9}} \ln(1+\sqrt{x})\, dx$.

12. $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$.

13. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$.

14. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} \cos \sqrt{x}\, dx$.

15. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2-\operatorname{sen} x}\, dx$.

197. — Fórmulas aproximadas deduzidas da série de Maclaurin. Usando alguns termos da série de potências que representa uma função, obtemos uma fórmula aproximada para a função com algum grau de precisão. Tais fórmulas aproximadas são largamente usadas em matemática aplicada.

Por exemplo, tomando a série binomial ((2), § 192), temos logo as seguintes fórmulas de aproximação.

$$(1+x)^m = 1 + mx \quad (1.^a \text{ aproximação})$$
$$= 1 + mx + \tfrac{1}{2} m(m-1)x^2 \quad (2.^a \text{ aproximação});$$

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1 - mx \quad (1.^a \text{ aproximação});$$
$$= 1 - mx + \tfrac{1}{2} m(m+1)x^2 \quad (2.^a \text{ aproximação}).$$

Nestas, $|x|$ é pequeno e m é positivo.

Consideremos, de novo, a série seno

$$(1) \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \cdots .$$

Então

$$(2) \qquad \operatorname{sen} x = x ,$$

$$(3) \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} ,$$

etc.

são fórmulas aproximadas. Examinemos a primeira.

Tomemos na série (1) valores de x tais que os termos decresçam em valor absoluto. Então, ficando só com o primeiro termo, o erro que se comete é, em valor absoluto, menor que $|\frac{1}{6} x^3|$ (§ 188), isto é,

$$\operatorname{sen} x = x \quad \text{com} \quad |\text{êrro}| < |\tfrac{1}{6} x^3| .$$

Podemos perguntar: para que valores de x a (2) é verdadeira até três casas decimais? Deve-se ter

$$|\tfrac{1}{6} x^3| < 0{,}0005 ,$$

isto é, $$|x| < \sqrt[3]{0{,}003} < 0{,}1443 \text{ rad.}$$

Concluímos, pois, que (2) é verdadeira até a terceira casa decimal para valores de x compreendidos entre $-0{,}1443$ e $+0{,}1443$, ou, em graus, para valores compreendidos entre $-8^\circ{,}2$ e $+8^\circ{,}2$.

PROBLEMAS

1. Qual a precisão da fórmula aproximada $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}$ quando (*a*) $x = 30^\circ$? (*b*) $x = 60^\circ$? (*c*) $x = 90^\circ$?

Resp. (*a*) Êrro $< 0{,}00033$; (*b*) êrro $< 0{,}01$; (*c*) êrro $< 0{,}08$.

2. Qual a precisão da fórmula aproximada $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ quando (*a*) $x = 30^\circ$? (*b*) $x = 60^\circ$? (*c*) $x = 90^\circ$?

Resp. (*a*) Êrro $< 0{,}0032$; (*b*) êrro $< 0{,}05$; (*c*) êrro $< 0{,}25$.

3. Qual a precisão da fórmula aproximada $e^{-x} = 1 - x$ quando (*a*) $x = 0{,}1$? (*b*) $x = 0{,}5$?

4. Qual a precisão da fórmula aproximada $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3}$ quando (a) $x = 0{,}1$? (b) $x = 0{,}5$? (c) $x = 1$?

Resp. (a) Êrro $< 0{,}000002$; (b) êrro $< 0{,}006$; (c) êrro $< 0{,}2$.

5. Quantos termos da série $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \ldots$ são necessários para se ter sen 45° com cinco decimais exatas? *Resp.* 4.

6. Quantos termos da série $\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \ldots$ são necessários para se ter cos 60° com 5 decimais exatas?

7. Quantos termos da série $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ são necessários para se ter log 1,2 com 5 decimais exatas? *Resp.* 6.

Verifique as seguintes fórmulas aproximadas

8. $\frac{\operatorname{sen} x}{1-x} = x + x^2.$

9. $\frac{\cos x}{1-x^2} = 1 + \frac{x^2}{2}.$

10. $e^{-\theta}\cos\theta = 1 - \theta + \frac{\theta^3}{3}.$

11. $\int \cos\sqrt{x}\,dx = C + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}.$

12. $\int e^{-x^2}\,dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}.$

13. $\int \ln(1-x)dx = C - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$

14. $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$

15. $\int e^{\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = C + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3}.$

198. — Série de Taylor. Uma série de potências em x convergente serve para calcular o valor da função que ela representa em pontos x suficientemente próximos do zero. Para calcular o valor de uma função num ponto x próximo de um ponto a usa-se séries de potências em $x - a$ (ver § 193). Vamos agora desenvolver uma função em série de potências de $x - a$, sendo a um número fixo.

Admitamos que

$$(1) \quad f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + \ldots,$$

e que a série represente a função. A forma que, necessàriamente, devem ter os coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n$, etc., obtém-se como no § 194, isto é, derivamos (1) em relação a x, admitindo que isto seja

possível, e continuamos o processo. Obtemos assim

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1} + \cdots,$$
$$f''(x) = \qquad 2b_2 + \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2} + \cdots,$$

etc.

Pondo $x = a$ nestas equações e em (1) e tirando os valores de $b_0, b_1, b_2, \cdots$, temos

$$b_0 = f(a), \quad b_1 = f'(a), \quad b_2 = \frac{f''(a)}{\underline{|2}}, \cdots, \quad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{\underline{|n}}, \cdots.$$

Substituindo estes valores em (1), vem

$$(B) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{\underline{|1}} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{\underline{|n}} + \cdots.$$

A série obtida diz-se *série de Taylor.**

Examinemos (B). Tendo presente (G), § 124, na qual se pôs $b = x$, temos

$$(2) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{\underline{|1}} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R,$$

onde

$$R = f^{(n)}(x_1)\frac{(x-a)^n}{\underline{|n}}. \qquad (a < x_1 < x)$$

O têrmo R diz-se o *resto depois do n-egésimo têrmo.*

A série do segundo membro de (2) difere da soma S_n dos n primeiros termos da série de Taylor pelo número R, isto é, temos

$$f(x) = S_n + R, \quad \text{ou} \quad f(x) - S_n = R.$$

Admitamos agora que, para um valor fixo $x = x_0$, o resto R tenda a zero quando n tende ao infinito. Então

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = f(x_0),$$

e (B) converge em $x = x_0$ e seu valor neste ponto é $f(x_0)$.

---

* Publicada pelo Dr. Brook Taylor (1685-1731) no seu "Methodus Incrementorum" (Londres 1715).

TEOREMA. *A série (B) representa a função nos valores de x, e sòmente naqueles valores, para os quais o resto tende a zero quando n tende ao infinito.*

Se a série converge para valores de x para os quais o resto não tende a zero quando n tende ao infinito, então para tais valores de x a série não converge para o valor $f(x)$.

É usualmente mais fácil determinar o intervalo de convergência da série do que os valores de x para os quais o resto tende a zero, mas, nos casos simples este conjunto de pontos e o intervalo coincidem.

Quando os valores de uma função e os de suas derivadas sucessivas são conhecidos e finitos para algum valor fixo da variável, por exemplo para $x = a$, então (B) é usada para achar o valor da função para valores de x próximos de a.

A fórmula (B) é também chamada de *desenvolvimento de $f(x)$ numa vizinhança de $x = a$.*

Exemplo ilustrativo 1. Desenvolver $\ln x$ em série de potências de $x - 1$

SOLUÇÃO.

$$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(1) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(1) = 2,$$

etc., etc.

Substituindo em (B), $\ln x = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots$. *Resp.*

Esta série converge para valores de x compreendidos entre 0 e 2 e é o desenvolvimento de $\ln x$ numa vizinhança de $x = 1$. Ver o exemplo ilustrativo do § 193.

Exemplo ilustrativo 2. Desenvolver $\cos x$ em série de potências de $x - \frac{\pi}{4}$, com quatro termos.

SOLUÇÃO. Aqui $f(x) = \cos x$ e $a = \frac{\pi}{4}$. Temos, pois,

$$f(x) = \cos x, \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f''(x) = -\cos x, \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

etc. etc.

A série é, portanto,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\underline{|2}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{\underline{|3}} + \cdots.$$

O resultado pode ser escrito sob a forma

$$\cos x = 0{,}70711\left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \cdots\right]$$

Calculemos, com a fórmula obtida, cos 50°. Temos neste caso $x - \frac{\pi}{4} = 5°$ expresso em radianos, ou seja, $x - \frac{\pi}{4} = 0{,}08727$; logo, $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}00762$, $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 0{,}00066$. Substituindo na série acima, temos $\cos 50° = 0{,}64278$. Tábuas com 5 casas decimais fornecem $\cos 50° = 0{,}64279$.

199. — Outra forma da série de Taylor. Em (B), § 198, substituindo a por x_0 e $x - a$ por h, isto é, pondo $x = a + h = x_0 + h$, temos

$$(C) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{\underline{|1}} + f''(x_0)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \cdots + \\ + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}} + \cdots$$

Nesta segunda forma o valor de $f(x)$ quando x toma o valor $x_0 + h$ é desenvolvido em série de potências de h, acréscimo dado a x_0.

Exemplo ilustrativo. Desenvolva sen x em série de potências de h quando x passa de x_0 a $x_0 + h$.

SOLUÇÃO. Aqui $f(x) = \text{sen } x$ e $f(x_0 + h) = \text{sen }(x_0 + h)$. Derivando e dispondo as cousas como abaixo:

$$\begin{array}{ll} f(x) = \text{sen } x, & f(x_0) = \text{sen } x_0, \\ f'(x) = \cos x, & f'(x_0) = \cos x_0, \\ f''(x) = -\text{sen } x, & f''(x_0) = -\text{sen } x_0, \\ \text{etc.}, & \text{etc.} \end{array}$$

Substituindo em (C), obtemos

$$\text{sen }(x_0 + h) = \text{sen } x_0 + \cos x_0 \frac{h}{1} - \text{sen } x_0 \frac{h^2}{2} - \cos x_0 \frac{h^3}{6} + \cdots. \quad \textit{Resp.}$$

EXERCÍCIOS

Verifique os seguintes desenvolvimentos em série de Taylor

1. $$e^x = e^a \left[1 + (x - a) + \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} + \frac{(x-a)^3}{\underline{|3}} + \cdots \right].$$

2. $$\text{sen } x = \text{sen } a + (x - a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} \text{sen } a - \frac{(x-a)^3}{\underline{|3}} \cos a + \cdots.$$

3. $$\cos x = \cos a - (x - a)\,\text{sen } a - \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} \cos a + \frac{(x-a)^3}{\underline{|3}} \text{sen } a + \cdots.$$

4. $$\ln (a + x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \cdots.$$

5. $$\cos (a + x) = \cos a - x \,\text{sen } a - \frac{x^2}{\underline{|2}} \cos a + \frac{x^3}{\underline{|3}} \text{sen } a + \cdots.$$

6. $$\text{tg }(x + h) = \text{tg } x + h \sec^2 x + h^2 \sec^2 x \,\text{tg } x + \cdots.$$

7. $$(x + h)^n = x^n + n x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^{n-2} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} x^{n-3} h^3 + \cdots.$$

8. Desenvolva sen x em série de potências de $x - \frac{\pi}{4}$, com 4 termos.

$$Resp.\quad \text{sen}\, x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\underline{|2}} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{\underline{|3}} + \cdots\right].$$

9. Desenvolva tg x em série de potências de $x - \frac{\pi}{4}$, com 3 termos.

$$Resp.\quad \text{tg}\, x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \cdots.$$

10. Desenvolva $\ln x$ em série de potências de $x - 2$ até o quarto termo.

11. Desenvolva e^x em série de potências de $x - 1$ até o quinto termo.

12. Desenvolva sen $\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ em série de potências de x com 4 termos.

13. Desenvolva ctg $\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ em série de potências de x com 4 termos.

200. — Fórmulas aproximadas deduzidas da série de Taylor. Obtém-se tais fórmulas tomando para valor da função a soma de alguns termos da série (B) ou (C). Por exemplo, se $f(x) = \text{sen}\, x$, temos (ver Problema 2, § 199)

$$(1)\qquad \text{sen}\, x = \text{sen}\, a + \cos a\,(x - a)$$

como uma primeira aproximação.

Uma segunda aproximação resulta se tomarmos três têrmos da série, ou seja

$$(2)\qquad \text{sen}\, x = \text{sen}\, a + \cos a\,(x - a) - \text{sen}\, a\,\frac{(x - a)^2}{\underline{|2}}.$$

De (1), transpondo sen a e dividindo por $x - a$, obtemos

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \cos a\,.$$

Como $\cos a$ é constante, isto significa que (aproximadamente)

A mudança no valor do seno é proporcional à mudança no ângulo para valores do ângulo próximos de a.

A fórmula (3) ilustra a *interpolação por partes proporcionais.*

Exemplo ilustrativo 1. Seja, por exemplo, $a = 30^\circ = 0{,}5236$ radiano e vamos calcular os senos de 31° e 32° pela fórmula aproximada (1). Como $x - a = 1^\circ = 0{,}01745$ radiano, temos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 31^\circ &= \operatorname{sen} 30^\circ + \cos 30^\circ\,(0{,}01745)\\ &= 0{,}5000 + 0{,}8660 \times 0{,}01745\\ &= 0{,}5000 + 0{,}0151 = 0{,}5151.\end{aligned}$$

Semelhantemente, $\operatorname{sen} 32^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ + \cos 30^\circ\,(0{,}03490) = 0{,}5302.$

Temos aqui apenas três decimais exatas. Se quizermos mais precisão podemos usar (2). Assim

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 31^\circ &= \operatorname{sen} 30^\circ + \cos 30^\circ\,(0{,}01745) - \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{2}(0{,}01745)^2\\ &= 0{,}50000 + 0{,}01511 - 0{,}00008\\ &= 0{,}51503.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 32^\circ &= \operatorname{sen} 30^\circ + \cos 30^\circ\,(0{,}03490) - \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{2}(0{,}03490)^2\\ &= 0{,}50000 + 0{,}03022 - 0{,}00030\\ &= 0{,}52992.\end{aligned}$$

Agora temos quatro decimais exatas.

De (C) deduzimos fórmulas aproximadas para o acréscimo de $f(x)$ quando x varia de x_0 a $x_0 + h$. Realmente, passando para o primeiro membro o primeiro têrmo do segundo, obtemos

$$(4) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\,h + f''(x_0)\,\frac{h^2}{\underline{|2}} + \cdots.$$

O segundo membro exprime o acréscimo de $f(x)$ como uma série de potências no acréscimo de $x\ (= h)$.

De (4) deduzimos como uma *primeira aproximação.*

$$(5) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\,h\,.$$

Esta fórmula foi usada no § 92, pois o segundo membro é o valor da diferencial de $f(x)$ para $x = x_0$ e $\Delta x = h$.

Como *segunda aproximação*, temos

$$(6) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\,h + f''(x_0)\frac{h^2}{2}\,.$$

Exemplo ilustrativo 2. Calcular o acréscimo de tg x, aproximadamente, quando x varia de 45° a 46°, por (5) e por (6).

SOLUÇÃO. Do problema 6, § 199, se $x = x_0$, temos

$$\operatorname{tg}(x_0 + h) = \operatorname{tg} x_0 + \sec^2 x_0 h + \sec^2 x_0 \operatorname{tg} x_0\, h^2 + \cdots.$$

Nêste exemplo $x_0 = 45°$ e tg $x_0 = 1$, $\sec^2 x_0 = 2$.

Ora, $h = 1°$ expresso em radianos = 0,01745; logo, por (5),

$$\operatorname{tg} 46° - \operatorname{tg} 45° = 2\,(0{,}01745) = 0{,}0349;$$

por (6), $\qquad \operatorname{tg} 46° - \operatorname{tg} 45° = 0{,}0349 + 2\,(0{,}01745)^2 = 0{,}0349 + 0{,}0006 = 0{,}0355.$

Da segunda aproximação obtemos tg 46° = 1,0355, com quatro decimais exatas.

PROBLEMAS

1. Verifique a fórmula aproximada

$$\ln(10 + x) = 2{,}303 + \frac{x}{10}\,.$$

Calcule o valor da função por esta fórmula e compare o resultado com o fornecido pelas tábuas, quando (*a*) $x = -0{,}5$; (*b*) $x = -1$.

Resp. (*a*) Fórmula, 2,253; tábuas, 2,251.
(*b*) Fórmula, 2,203; tábuas 2,197.

2. Verifique a fórmula aproximada

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0{,}5 + 0{,}8660\,x\,.$$

Use a fórmula para calcular sen 27°, sen 33°, sen 40° e compare os resultados com os fornecidos pelas tábuas.

3. Verifique a fórmula aproximada

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2x + 2x^2.$$

Use a fórmula para calcular tg 46°, tg 50° e compare seus resultados com os fornecidos pelas tábuas.

4. Verifique a fórmula aproximada

$$\cos x = \cos a - (x - a) \operatorname{sen} a.$$

Dados

$$\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = 0{,}8660,$$
$$\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = 0{,}7017\ ,$$
$$\cos 60° = \operatorname{sen} 30° = 0{,}5\ ,$$

use a fórmula para calcular cos 32°, cos 47°, cos 62° e compare seus resultados com os fornecidos pelas tábuas.

OUTROS PROBLEMAS

1. Dada a integral definida $\int_0^{\frac{1}{2}} x^5 \ln(1 + x)\, dx$,

(a) obtenha o seu valor, por série, com 4 decimais exatas.

Resp. 0,0009.

(b) obtenha o valor pelo cômputo direto e compare com o valor aproximado obtido em (a).

(c) prove que se se usa n têrmos da série para o cômputo, o êrro é menor que $\dfrac{1}{2^{n+7}(n+1)(n+7)}$.

2. Dado $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos \dfrac{x}{2}$.

(a) mostre que $f^{(4)}(x) = -\frac{1}{4} f(x)$.

(b) desenvolva $f(x)$ com a série de Maclaurin até o sexto têrmo.

(c) qual o coeficiente de x^{12} nesta série? *Resp.* $-\dfrac{1}{64\,\underline{|12}}$.

CAPÍTULO XXI

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS *

201. — Equações diferenciais — ordem e grau. EQUAÇÃO DIFERENCIAL é uma equação onde figuram derivadas ou diferenciais. Frequentemente as temos empregado, como nos exemplos ilustrativos do § 139. Um exemplo simples de equação diferencial é (Exemplo Ilustrativo 1, § 139).

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{1}$$

Integrando, achamos

$$y = x^2 + C. \tag{2}$$

Outro exemplo (Exemplo ilustrativo 2, § 139) é a equação

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{3}$$

que, integrada, conduz à solução

$$x^2 + y^2 = 2C. \tag{4}$$

As equações (1) e (3) são exemplos de equações diferenciais *ordinárias* de *primeira ordem* e (2) e (4) são, respectivamente, as *soluções gerais*.

Outro exemplo de equação diferencial é

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0. \tag{5}$$

Esta é de *segunda ordem*, porque

* Neste capítulo estudamos apenas alguns tipos de equações diferenciais, precisamente, os tipos mais prováveis de serem encontrados pelo leitor nos compêndios elementares de mecânica e física.

A *ordem de uma equação diferencial* é a ordem da derivada de mais alta ordem que figura na equação.

A derivada de mais alta ordem que figura numa equação diferencial pode estar afetada de expoentes. O maior destes diz-se *grau da equação diferencial*. Assim, a equação diferencial

$$(6) \qquad y''^2 = (1 + y'^2)^3 ,$$

onde y' e y'' são, respectivamente, as derivadas de primeira e segunda ordem de y em relação a x, é de segundo grau e de segunda ordem.

202. — Soluções das equações diferenciais. Constantes de integração. *Solução* ou *integral* de uma equação diferencial é uma relação entre as variáveis que figuram na equação, compatível com a equação. Assim,

$$(1) \qquad y = a \operatorname{sen} x$$

é uma solução da equação diferencial

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 .$$

porque é uma relação entre as variáveis x e y da equação, compatível com a equação. Realmente, derivando (1) obtemos

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = - a \operatorname{sen} x .$$

e sustituídos os resultados de (1) e (3) em (2), temos

$$- a \operatorname{sen} x + a \operatorname{sen} x = 0 ,$$

que é uma identidade.

Em (1), a é uma constante arbitrária.

Semelhantemente, mostra-se que

$$(4) \qquad y = b \cos x$$

é uma solução de (2) para cada valor de b.

A relação

$$(5) \qquad y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

é ainda uma solução de (2). Esta engloba as soluções anteriores, pois basta dar valores convenientes às constantes arbitrárias c_1 e c_2 para que se tenha uma ou outra das soluções (1) e (4).

As constantes arbitrárias c_1 e c_2 são chamadas *constantes de integração*. Uma solução como (5) que contém tantas constantes arbitrárias essenciais quanto é a ordem da equação chama-se *integral geral* ou *solução geral da equação**. Qualquer solução obtida da solução geral dando valores particulares às constantes de integração chama-se *solução particular* da equação. Na prática, obtém-se soluções particulares da solução geral dando condições a serem satisfeitas pelas soluções particulares.

Exemplo ilustrativo. A solução geral da equação diferencial

$$(1) \qquad y'' + y = 0$$

é $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ (ver (5) acima).

Achar uma solução particular tal que

$$(2) \qquad y = 2,\ y' = -1, \text{ quando } x = 0\,.$$

SOLUÇÃO. Da solução geral

$$(3) \qquad y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

obtemos, derivando,

$$(4) \qquad y' = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x\,.$$

Substituindo em (3) e (4) os resultados (2), achamos $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Pondo êstes valores em (3) obtemos a solução particular desejada $y = 2 \cos x - \operatorname{sen} x$.

Considera-se resolvida uma equação diferencial quando a determinação da sua solução geral foi conduzida a uma ou mais integrações, quer estas possam ou não ser efetuadas.

Exemplo ilustrativo 1. Mostre que

$$(1) \qquad y = c_1 x \cos \ln x + c_2 x \operatorname{sen} \ln x + x \ln x$$

* Mostra-se nos compêndios de equações diferenciais que a solução geral de uma equação diferencial de ordem n tem n constantes arbitrárias.

é uma solução da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2\,y = x\ln x \tag{2}$$

Solução. Derivando (1) obtemos

$$\frac{dy}{dx} = (c_2 - c_1)\operatorname{sen}\ln x + (c_2 + c_1)\cos\ln x + \ln x + 1, \tag{3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(c_2 + c_1)\frac{\operatorname{sen}\ln x}{x} + (c_2 - c_1)\frac{\cos\ln x}{x} + \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Substituindo os resultados (1), (3) e (4) em (2) obtemos uma identidade.

Exemplo ilustrativo 2. Mostre que

$$y^2 - 4\,x = 0 \tag{5}$$

é uma particular solução da equação diferencial

$$xy'^2 - 1 = 0. \tag{6}$$

Solução. Derivando (5), obtemos

$$yy' - 2 = 0, \quad \text{ou seja,} \quad y' = \frac{2}{y}.$$

Substituindo este valor de y' em (6) e reduzindo obtemos $4x - y^2 = 0$, o que é verdadeiro por (5).

EXERCÍCIOS

Verifique as seguintes soluções das correspondentes equações diferenciais.

Equações diferenciais — *Soluções*

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x} = 0.$ — $y = c_1 + 2\,x + c_2x^2.$

2. $\dfrac{d^2V}{dr^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dV}{dr} = 0.$ — $V = \dfrac{c_1}{r} + c_2.$

3. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - \dfrac{ds}{dt} - 6\,s = 0.$ — $s = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}.$

4. $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 2\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x = 0.$ — $x = c_1e^{t} + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t}.$

5. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\dfrac{dy}{dx} + 8y^2 = 0.$ — $y = c\,(x - c)^2.$

6. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} - xy = 0.$ — $xy = 2\,e^{x} - 3\,e^{-x}.$

7. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0.$ $\qquad s = c_1 \cos(2t + c_2).$

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 13x = 39.$ $\qquad x = e^{3t}\cos 2t + 3.$

9. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{dy}{dx} = 0.$ $\qquad y = ae^{\frac{x}{b}} - b.$

10. $xy\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y\dfrac{dy}{dx} = 0.$ $\qquad \dfrac{x^2}{c_1} + \dfrac{y_2}{c_2} = 1.$

11. $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{1 + u^2}{1 + v^2}.$ $\qquad u = \dfrac{c + v}{1 - cv}.$

12. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 4s = 8t.$ $\qquad s = 2 \operatorname{sen} 2t + \cos 2t + 2t.$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}.$ $\qquad y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}.$

14. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5\cos 2t.$ $\qquad x = \cos 2t + 2\cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t.$

15. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3\cos 3t.$ $\qquad x = c_1\cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{2}t \operatorname{sen} 3t.$

16. $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3y^3.$ $\qquad \dfrac{1}{y^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}.$

204. Equações diferenciais de primeira ordem e do primeiro grau. Uma tal equação pode ser posta sob a forma

$$(A) \qquad M\,dx + N\,dy = 0\,.$$

na qual M e N são funções de x e y. As equações diferenciais mais comuns desta forma podem ser divididas em quatro tipos.

TIPO I. VARIÁVEIS SEPARADAS. Quando os termos de uma equação diferencial podem ser arranjados de modo a que ela tome a forma

$$(1) \qquad f(x)\,dx + F(y)\,dy = 0\,,$$

onde $f(x)$ é uma função só de x e $F(y)$ uma função só de y, diz-se que ela é de *variáveis separadas*. O processo usado para pô-la sob a forma (1) chama-se *separação as variáveis*. A solução de (1) é obtida por integração direta. Integrando (1), obtemos a solução geral

$$(2) \qquad \int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy = c\,,$$

onde c é uma constante arbitrária.

As equações que não são dadas sob a forma (1) podem, muitas vezes, ser conduzidas a essa forma pela seguinte regra de separação das variáveis.

PRIMEIRO PASSO. *Elimine os denominadores; multiplique ambos os membros pela diferencial da variável independente.*

SEGUNDO PASSO. *Reuna num só termo os que contem a mesma diferencial. Caso a equação tome a forma*

$$X\,Y\,dx + X'\,Y'\,dy = 0\,,$$

onde X, X' são funções só de x e Y, Y' funções só de y, ela pode ser conduzida à forma (1) dividindo ambos os membros por $X'\,Y$.

TERCEIRO PASSO. *Integre cada parte separadamente, como em* (2).

Exemplo ilustrativo 1. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)\,xy}\,.$$

SOLUÇÃO. Primeiro passo, $\quad (1+x^2)\,xy\,dy = (1+y^2)\,dx.$

Segundo passo $\quad (1+y^2)dx - x\,(1+x^2)y\,dy = 0\,.$

Para separar as variáveis, dividimos ambos os membros por $x\,(1+x^2)\,(1+y^2)$, o que fornece

$$\frac{dx}{x\,(1+x^2)} - \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0\,.$$

Terceiro passo, $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1+x^2)} - \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = C\,,$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} - \int \frac{y\,dy}{1+y^2} = C\,, \qquad \S\ 167$$

$$\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = C\,,$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = 2\ln x - 2C\,.$$

Este resultado pode ser posto em forma mais condensada fazendo $-2C = \ln c$, isto é, dando nova forma à constante arbitrária. Nossa solução torna-se, assim,

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = \ln x^2 + \ln c,$$

$$\ln(1+x^2)(1+y^2) = \ln cx^2,$$

$$(1+x^2)(1+y^2) = cx^2. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Resolver a equação

$$a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}.$$

SOLUÇÃO. *Primeiro passo.* $ax\,dy+2\,ay\,dx=xy\,dy.$

Segundo passo. $2\,ay\,dx+x\,(a-y)\,dy=0.$

Para separar as variáveis, dividimos ambos os membros por xy

$$\frac{2\,a\,dx}{x}+\frac{(a-y)\,dy}{y}=0.$$

Terceiro passo. $2\,a\int\frac{dx}{x}+a\int\frac{dy}{y}-\int dy=C,$

$$2\,a\ln x+a\ln y-y=C,$$
$$a\ln x^2y=C+y,$$
$$\ln x^2y=\frac{C}{a}+\frac{y}{a}.$$

Passando dos logaritmos às exponenciais, este resultado pode ser posto sob a forma

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}+\frac{y}{a}},$$

ou

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}}\;e^{\frac{y}{a}}.$$

Indicando a constante $e^{\frac{C}{a}}$ por c, obtemos a solução sob a forma

$$x^2y=ce^{\frac{y}{a}}.\quad \textit{Resp.}$$

TIPO II. EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS. A equação diferencial

$$(A)\qquad M\,dx+N\,dy=0$$

diz-se *homogênea* quando M e N são funções homogêneas de x e y do mesmo grau.* Estas equações se resolvem com a substituição

$$(3)\qquad y=vx.$$

* Uma função de x e y diz-se *homogênea* nas variáveis se o resultado da substituição de x e y por λx e λy respectivamente (sendo λ um número qualquer) dá para a função um valor igual ao primitivo multiplicado por uma certa potência de λ. Esta potência de λ diz-se o *grau de homogeneidade* da função.

Esta dá uma equação diferencial em v e x de variáveis separadas, para a integração da qual, portanto, usamos a regra acima.

De fato, de (A) obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}. \tag{4}$$

De (3) resulta

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v. \tag{5}$$

O segundo membro de (4) será uma função só de v quando for feita a sustituição (3). Logo, usando (5) e (3), obtemos de (4)

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v), \tag{6}$$

e as variáveis x e v podem ser separadas.

Exemplo ilustrativo. Resolver a equação

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}.$$

SOLUÇÃO. $$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$$

Aqui $M = y^2$, $N = x^2 - xy$ e ambas são homogêneas e do segundo grau em x e y. Temos também

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Façamos a substituição $y = vx$; obtemos

$$x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{v^2}{1 - v},$$

ou $$v\,dx + x(1 - v)\,dv = 0.$$

Para separar as variáveis, dividamos ambos os membros por vx; vem

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - v)\,dv}{v} = 0,$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{v} - \int dv = C,$$

$$\ln x + \ln v - v = C$$

$$\ln vx = C + v,$$

$$vx = e^{C+v} = e^C e^v$$

$$vx = ce^v.$$

Mas $v = \frac{y}{x}$; logo, a solução geral é

$$y = ce^{\frac{y}{x}}. \quad \textit{Resp.}$$

EXERCÍCIOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $(2 + y)\,dx - (3 - x)\,dy = 0.$ *Resp.* $(2 + y)(3 - x) = c.$
2. $xy\,dx - (1 + x^2)\,dy = 0$ $cy^2 = 1 + x^2.$
3. $x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0.$ $y = cx(x + 3).$
4. $\sqrt{1+x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0.$ *Resp.* $\text{arc sen } y = \ln c\,(x + \sqrt{1+x^2}).$
5. $d\rho + \rho \operatorname{tg}\theta\, d\theta = 0.$ $\rho = c \cos\theta.$
6. $(1 - x)\,dy - y^2\,dx = 0.$ $y \ln c\,(1 - x) = 1.$
7. $(x+2y)dx + (2x-3y)dy = 0.$ $x^2 + 4xy - 3y^2 = c.$
8. $(3x+5y)dx + (4x+6y)dy = 0.$ $(x + y)^2 (x + 2y) = c.$
9. $2(x + y)\,dx + y\,dy = 0.$

   Resp. $\frac{1}{2} \ln (2x^2 + 2xy + y^2) - \text{arc tg}\left(\frac{x + y}{x}\right) = c.$
10. $(8y+10x)dx + (5y+7x)dy = 0.$ $(x + y)^2 (2x + y)^3 = c.$
11. $(2x+y)dx + (x+3y)dy = 0.$ $2x^2 + 2xy + 3y^2 = c.$
12. $\sqrt{1-4t^2}ds + 2\sqrt{1-s^2}dt = 0.$ $s\sqrt{1-4t^2} + 2t\sqrt{1-s^2} = c.$
13. $2z(3z+1)dw + (1-2w)dz = 0.$ $(2w - 1)(1+3z) = 3cz.$
14. $2x\,dz - 2z\,dx = \sqrt{x^2+4z^2}dx.$ $1 + 4cz - c^2x^2 = 0.$
15. $(x+4y)\,dx + 2x\,dy = 0.$ $x^3 + 6x^2y = c.$
16. $(2x^2+y^2)dx + (2xy+3y^2)dy = 0.$ $2x^3 + 3xy^2 + 3y^3 = c.$
17. $\frac{du}{dv} = \frac{1 + u^2}{1 + v^2}.$ $u = \frac{v + c}{1 - cv}.$
18. $(3+2y)\,x\,dx + (x^2-2)\,dy = 0.$
19. $2(1+y)\,dx - (1-x)\,dy = 0.$
20. $(1+y)\,x\,dx - (1+x)\,y\,dy = 0.$
21. $(ax+b)\,dy - y^2\,dx = 0.$
22. $(3x+y)\,dx + (x+y)\,dy = 0.$
23. $xy(y+2)\,dx - (y+1)\,dy = 0.$
24. $(1+x^2)\,dy - (1-y^2)\,dx = 0.$
25. $(x-2y)dx - (2x+y)dy = 0.$

26. $(3x + 2y)\,dx + x\,dy = 0.$

27. $3(5x + 3y)\,dx + (11x + 5y)\,dy = 0.$

28. $(x^2 + y^2)\,dx + (2xy + y^2)\,dy = 0.$

29. $2y\,dx - (2x - y)\,dy = 0.$

Em cada um dos seguintes exercícios achar a solução particular que é determinada pelos valores dados de x e y.

30. $\dfrac{dx}{y} + \dfrac{4\,dy}{x} = 0;\ x = 4,\ y = 2.$ *Resp.* $x^2 + 4y^2 = 32.$

31. $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy;\ x = 1,\ y = 0.$ $y^2 = x^2 - x.$

32 $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx;\ x = \frac{1}{2},\ y = 0.$ $1 + 4y - 4x^2 = 0.$

33. $(1 + y^2)\,dy = y\,dx;\ x = 2,\ y = 2.$

34. Achar a equação da curva que passa pelo ponto $(2, 1)$ e cujo coeficiente angular é, em cada ponto, igual a $-\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)$.

Resp. $x^2 + 2xy = 8.$

35. Achar a equação da curva que passa pelo ponto $(1,0)$ e cujo coeficiente angular num ponto qualquer é igual a $\dfrac{y - 1}{x^2 + x}$.

Resp. $y(1 + x) = 1 - x.$

Tipo III. Equações lineares. Equação diferencial de primeira ordem *linear* é uma equação do tipo

$$(B) \qquad \frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

onde P e Q são funções só de x ou então constantes.

Semelhantemente, a equação

$$(C) \qquad \frac{dx}{dy} + Hx = J,$$

onde H e J são funções só de y ou então constantes, é uma equação *linear* na função x da variável independente y.

Para integrar (B), põe-se

$$y = uz, \tag{7}$$

onde z e u são funções de x a serem determinadas.

Derivando (7)

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \tag{8}$$

Substituindo os resultados (8) e (7) em (B), obtém-se

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + Puz = Q, \quad \text{ou}$$

$$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu\right)z = Q. \tag{9}$$

Agora determina-se u integrando

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0, \tag{10}$$

na qual as variáveis x e y são separadas. Usando o valor de u assim obtido, acha-se z resolvendo a equação

$$u\frac{dz}{dx} = Q, \tag{11}$$

na qual x e z podem ser separadas.

Òbviamente, os valores de u e z achados dêste modo satisfazem (9) e a solução de (B), é, portanto, dada por (7).

Os exemplos seguintes mostram os detalhes.

Exemplo ilustrativo 1. Resolver a equação

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}. \tag{12}$$

Solução. Esta é, evidentemente, do tipo (B), onde

$$P = -\frac{2}{x+1} \text{ e } Q = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Seja $y = uz$; então $\quad \dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dz}{dx} + z\dfrac{du}{dx}.$

Substituindo na dada equação (12), obtemos

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{\frac{5}{2}}, \quad \text{ou}$$

$$(13) \qquad u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x}\right)z = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Para determinar u fazemos o coeficiente de z igual a zero. Isto dá

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{1+x}.$$

Integrando, obtemos $\ln u = 2\ln(1+x) = \ln(1+x)^2$.

$$(14) \qquad \therefore u = (1+x)^2.^*$$

A equação (13) torna-se pois, visto ser eliminado o têrmo em z,

$$u\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Substituindo u pelo seu valor dado em (14),

$$\frac{dz}{dx} = (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Integrando,

$$(15) \qquad z = \frac{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Substituindo os resultados (15) e (14) em $y = uz$, obtemos a solução geral

$$y = \frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3} + C(x+1)^2. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. Deduza a fórmula da solução geral de (B).

Solução. Resolvendo (10), obtemos

$$\ln u + \int P\,dx = \ln k,$$

* Por razões de simplicidade tomamos o particular valor zero para constante de integração De outro modo, teríamos $u = c(1+x)^2$. Mas nos cálculos posteriores c é finalmente eliminada (ver Exemplo ilustrativo 2).

onde $\ln k$ é a constante de integração;

logo
$$u = ke^{-\int P\,dx}$$

Substituindo este valor de u em (11) e separando as variáveis z e x, obtemos

$$dz = \frac{Q}{k} e^{\int P\,dx}\,dx.$$

Integrando, e substituindo em (7), vem

$$y = e^{-\int P dx}\left(\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C\right). \quad \textit{Resp.}$$

Observe-se que a constante k não figura no resultado final. Por esta razão costuma-se omiti-la quando se integra (10).

Tipo IV. Equações cuja resolução se conduz à de uma linear. A resolução de algumas equações que não são lineares pode ser conduzida à de equações lineares mediante uma conveniente transformação de variáveis. Um tipo de tais equações é a seguinte

$$(D) \qquad \frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

onde P e Q são funções só de x ou então constantes.

A resolução de (D) pode ser conduzida à de uma equação linear, forma (B), tipo III, mediante a substituição $z = y^{-n+1}$. Tal expediente não é, contudo, necessário se empregarmos o mesmo método usando para achar a solução da equação do tipo (B). Vejamos isto com um exemplo.

Exemplo ilustrativo. Resolver a equação

$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \ln x \,.\, y^2.$$

Solução. Esta é, evidentemente, da forma (D), onde

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = a \ln x, \quad n = 2.$$

Seja $y = uz$; então
$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Substituindo em (16), obtemos

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + \frac{uz}{x} = a \ln x \,.\, u^2z^2,$$

$$u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)z = a \ln x \,.\, u^2z^2. \tag{17}$$

Para determinar u igualamos a zero o coeficiente de z; isto dá

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0\,,$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}\,.$$

Integrando, obtemos $\ln u = -\ln x = \ln \dfrac{1}{x}$,

$$u = \frac{1}{x}\,. \tag{18}$$

Como o termo em z se elimina, a equação (17) torna-se

$$u\frac{dz}{dx} = a \ln x \,.\, u^2z^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = a \ln x \,.\, uz^2.$$

Substituindo u pelo valor dado por (18),

$$\frac{dz}{dx} = a \ln x \,.\, \frac{z^2}{x}\,,$$

$$\frac{dz}{z^2} = a \ln x \,.\, \frac{dx}{x}\,.$$

Integrando, obtemos $-\dfrac{1}{z} = \dfrac{a(\ln x)^2}{2} + C$,

$$z = -\frac{2}{a(\ln x)^2 + 2C}\,. \tag{19}$$

Substituindo os resultados (19) e (18) em $y = uz$, obtemos a solução geral

$$y = -\frac{1}{x}\,.\,\frac{2}{a(\ln x)^2 + 2C}\,,$$

ou

$$xy[a(\ln x)^2 + 2\,C] + 2 = 0. \quad \textit{Resp}$$

EXERCÍCIOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2x.$ *Resp.* $y = cx^2 - 2x.$

2. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = -x.$ $y = x + cx^2.$

3. $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x.$ $y = x + ce^{2x}.$

4. $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = -2nx.$ $y = nx + cx^3.$

5. $\dfrac{dy}{dx} - y = -2e^{-x}.$ $y = e^{-x} + ce^x.$

6. $\dfrac{ds}{dt} - s\,\mathrm{ctg}\,t = 1 - (t+2)\,\mathrm{ctg}\,t.$ $s = t + 2 + c\,\mathrm{sen}\,t.$

7. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 2y^2.$ $cx^2y + 2xy - 1 = 0.$

8. $\dfrac{ds}{dt} + s\,\mathrm{tg}\,t = 2t + t^2\,\mathrm{tg}\,t.$ $s = t^2 + c\cos t.$

9. $x\dfrac{dy}{dx} - y = (x-1)e^x.$ $y = e^x + cx.$

10. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = y^3.$ $cx^2y^2 + 2xy^2 - 1 = 0.$

11. $\dfrac{ds}{dt} + \dfrac{s}{t} = \cos t + \dfrac{\mathrm{sen}\,t}{t}\cdot$ $s = \mathrm{sen}\,t + \dfrac{c}{t}\cdot$

12. $nx\dfrac{dy}{dx} + 2y = xy^{n+1}.$ $cx^2y^n + xy^n - 1 = 0.$

13. $\dfrac{ds}{dt} + s = \cos t - \mathrm{sen}\,t.$ $s = \cos t + ce^{-t}.$

14. $\dfrac{ds}{dt} - s\,\mathrm{ctg}\,t = e^t(1 - \mathrm{ctg}\,t).$ $s = e^t + c\,\mathrm{sen}\,t.$

15. $x\dfrac{dy}{dx} - 2y + 3x = 0.$

16. $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x.$

17. $x\dfrac{dy}{dx} + y = (1+x)e^x.$

20. $\dfrac{ds}{dt} - s\,\mathrm{ctg}\,t + \mathrm{cossec}\,t = 0.$

21. $2\dfrac{dy}{dx} + y = (x-1)y^3.$

22. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\cos x - \mathrm{sen}\,x.$

18. $\dfrac{dy}{dx} - y = 1 - 2x.$

19. $x\dfrac{dy}{dx} + y + x^2y^2 = 0.$

23. $n\dfrac{dy}{dx} - y + (x^2+2x)y^{n+1} = 0.$

24. $\dfrac{ds}{dt} + s\,\mathrm{tg}\,t = e^{-t}(\mathrm{tg}\,t - 1).$

Em cada um dos seguintes exercícios achar a solução particular que é determinada pelos valores dados de x e y.

25. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2e^x;\ x=1,\ y=0.$ *Resp.* $y = x^2(e^x - e).$

26. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2};\ x=1,\ y=2.$ $y = \dfrac{x+1}{x^2}.$

27. $\dfrac{dx}{dy} + y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x;\ x=0,\ y=-1.$ $y = \mathrm{sen}\,x - \cos x.$

28. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3;\ x=0,\ y=1.$ $2y = (x+1)^4 + (x+1)^2.$

29. Achar a equação da curva que passa pelo ponto (1,0) e cujo coeficiente angular é igual a $\dfrac{2y+x+1}{x}$ em cada ponto (x, y).

Resp. $2y = 3x^2 - 2x - 1.$

30. Achar a equação da curva que passa pelo ponto (1,1) e cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $\dfrac{y^2 \ln x - y}{x}$.

Resp. $y(1 + \ln x) = 1.$

205. — Dois tipos especiais de equações diferenciais de ordem mais elevada. As equações diferenciais estudadas nêste parágrafo ocorrem frequentemente.

$$(E) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = X,$$

onde X é uma função só de x ou então uma constante.

Para integrar, multipliquemos primeiro ambos os membros por dx. Integrando depois, temos

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^ny}{dx^n}\,dx = \int X\,dx + c_1.$$

Repitamos o processo $(n - 1)$ vezes. Obteremos, então, a integral geral, a qual contém n constantes arbitrárias.

Exemplo ilustrativo. Resolver $\dfrac{d^3y}{dx^3} = xe^x$.

Solução. Multiplicando ambos os membros por dx e integrando,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x\,dx + C_1,$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1.$$

Repetindo o processo,

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x\,dx - \int e^x\,dx + \int C_1\,dx + C_2,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - 2\,e^x + C_1x + C_2.$$

$$y = \int xe^x\,dx - \int 2\,e^x\,dx + \int C_1x\,dx + \int C_2\,dx + C_3$$

$$= xe^x - 3\,e^x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Logo $\qquad y = xe^x - 3\,e^x + c_1x^2 + c_2x + c_3.$ *Resp.*

Um segundo tipo de muita importância é

$$(F) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Y,$$

onde Y é uma função só de y.

Para integrar procedamos assim. Escrevamos a equação

$$dy' = Y\,dx,$$

e multipliquemos ambos os membros por y'; obtemos

$$y'\,dy' = Y\,y'\,dx.$$

Mas $y'\,dx = dy$ e portanto a equação precedente torna-se

$$y'\,dy' = Y\,dy$$

As variáveis y e y' estão agora separadas. Obtém-se, integrando,

$$\tfrac{1}{2} y'^2 = \int Y\,dy + C_1.$$

O segundo membro é uma função de y. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, separando as variáveis x e y e integrando de novo, obtemos o resultado.

O exemplo seguinte ilustra o método.

Exemplo ilustrativo. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0.$

Solução. Aqui $\dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$, e portanto a equação é do tipo (F).

Multiplicando ambos os membros por $y'\,dx$ e procedendo como acima, obtemos

$$y'\,dy = -a^2y\,dy.$$

$$\tfrac{1}{2} y'^2 = -\tfrac{1}{2} a^2y^2 + C.$$

Integrando,

$$y' = \sqrt{2\,C - a^2y^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - a^2y^2},$$

pondo $2\,C = C_1$ e tomando o sinal positivo do radical. Separando as variáveis, obtemos

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - a^2y^2}} = dx.$$

Integrando, $\dfrac{1}{a} \text{arc sen} \dfrac{ay}{\sqrt{C_1}} = x + C_2,$

ou

$$\text{arc sen} \frac{ay}{\sqrt{C_1}} = ax + aC_2.$$

Isto é o mesmo que $\dfrac{ay}{\sqrt{C_1}} = \text{sen}\,(ax + aC_2)$

$$= \text{sen}\, ax \cos aC_2 + \cos ax\, \text{sen}\, aC_2, \quad (4), \S\, 2$$

ou

$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{a} \cos aC_2 . \text{sen}\, ax + \frac{\sqrt{C_1}}{a} \text{sen}\, aC_2 . \cos ax.$$

Logo $y = c_1\, \text{sen}\, ax + c_2 \cos ax.$ *Resp.*

EXERCÍCIOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = t^2.$ *Resp.* $x = \dfrac{t^4}{12} + c_1t + c_2.$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = x.$ $x = c_1e^t + c_2e^{-t}.$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4 \operatorname{sen} 2t.$ $x = -\operatorname{sen} 2t + c_1t + c_2.$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}.$ $x = \dfrac{e^{2t}}{4} + c_1t + c_2.$

5. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{(s+1)^3}.$ $c_1(s+1)^2 = (c_1t+c_2)^2+1.$

6. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{\sqrt{as}}.$ $3t = 2a^{\frac{1}{2}}(s^{\frac{1}{2}} - 2c_1)(s^{\frac{1}{2}}+c_1)^{\frac{1}{2}} + c_2.$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{a}{y^3}.$ $c_1y^2 = a + (c_1t + c_2)^2.$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{a^2}{y^2} = 0.$

Resp. $\sqrt{c_1y^2+y} - \dfrac{1}{\sqrt{c_1}} \ln(\sqrt{c_1y} + \sqrt{1+c_1y}) = ac_1\sqrt{2}\,x + c_2.$

9. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \dfrac{k}{s^2} = 0.$ Achar t, sabendo que $s = a$, $\dfrac{ds}{dt} = 0$, para $t = 0$.

Resp. $t = \sqrt{\dfrac{a}{2k}}\left\{\sqrt{as-s^2} + a \operatorname{arc\,sen}\sqrt{\dfrac{a-s}{a}}\right\}.$

10. $\dfrac{d^3y}{dx^3} = x + \operatorname{sen} x.$ 11. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = a\cos nt.$ 12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4y.$

206. — Equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Equações da forma

$$(G) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

onde p e q são constantes, são importantes na matemática aplicada.

Para obter uma solução particular de (G), procuremos determinar o valor da constante r de modo a que (G) seja satisfeita por

$$(1) \qquad y = e^{rx}.$$

Derivando (1), obtemos

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}. \tag{2}$$

Substituindo os resultados (1) e (2) em (G) e dividindo ambos os membros por e^{rx}, obtemos

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{3}$$

uma equação do segundo grau cujas raízes são os valores de r procurados. A equação (3) chama-se *equação auxiliar* de (G). Se (3) tem raízes reais e distintas r_1 e r_2, então

$$y = e^{r_1x} \quad \text{e} \quad y = e^{r_2x} \tag{4}$$

são soluções particulares distintas de (G) e a solução geral é

$$y = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x}. \tag{5}$$

De fato, (5) contém duas constantes arbitrárias essenciais e (G) é satisfeita por ela.

Exemplo ilustrativo 1. Resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0. \tag{6}$$

SOLUÇÃO. A equação auxiliar é

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \tag{7}$$

Resolvendo (7), obtemos as raízes 3 e -1 e portanto a solução geral da equação dada é

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}. \quad \textit{Resp.}$$

Verificação. Substituindo este valor de y em (6), temos uma identidade.

A equação (3) *tem raízes imaginárias.* Se as raízes da equação auxiliar (3) são imaginárias, os expoentes em (5) são também imaginários. Pode-se, contudo, achar uma solução geral e real, escolhendo valores imaginários para c_1 e c_2 que sejam conjugados. De fato, sejam

$$r_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad r_2 = a - b\sqrt{-1} \tag{8}$$

as raízes imaginárias conjugadas da equação (3). Então

$$(9)\quad e^{r_1x}=e^{(a+b\sqrt{-1})x}=e^{ax}e^{bx\sqrt{-1}},\ e^{r_2x}=e^{(a-b\sqrt{-1})x}=e^{ax}e^{-bx\sqrt{-1}}.$$

Substituindo estes valores em (5), obtemos

$$(10)\qquad y=e^{ax}\,(c_1e^{bx\sqrt{-1}}+c_2e^{-bx\sqrt{-1}}).$$

Mostra-se em álgebra que*

$$e^{bx\sqrt{-1}}=\cos bx+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,bx,\quad e^{-bx\sqrt{-1}}=\cos bx-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,bx.$$

Substituídos estes valores em (10), a solução geral pode pôr-se sob a forma

$$(11)\qquad y=e^{ax}\,(A\cos bx+B\,\mathrm{sen}\,bx),$$

onde as novas constantes arbitrárias A e B estão ligadas às antigas pelas relações $A=c_1+c_2$, $B=(c_1-c_2)\sqrt{-1}$, isto é, tomamos para constantes c_1 e c_2 em (5) as constantes imaginárias

$$c_1=\tfrac{1}{2}(A-B\sqrt{-1}),\quad c_2=\tfrac{1}{2}(A+B\sqrt{-1}).$$

Dando a A e B em (11) os valores 1 e 0 e depois 0 e 1, vemos que

$$(12)\qquad y=e^{ax}\cos bx\quad \text{e}\quad y=e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx$$

são soluções particulares reais da equação (G).

---

* Seja $i=\sqrt{-1}$ e admitamos que a série de e^x do Problema 1, § 194, represente a função quando x é substituído por ibx. Então, como $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, etc., temos

$$(14)\qquad e^{ibx}=1+ibx-\frac{b^2x^2}{\underline{|2}}-i\frac{b^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{b^4x^4}{\underline{|4}}+i\frac{b^5x^5}{\underline{|5}}-\dots.$$

Temos também, substituindo x por bx em (7) e (8), § 194,

$$\cos bx=1-\frac{b^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{b^4x^4}{\underline{|4}}-\dots,\qquad \mathrm{sen}\,bx=bx-\frac{b^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{b^5x^5}{\underline{|5}}-\dots.$$

Logo, pelo § 195,

$$(15)\qquad \cos bx+i\,\mathrm{sen}\,bx=1+ibx-\frac{b^2x^2}{\underline{|2}}-i\frac{b^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{b^4x^4}{\underline{|4}}+i\frac{b^5x^5}{\underline{|5}}-\dots,$$

admitindo que a série represente a função. Os segundos membros de (14) e (15) são idênticos. Logo, $e^{ibx}=\cos bx+i\,\mathrm{sen}\,bx$.

Exemplo ilustrativo 2. Resolver

$$(13) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0\,.$$

Solução. A equação auxiliar (3) é

$$r^2 + k^2 = 0. \quad \therefore \quad r = \pm k\sqrt{-1}\,.$$

Comparando com (8), vemos que $a = 0$, $b = k$; logo, por (11), a solução geral é

$$y = A\cos kx + B \operatorname{sen} kx.$$

Verificação. Substituído este valor de y em (13), ela é satisfeita. Confronte êste método com o usado para o mesmo exemplo no § 205 ($k = a$).

Observação. Obtém-se uma forma diferente da solução fazendo $A = C\cos\alpha$, $B = C\operatorname{sen}\alpha$ no valor supra de y. Então $y = C\cos(kx - \alpha)$. (Por (4), p. 3).

As raízes de (3) *são reais e iguais.* As raízes da equação auxiliar (3) serão iguais se $p^2 = 4q$. Nêste caso, substituindo q por $\frac{1}{4}p^2$, a equação (3) pode ser posta sob a forma

$$(14) \qquad r^2 + pr + \tfrac{1}{4}p^2 = (r + \tfrac{1}{2}p)^2 = 0\,,$$

e portanto $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}p$. Para o caso atual,

$$(15) \qquad y = e^{r_1x} \quad \text{e} \quad y = xe^{r_1x}$$

são soluções particulares distintas e

$$(16) \qquad y = e^{r_1x}(c_1 + c_2x)$$

é a solução geral.

Para comprovar este resultado é bastante mostrar que a segunda função em (15) é uma solução da equação diferencial. Ora, derivando, temos

$$(17) \qquad y = xe^{r_1x}, \frac{dy}{dx} = e^{r_1x}(1 + r_1x); \frac{d^2y}{dx^2} = e^{r_1x}(2r_1 + r_1^2x).$$

Substituindo os resultados (17) no primeiro membro de (G), obtém-se depois de cancelar e^{r_1x},

$$(18) \qquad (r_1^2 + pr_1 + q)\,x + 2r_1 + p\,.$$

Esta expressão é nula porque r_1 satisfaz (3) e é igual a $-\frac{1}{2}p$.

Exemplo ilustrativo 3. Resolver

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + s = 0. \tag{19}$$

Achar a solução particular tal que

$$s = 4 \text{ e } \frac{ds}{dt} = -2 \text{ quando } t = 0.$$

Solução. A equação auxiliar é

$$r^2 + 2r + 1 = 0, \quad \text{ou} \quad (r+1)^2 = 0$$

Logo as raízes são iguais e iguais a -1 e portanto, por (16),

$$s = e^{-t}(c_1 + c_2 t). \tag{20}$$

Esta é a solução geral.

Para achar a solução particular pedida, devemos achar valores para as constantes c_1 e c_2 tais que as dadas condições

$$s = 4 \text{ e } \frac{ds}{dt} = -2 \text{ quando } t = 0$$

sejam satisfeitas.

Substituindo na solução geral (20) os valores dados $s = 4$ e $t = 0$, temos $4 = c_1$ e portanto

$$s = e^{-t}(4 + c_2 t). \tag{21}$$

Derivando (21) em relação a t, obtemos

$$\frac{ds}{dt} = e^{-t}(c_2 - 4 - c_2 t).$$

Pelas condições dadas, $\frac{ds}{dt} = -2$ quando $t = 0$.

Substituindo, obtemos $-2 = c_2 - 4$ e portanto $c_2 = 2$. Logo, a solução particular pedida é $s = e^{-t}(4 + 2t)$. *Resp.*

EXERCÍCIOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2x = 0.$ *Resp.* $x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0.$ $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x}.$

3. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 2\dfrac{ds}{dt} + s = 0.$ $s = c_1e^t + c_2te^t.$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0.$ $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t.$

5. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0.$ $s = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}.$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0.$ $y = c_1 + c_2e^{-4x}.$

7. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2\dfrac{ds}{dt} + 2s = 0.$ $s = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$

8. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 2\dfrac{ds}{dt} + 5s = 0.$ $s = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t).$

9. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 5\dfrac{d\theta}{dt} + 4\theta = 0.$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0.$

12. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 3s = 0.$

13. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 3s = 0.$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - n\dfrac{dy}{dx} = 0.$

15. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 6\dfrac{ds}{dt} + 25s = 0.$

16. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 10x = 0.$

Nos exercícios seguintes achar a solução particular satisfazendo as condições dadas.

17. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 3\dfrac{ds}{dt} + 2s = 0;\ s = 0,\ \dfrac{ds}{dt} = 1,$ quando $t = 0.$ *Resp.* $s = e^{-t} - e^{-2t}.$

18. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0;\ x = a,\ \dfrac{dx}{dt} = 0,$ quando $t = 0.$ $x = a \cos nt.$

19. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - n^2x = 0;\ x = 2,\ \dfrac{dx}{dt} = 0,$ quando $t = 0.$ *Resp.* $x = e^{nt} + e^{-nt}.$

20. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - 8y = 0;\ y = 0,\ \dfrac{dy}{dt} = 24,$ quando $t = 0.$

Resp. $y = 4(e^{2t} - e^{-4t}).$

21. $\frac{d^2s}{dt^2} - 8\frac{ds}{dt} + 16\,s = 0$; $s = 0, \frac{ds}{dt} = 1$, quando $t = 0$. *Resp.* $s = te$

22. $\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dx}{dt} = 0$; $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = a$, quando $t = 0$. $x = e^{at} - 1$.

23. $\frac{d^2s}{dt^2} + 8\frac{ds}{dt} + 25\,s = 0$; $s = 4$, $\frac{ds}{dt} = -16$, quando $t = 0$.

Resp. $s = 4\,e^{-4t}\cos 3\,t$.

24. $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 10\,x = 0$; $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 4$, quando $t = 0$.

Resp. $x = e^{3t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$.

25. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4\,s = 0$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 4$, quando $t = 0$.

26. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\,x = 0$; $x = 10$, $\frac{dx}{dt} = 0$, quando $t = 0$.

27. $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = 0$; $y = 1$, $\frac{dy}{dt} = 2$, quando $t = 0$.

28. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4\,x = 0$; $x = 2$, $\frac{dx}{dt} = 5$, quando $t = 0$.

29. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 13\,x = 0$; $x = 2$, $\frac{dx}{dt} = 4$, quando $t = 0$.

30. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4\frac{ds}{dt} + 8\,s = 0$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 8$, quando $t = 0$.

Para resolver a equação diferencial

$$\text{(H)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = X$$

onde p e q são constantes e X é uma função da variável independente x ou uma constante, são necessários três passos.

Primeiro Passo. Resolva a equação (G). Seja

$$(22) \qquad y = u$$

a solução geral. Esta é chamada *função complementar de* (H).

Segundo Passo. *Obtenha, por tentativa, uma solução particular*

$$(23) \qquad y = v$$

(H).

TERCEIRO PASSO. *A solução geral de* (H) *é então*

$$y = u + v. \tag{24}$$

De fato, quando o valor de y de (24) é substituído em (H), vê-se que a equação é satisfeita e, por outro lado, (24) contém duas constantes arbitrárias essenciais.

Para determinar a solução particular (23), são úteis as diretrizes seguintes (ver também o § 208). (Nas fórmulas todas as letras, exceto x, representam constantes e x representa a variável independente).

Caso geral. Se $y = X$ não é uma solução particular de (G) e se

$X = a + bx$, tomamos $y = v = A + Bx$;
$X = ae^{bx}$, tomamos $y = v = Ae^{bx}$;
$X = a_1 \cos bx + a_2 \operatorname{sen} bx$, tomamos $y = v = A_1 \cos bx + A_2 \operatorname{sen} bx$.

Caso especial. Se $y = X$ é uma solução particular de (G), tomamos para v a forma acima multiplicada por x (variável independente).

O método consiste em pôr $y = v$, como é dada acima, em (H) e determinar as constantes A, B, A_1 e A_2 de modo tal que (H) seja satisfeita.

Exemplo ilustrativo 4. Resolver

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2x. \tag{25}$$

SOLUÇÃO. *Primeiro passo.* A função complementar u é obtida da solução geral de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0. \tag{26}$$

Pelo exemplo ilustrativo 1, acima, temos pois

$$y = u = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}. \tag{27}$$

Segundo passo. Como $y = X = 2x$ não é uma solução particular de (26), tomamos como solução particular de (25)

$$y = v = A + Bx. \tag{28}$$

Substituindo êste valor em (25) e reduzindo, obtemos

$$-2B - 3A - 3Bx = 2x. \tag{29}$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, vem

$$-2B - 3A = 0, \quad -3B = 2.$$

Resolvendo, $A = \frac{4}{9}$, $B = -\frac{2}{3}$. Substituindo em (28), temos a solução particular

$$(30) \qquad y = v = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x.$$

Terceiro passo. De (27) e (30) resulta, pois, a solução geral

$$y = u + v = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 5. Resolver

$$(31) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{-x}.$$

SOLUÇÃO. *Primeiro passo.* A função complementar é (27), ou

$$(32) \qquad y = u = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}.$$

Segundo passo. Aqui $y = X = 2e^{-x}$ é uma solução particular de (26), pois pode ser obtida da solução geral (32) pondo $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Consequentemente, tomamos como solução particular v de (31)

$$(33) \qquad y = v = Axe^{-x}.$$

Derivando (33), obtemos

$$(34) \qquad \frac{dy}{dx} = Ae^{-x}(1 - x), \frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{-x}(x - 2).$$

Substituindo os resultados (33) e (34) em (31), obtemos

$$(35) \qquad Ae^{-x}(x - 2) - 2Ae^{-x}(1 - x) - 3Axe^{-x} = 2e^{-x}.$$

Simplificando, vem $-4Ae^{-x} = 2e^{-x}$ e portanto $A = -\frac{1}{2}$. Substituindo em (33), obtemos

$$(36) \qquad y = v = -\tfrac{1}{2}xe^{-x}.$$

Terceiro passo. A solução geral de (31) é, portanto,

$$y = u + v = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \tfrac{1}{2}xe^{-x}.$$

Exemplo ilustrativo 6. Determinar a solução particular de

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2\cos 2t, \tag{37}$$

tal que
$$s = 0 \text{ e } \frac{ds}{dt} = 2 \text{ quando } t = 0.$$

Solução. Procuremos primeiro a solução geral.

Primeiro passo. Resolvendo

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0, \tag{38}$$

achamos a função complementar

$$s = u = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t. \tag{39}$$

Segundo passo. Examinando o segundo membro de (37), observamos que $s = 2\cos 2t$ é uma solução particular de (38) que resulta de (39) quando $c_1 = 2$, $c_2 = 0$. Logo, tomamos como solução particular $s = v$ de (37)

$$s = v = t(A_1 \cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t). \tag{40}$$

Derivando (40), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = A_1 \cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t - 2t(A_1 \operatorname{sen} 2t - A_2 \cos 2t). \\ \dfrac{d^2s}{dt^2} = -4A_1 \operatorname{sen} 2t + 4A_2 \cos 2t - 4t(A_1 \cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t). \end{cases} \tag{41}$$

Substituindo os resultados (40) e (41) em (37) e simplificando, vem

$$-4A_1 \operatorname{sen} 2t + 4A_2 \cos 2t = 2\cos 2t. \tag{42}$$

Esta equação torna-se uma identidade quando $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2}$. Substituindo em (40) resulta

$$s = v = \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t. \tag{43}$$

Terceiro passo. Por (39) e (43) a solução geral de (37) é

$$s = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t. \tag{44}$$

Agora devemos determinar c_1 e c_2 de modo que

$$s = 0 \text{ e } \frac{ds}{dt} = 2 \text{ quando } t = 0. \tag{45}$$

Derivando (44),

$$\frac{ds}{dt} = -2\, c_1 \operatorname{sen} 2\,t + 2\, c_2 \cos 2\,t + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\,t + t \cos 2\,t. \tag{46}$$

Substituindo as dadas condições (45) em (44) e (46), vem

$$0 = c_1,\ 2 = 2\, c_2. \qquad c_1 = 0,\ c_2 = 1.$$

Pondo estes valores em (44), a solução particular pedida é

$$s = \operatorname{sen} 2\,t + \tfrac{1}{2}\, t \operatorname{sen} 2\,t. \quad \textit{Resp.} \tag{47}$$

EXERCÍCIOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = at + b.$ *Resp.* $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + at + b.$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = ae^{bt}.$ $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \dfrac{ae^{bt}}{b^2+1}.$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 4 \cos t.$ $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + 2\,t \operatorname{sen} t.$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 4 \operatorname{sen} 2\,t.$ $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{4}{3} \operatorname{sen} 2\,t.$

5. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4\,s = at + b.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}(at + b).$

6. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4\,s = 2\,e^t.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t.$

7. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4\,s = e^{2t}.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{4}\, te^{2t}.$

8. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4\,s = 2 \cos 2\,t.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} \cos 2\,t.$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9\,y = 5\,x^2.$ $y = c_1 \cos 3\,x + c_2 \operatorname{sen} 3\,x + \frac{5}{9} x^2 - \frac{10}{81}.$

10. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} - 2\,x = 4\,t.$ *Resp.* $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 1 - 2\,t.$

11. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = 8.$ $x = c_1 e^t + c_2 te^t + 8.$

12. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4\dfrac{ds}{dt} + 3\,s = 6\,e^{2t}$ $s = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - 6\,e^{2t}.$

13. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 8e^{2t}$. $\quad s = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + \frac{4}{5}e^{2t}$.

14. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 4e^t$. $\quad x = c_1e^t + c_2e^{3t} - 2te^t$.

15. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\cos t$. $\quad y = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) + \frac{3}{5}\cos t - \frac{3}{10}\operatorname{sen} t$.

16. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\operatorname{sen} 2t$. $\quad y = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t) + \frac{12}{17}\cos 2t + \frac{3}{17}\operatorname{sen} 2t$.

17. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 3\cos 2t$.

18. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\operatorname{sen} 2t$.

19. $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 2 + e^t$.

20. $\frac{d^2z}{dt^2} - 4z = t - e^t$.

21. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = t^2 - 2$.

22. $4\frac{d^2s}{dt^2} + s = 5\cos\frac{t}{2}$.

23. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 2\operatorname{sen} t$.

24. $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 16x = 4 - 8t$.

25. $\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 25y = 5\cos 2t$.

26. $\frac{d^2s}{dt^2} + 6\frac{ds}{dt} + 10s = 5\operatorname{sen} 2t$.

Nos exercícios seguintes achar a solução particular que satisfaz as dadas condições

27. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = t + \frac{1}{2}$; $s = \frac{1}{18}$, $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{9}$, quando $t = 0$.

Resp. $s = \frac{1}{9}t + \frac{1}{18}$.

28. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 9e^{3t}$; $s = 1$, $\frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}$, quando $t = 0$.

Resp. $s = \frac{1}{2}(\cos 3t + e^{3t})$.

29. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 5\cos 2t$; $s = 1$, $\frac{ds}{dt} = 3$, quando $t = 0$.

Resp. $s = \operatorname{sen} 3t + \cos 2t$.

30. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 3\cos 3t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 6$, quando $t = 0$.

Resp. $s = 2\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} 3t$.

31. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 2t + 1$ $x = \frac{1}{3}$, $\frac{dx}{dt} = -\frac{4}{9}$, quando $t = 0$

Resp. $x = \frac{1}{9}(e^{3t} + e^{-t} - 6t + 1)$

32. $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 13x = 39$; $x = 4$, $\frac{dx}{dt} = 3$, quando $t = 0$.

Resp. $x = e^{3t}\cos 2t + 3$.

33. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 4 - 3t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$, quando $t = 0$.

34. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9s = 6t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 0$, quando $t = 0$.

35. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = 2x$; $y = 2$, $\frac{dy}{dx} = 0$, quando $x = 0$.

36. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 2\cos 2t$; $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 2$, quando $t = 0$.

37. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2\cos 2t$; $s = 0$, $\frac{ds}{dt} = 2$, quando $t = 0$.

38. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 2x = 2\,\text{sen}\,t$; $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, quando $t = 0$.

39. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^x$; $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$, quando $x = 0$.

40. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 4e^{2x}$; $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 2$, quando $x = 0$.

207.—Aplicações. Lei dos juros compostos. Uma simples aplicação das equações diferenciais é fornecida por problemas nos quais a velocidade de variação da função em relação à variável (§ 50) para um valor qualquer da variável é proporcional ao correspondente valor da função, isto é, se $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = ky, \tag{1}$$

onde k é uma constante. Nesta equação as variáveis são separadas, isto é, trata-se de uma equação do tipo I (§ 204). Resolvendo, obtemos

$$y = ce^{kx}, \tag{2}$$

onde c é uma constante arbitrária, isto é, a solução é uma exponencial (§ 62). Reciprocamente, dada a exponencial (2), vê-se fàcilmente, por derivação, que y satisfaz (1). A ligação de (1) com o nome "lei dos juros compostos" mostra-se como segue:

Seja y = uma soma em cruzeiros acumulando a juros compostos;

i = juros em cruzeiros sobre um cruzeiro durante um ano;

Δt = intervalo de tempo medido em anos;

Δy = juros dos y cruzeiros no intervalo de tempo Δt.

Então $\Delta y = iy\Delta t$ e portanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = iy\,. \tag{3}$$

A equação (3) diz que a velocidade de variação média de y em relação a t (§ 50) no período de tempo Δt é proporcional ao próprio y. No comércio, os juros são acrescentados ao capital em determinados intervalos de tempo—anualmente, trimestralmente, etc.; em outras palavras, y varia descontinuamente em relação a t. Mas, na natureza, a variação se processa, no todo, de modo contínuo. Dêste modo, para adaptar a equação (3) aos fenômenos naturais devemos imaginar a soma y acumulando de modo contínuo, isto é, substituir a equação (3) por

$$\frac{dy}{dt} = iy\,.$$

Assim fazendo, a velocidade de variação de y é proporcional a y, o que está de acordo com (1) se $k = i$.

Em (1) a função y diz-se *variável segundo a lei dos juros compostos*.

Um segundo exemplo é fornecido pela integral geral da equação

$$\frac{dy}{dx} = ky + c\,, \tag{4}$$

onde k e c são constantes não nulas. Realmente, pondo $c = ak$, (4) pode se pôr sob a forma

$$\frac{d}{dx}(y + a) = k(y + a). \tag{5}$$

Esta equação diz que a função $y + a$ varia de acordo com a lei dos juros compostos. A equação diferencial (4), ou (5), é resolvida como ...s do tipo I, § 204. A solução é

$$y = ce^{kx} - a. \tag{6}$$

Exemplo ilustrativo 1. A função y de x varia segundo a lei dos juros compostos. Quando $x = 1$, $y = 4$; quando $x = 2$, $y = 12$. Achar a lei.

Solução. Por (1) temos

$$\frac{dy}{dx} = ky. \tag{7}$$

Separando as variáveis e integrando, vem

$$\ln y = kx + C.$$

Temos que achar os valores de k e C. Substituamos os dados valores de x e y. Temos

$$\ln 4 = k + C, \quad \ln 12 = 2k + C.$$

Resolvendo, $k = \ln 12 - \ln 4 = \ln 3 = 1{,}0986$, $C = \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$.

Portanto, $\ln y = 1{,}0986\,x + \ln \frac{4}{3}$, e $y = \frac{4}{3} e^{1{,}0986x}$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. *Diluição de uma solução.* Põe-se água num vaso contendo uma solução salina (ou ácida) afim de reduzir a concentração da substância. O volume v da mistura no vaso permanece constante. Se s = quantidade de sal (ou ácido) no instante t e se x = quantidade de água derramada, mostrar que a velocidade de decréscimo de s em relação a x varia proporcionalmente a s, precisamente, que

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}.$$

Solução. Como s = quantidade de sal na mistura de volume total v, a quantidade de sal em outro volume qualquer u da mistura é $\frac{s}{v}u$.

Suponhamos que um volume Δx da mistura se escoa do vaso. A quantidade de sal que escoa é $\frac{s}{v}\Delta x$ e portanto a variação na quantidade de sal do vaso é dada por

$$\Delta s = -\frac{s}{v}\Delta x. \tag{8}$$

Suponhamos agora que um volume Δx de água seja derramado no vaso afim de que o volume primitivo v de água seja mantido. Resulta, então, de (8) que a razão entre a quantidade de sal escoado e o volume de água acrescentado é dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = -\frac{s}{v}.$$

Quando $\Delta x \to 0$, obtemos a velocidade de variação instantânea de s em relação a x, precisamente,

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}. \quad \textit{Resp.}$$

Logo, s varia de acôrdo com a lei dos juros compostos.

PROBLEMAS

1. A velocidade de variação de uma função y em relação a x é igual a 1/3 de y e $y = 4$ quando $x = -1$. Achar a lei ligando x e y.
Resp. $y = 5{,}58\, e^{\frac{1}{3}x}$

2. A velocidade de variação de uma função y em relação a x é igual a $2 - y$ e $y = 8$ quando $x = 0$. Achar a lei.
Resp. $y = 6e^{-x} + 2$.

3. No exemplo ilustrativo 2, se $v = 10\,000$ galões, quanta água deve ser derramada para diluir 50% do sal? *Resp.* 6 931 galões.

4. *Lei de Newton do esfriamento.* Se a diferença entre a temperatura de um corpo e a do ambiente é de x graus, a velocidade de variação do decrescimento de x é proporcional a x. Se esta diferença de temperatura era a princípio de 80 graus e 1 minuto depois é de 70 graus, qual será ela depois de 2 minutos? Em quantos minutos decresce ela de 20 graus?

5. A pressão atmosférica p sobre a superfície da terra é uma função da altura h em relação ao nível do mar, que varia segundo a lei dos juros compostos. Admitindo que $p = 15$ libras por polegada quadrada quando $h = 0$ e $p = 10$ libras quando $h = 10\,000$ pés, achar p (a) quando $h = 5\,000$ pés, (b) quando $h = 15\,000$ pés
Resp. (a) 12,2 libras; (*b*) 8,15 libras.

6. A velocidade de uma reação química na qual x é a quantidade de substância transformada no tempo t é a velocidade de variação de x em relação a t.

Reação de primeira ordem. Seja a = concentração no princípio da experiência. Então $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, pois a velocidade é proporcional à concentração naquele instante. (Note que $a - x$, a concentração, varia segundo a lei dos juros compostos).

Prove que k é igual a $\frac{1}{t} \ln \frac{a}{a - x}$.

7. Na transformação da dextrose em levulose, a velocidade de variação da quantidade transformada é proporcional à quantidade não transformada. Se, depois de 10 horas, 1 000 libras de dextrose ficaram reduzidas a 800 libras, quanta dextrose restará depois de 24 horas? *Resp.* 586 libras.

8. Num circuito elétrico com dada voltagem E e corrente i (amperes), a voltagem E é consumida em vencer (1) a resistência R (ohms) do circuito e (2) a indutância L, sendo

$$E = Ri + L\,\frac{di}{dt}\,, \quad \text{ou} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri),$$

a equação ligando as grandezas. Sendo E, R e L constantes, a lei que regula o fenômeno é dada por uma equação do tipo (4).

Dados $L = 640$, $R = 250$, $E = 500$ e $i = 0$ quando $t = 0$, mostre que a corrente tende a 2 amperes quando t cresce indefinidamente. Ache em quantos segundos i atinge 90% do seu máximo valor.

Resp. 5,9 segundos.

9. Num condensador descarregando eletricidade, a velocidade de variação, em relação ao tempo, da voltagem e é proporcional a e e e decresce com o tempo. Dado o coeficiente de proporcionalidade $k = \frac{1}{40}$, achar t se e decresce 10% do seu valor original.

Resp. 92 segundos.

10. A formação de uma solução salina (ou ácida) pela adição de sal (ou ácido), mantendo constante o volume, conduz à equação $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}(v - y)$, onde v = volume constante, y = sal (ou ácido) no tanque em cada instante, x = sal (ou ácido) adicionado no instante inicial. Deduza este resultado e confronte com o Exemplo ilustrativo 2 acima.

208.—Aplicações a problemas da mecânica. Muitos problemas importantes da mecânica e da física são resolvidos pelos métodos explicados nêste capítulo. Por exemplo, problemas sobre movimentos retilíneos muitas vezes conduzem a equações diferenciais de primeira ou segunda ordem e a solução dos problemas depende da resolução destas equações.

Antes de dar exemplos ilustrativos, devemos recordar que (§ § 51 e 59)

$$(1) \qquad v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\,\frac{dv}{ds},$$

onde v e a são respectivamente a velocidade e a aceleração em cada instante de tempo ($= t$) e s é igual à distância percorrida neste tempo pelo ponto móvel a partir de um ponto fixo, com trajetória retilínea.

Exemplo ilustrativo 1. Num movimento retilíneo a aceleração é inversamente proporcional ao quadrado da distância s e é igual a -1 quando $s = 2$, isto é,

$$\text{(2)} \qquad \text{Aceleração} = a = -\frac{4}{s^2}.$$

Tem-se também $v = 5$, $s = 8$ quando $t = 0$.

(a) Achar v quando $s = 24$.

SOLUÇÃO. De (2), usando a última fórmula para a, obtemos

$$\text{(3)} \qquad v\frac{dv}{ds} = -\frac{4}{s^2}.$$

Multiplicando ambos os membros por ds e integrando, vem

$$\text{(4)} \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{4}{s} + C, \quad \text{ou} \quad v^2 = \frac{8}{s} + C'.$$

Substituindo em (4) as condições acima $v = 5$, $s = 8$, achamos $C' = 24$; logo a (4) torna-se

$$\text{(5)} \qquad v^2 = \frac{8}{s} + 24.$$

Desta equação, se $s = 24$, $v = \frac{1}{3}\sqrt{219} = 4{,}93$. *Resp.*

(b) Achar o tempo gasto para o ponto se mover de $s = 8$ até $s = 24$.

SOLUÇÃO. Tirando v de (5), vem

$$\text{(6)} \qquad \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{8}\,\frac{\sqrt{s + 3s^2}}{s}.$$

Separando as variáveis s e t e resolvendo em relação a t, achamos para intervalo de tempo necessário para ir de $s = 8$ até $s = 24$,

$$\text{(7)} \qquad t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_8^{24} \frac{s\,ds}{\sqrt{s + 3s^2}} = 3{,}23. \quad \textit{Resp.}$$

Nota. Usando a primeira forma em (1) para a, (2) é

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4}{s^2},$$

que é da forma (F), § 205. O método de integração aqui é o mesmo que o do § 205.

Um tipo importante de movimento retilíneo é aquele em que a aceleração e a distância estão numa razão constante e diferem no sinal. Neste caso, podemos escrever.

$$(8) \qquad a = -k^2 s\,,$$

onde k^2 = grandeza de a na unidade de distância.

Lembrando que uma força e a aceleração causada por ela diferem apenas em grandeza, vemos que no caso supra a fôrça atuante está sempre dirigida para o ponto $s = 0$ e é, em grandeza, diretamente proporcional à distância s. O movimento diz-se de *vibração harmônica simples.*

De (8) resulta, usando (1),

$$(9) \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 s = 0\,,$$

uma equação linear em s e t de segunda ordem com coeficientes constantes. Integrando (ver exemplo ilustrativo 2, § 206), obtemos a solução geral

$$(10) \qquad s = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt.$$

De (10), por derivação,

$$(11) \qquad v = k(-c_1 \operatorname{sen} kt + c_2 \cos kt).$$

É fácil ver que o movimento definido por (10) é uma oscilação periódica entre as posições extremas $s = b$ a $s = -b$, determinada por

$$(12) \qquad b = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},\ \text{período} = \frac{2\pi}{k}\cdot$$

De fato, podemos substituir as constantes c_1 e c_2 em (10) por outras constantes b e A tais que

$$(13) \qquad c_1 = b \operatorname{sen} A\,, \quad c_2 = b \cos A\,.$$

Substituindo estes valores em (10), ela reduz-se a

$$(14) \qquad s = b \operatorname{sen}(kt + A), \qquad \text{por (4), § 2}$$

e agora a veracidade do resultado é óbvia.

Nos exemplos seguintes damos casos de movimentos harmônicos simples que são perturbados por outras forças. Em todos os casos o problema depende da solução de uma equação da forma (G) ou (H), estudadas acima.

Exemplo ilustrativo 2. Num movimento retilíneo

$$a = -\frac{5}{4}s - v. \tag{15}$$

Tem-se também $v = 2$, $s = 0$ quando $t = 0$.

(a) achar a equação do movimento (s em termos de t).

SOLUÇÃO. Usando (1), temos, por (15),

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{5}{4}s = 0, \tag{16}$$

uma equação da forma (G). As raízes da equação auxiliar $r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$ são

$$r_1 = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}, \quad r_2 = -\tfrac{1}{2} - \sqrt{-1}.$$

Logo, a solução geral de (16) é

$$s = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t). \tag{17}$$

Pelas condições dadas, $s = 0$ quando $t = 0$. Substituindo estes valores em (17), achamos $c_1 = 0$ e portanto

$$s = c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} t. \tag{18}$$

Derivando para achar v, temos

$$v = c_2 e^{-\frac{1}{2}t}(-\tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t + \cos t). \tag{19}$$

Substituindo os valores dados $v = 2$ quando $t = 0$, temos $2 = c_2$. Com este valor de c_2, (18) torna-se

$$s = 2e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} t. \quad \textit{Resp.} \tag{20}$$

(b) Para que valores de t é $v = 0$?

SOLUÇÃO. Quando $v = 0$, a expressão entre parêntesis do segundo membro de (19) deve se anular. Pondo esta igual a zero, obtemos imediatamente

$$\operatorname{tg} t = 2. \tag{21}$$

Para cada valor de t satisfazendo (21), v é nula. Estes valores são

$$t = 1{,}10 + n\pi, \text{ sendo } n \text{ inteiro.} \quad \textit{Resp.} \tag{22}$$

Os sucessivos valores de t dados por (22) diferem por um intervalo de tempo constante π.

Discussão. Este exemplo ilustra a *vibração harmônica amortecida*. Realmente, em (15) a aceleração é a soma de duas componentes

(23) $$a_1 = -\frac{5}{4}s, \quad a_2 = -v$$

A vibração harmônica simples correspondente à componente a_1 é agora perturbada por uma força de amortecimento com a aceleração a_2, isto é, por uma força proporcional à velocidade e oposta à direção do movimento. Os efeitos desta força de amortecimento são duplos.

Primeiro, o intervalo de tempo entre posições sucessivas do ponto onde $v = 0$ é alongado pela força de amortecimento. De fato, para a vibração harmônica simples

(24) $$a_1 = -\frac{5}{4}s,$$

temos, por confronto com (8), $k = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1{,}12$ e o meio período é, por (12), $0{,}89\,\pi$. Como vimos acima, para a vibração harmônica amortecida o correspondente intervalo é π.

Segundo, os valores de s para as posições extremas sucessivas onde $v = 0$, ao invez de serem iguais, formam agora uma progressão geométrica decrescente. A demonstração é omitida.

Exemplo ilustrativo 3. Num movimento retilíneo

(25) $$a = -4s + 2\cos 2t\,;$$

tem-se também $s = 0$, $v = 2$ quando $t = 0$.

(a) achar a equação do movimento.

Solução. Por (1), temos, de (25)

(26) $$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2\cos 2t.$$

A solução particular pedida foi achada no exemplo ilustrativo 6, § 206, e é dada pela equação (47), § 206. Logo

(27) $s = \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} 2t$. *Resp.*

(b) para que valores de t será $v = 0$?

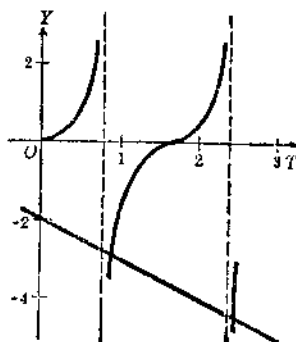
Solução. Derivando (27) para achar v e igualando o resultado a zero, obtemos

(28) $(2 + t)\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t = 0\,;$

dividindo ambos os membros por $\cos 2t$,

(29) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t + 2 + t = 0\,.$

As raízes desta equação podem ser achadas como foi explicado nos §§ 87-89. A figura mostra as curvas (ver § 88)

(30) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t, \quad y = -2 - t\,,$

e as abscissas dos pontos de interseção são, aproximadamente,

$$t = 0{,}88; \quad 2{,}36 \text{ etc.} \quad \textit{Resp.}$$

Discussão. Este exemplo ilustra a *vibração harmônica forçada.* Realmente, em (25) a aceleração é a soma de duas componentes.

$$(31) \qquad a_1 = -4s, \quad a_2 = 2\cos 2t.$$

A vibração harmônica simples correspondente à componente a_1 com o período π é agora perturbada por uma fôrça com a aceleração a_2, isto é, por uma fôrça periódica cujo período ($= \pi$) é o mesmo que o período da vibração harmônica simples não perturbada. Os efeitos desta fôrça de perturbação são duplos.

Primeiro, o intervalo de tempo entre posições sucessivas do ponto onde $v = 0$ não é mais constante mas decresce e tende a $\frac{1}{2}\pi$. Isto vê-se claramente da figura acima.

Segundo, os valores de s para as posições extremas sucessivas onde $v = 0$ crescem neste caso e tornam-se, eventualmente, indefinidamente grandes em valor absoluto.

EXERCÍCIOS

Em cada um dos seguintes exercícios são dadas a aceleração e as condições iniciais. Achar a equação do movimento.

1. $a = -k^2 s$; $s = 0$, $v = v_0$, quando $t = 0$.

Resp. $s = \dfrac{v_0}{k}\,\text{sen}\,k\,t$.

2. $a = -k^2 s$; $s = s_0$, $v = 0$, quando $t = 0$.

Resp. $s = s_0 \cos k\,t$.

3. $a = -k^2 s$; $s = s_0$, $v = v_0$, quando $t = 0$.

4. $a = 6 - s$; $s = 0$, $v = 0$, quando $t = 0$.

Resp. $s = 6\,(1 - \cos t)$.

5. $a = \text{sen}\,2\,t - s$; $s = 0$, $v = 0$, quando $t = 0$.

Resp. $s = \frac{2}{3}\,\text{sen}\,t - \frac{1}{3}\,\text{sen}\,2\,t$.

6. $a = 2\cos t - s$; $s = 2$, $v = 0$, quando $t = 0$.

Resp. $s = 2\cos t + t\,\text{sen}\,t$.

7. $a = -2\,v - 2\,s$; $s = 3$, $v = -3$, quando $t = 0$.

Resp. $s = 3\,e^{-t}\cos t$.

8. $a = -k^2 s + b$; $s = 0$, $v = 0$, quando $t = 0$.

9. $a = -nv$; $s = 0$, $v = n$, quando $t = 0$.

10. $a = 8\,t - 4\,s$; $s = 0$, $v = 4$, quando $t = 0$.

11. $a = 4 \operatorname{sen} t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$, quando $t = 0$.

12. $a = 2 \operatorname{sen} 2t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$, quando $t = 0$.

13. $a = -2v - 5s$; $s = 1$, $v = 1$, quando $t = 0$.

14. Dados $a = 8 - 4s$ e $v = 0$, $s = 0$ quando $t = 0$, mostrar que o movimento é uma vibração harmônica simples com centro em $s = 2$, amplitude 2 e período igual a π.

15. A aceleração de uma partícula é dada por

$$a = 5 \cos 2t - 9s.$$

(a) se a partícula parte do repouso na origem, achar a equação do movimento. *Resp.* $s = \cos 2t - \cos 3t$.

Qual a máxima distância da origem que a partícula pode atingir?

(b) Se a partícula parte da origem com velocidade $v = 6$, achar a equação do movimento. *Resp.* $s = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 3t - \cos 3t$.

Qual a máxima distância da origem alcançada pela partícula?

16. Responda as perguntas do problema precedente caso a aceleração seja dada por

$$a = 3 \cos 3t - 9s.$$

Resp. (a) $s = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} 3t$; (b) $s = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} 3t + 2 \operatorname{sen} 3t$.

17. Um corpo cai do repouso sob a ação do seu pêso, encontrando uma pequena resistência que varia proporcionalmente à velocidade. Prove as seguintes relações:

$$a = g - kv.$$

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

$$s = \frac{g}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1).$$

$$ks + v + \frac{g}{k} \ln\left(1 - \frac{kv}{g}\right) = 0.$$

18. Um corpo cai do repouso uma distância de 80 pés. Admitindo que $a = 32 - v$, achar o tempo. *Resp.* 3,47 segundos.

19. Uma lancha que se move em água tranquila está sujeita a um retardamento que é proporcional, em cada instante, à velocidade da lancha. Mostre que t segundos depois de cortar a força, a velocidade é dada por $v = ce^{-kt}$, onde c é a velocidade que a lancha tinha ao ser cortada a força.

20. Num dado instante uma lancha móvel em água tranquila tem a velocidade de 4 milhas por hora e um minuto depois a velocidade é de 2 milhas por hora. Achar a distância percorrida nesse intervalo de tempo.

21. Sob certas circunstâncias, a equação definindo a oscilação do ponteiro de um galvanômetro é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\,\mu\frac{d\theta}{dt} + k^2\theta = 0.$$

Mostrar que o ponteiro não oscila através do zero se $\mu > k$. Achar a solução geral se $\mu < k$.

209. — Equações diferenciais lineares de n-egésima ordem com coeficientes constantes. A resolução da equação diferencial linear

$$(I) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + p_ny = 0\,,$$

na qual os coeficientes $p_1, p_2, \dots, p_n$ são constantes, será estudada agora.

A substituição de y por e^{rx} no primeiro membro fornece

$$(r^n + p_1r^{n-1} + p_2r^{n-2} + \dots + p_n)\,e^{rx}.$$

Esta expressão se anula para todos os valores de r que satisfazem a equação

$$(1) \qquad r^n + p_1r^{n-1} + p_2r^{n-2} + \dots + p_n = 0\,,$$

e portanto para cada um destes valores de r, e^{rx} é uma solução de (I). A equação (1) é chamada de *equação auxiliar* de (I). Observamos que os coeficientes dela são os mesmos que os de (I), que os expoentes correspondem à ordem das derivadas em (I) e que y é substituído por 1.

As raízes da equação fornecem soluções particulares da equação diferencial (I). Os resultados são os do § 206 extendidos às equações de ordem superior a 2. Para a demonstração, consultar textos mais avançados.

REGRA PARA RESOLVER A EQUAÇÃO (I).

PRIMEIRO PASSO. *Considere a correspondente equação auxiliar*

(1) $$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_n = 0.$$

SEGUNDO PASSO. *Resolva completamente a equação auxiliar.*

TERCEIRO PASSO. *As raízes da equação auxiliar fornecem soluções da equação diferencial, as quais se obtêm como segue:*

EQUAÇÃO AUXILIAR		EQUAÇÃO DIFERENCIAL
(a) *Cada raiz real distinta* r_1	*fornece*	*uma particular solução* $e^{r_1 x}$.
(b) *Cada par de raízes imaginárias distintas* $a \pm bi$	*fornece*	*duas soluções particulares* $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \operatorname{sen} bx$.
(c) *Uma raiz múltipla que ocorre s vêzes*	*fornece*	*s (ou 2s) soluções particulares que se obtêm multiplicando as soluções* (a) (*ou* (b)) *por* $1, x, x^2, \ldots, x^{s-1}$.

QUARTO PASSO. *Multiplique cada uma das n* soluções independentes assim achadas por uma constante arbitrária e some os reultados. Esta soma é a solução geral da equação diferencial dada.*

Exemplo ilustrativo 1.

Resolver $$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$$

SOLUÇÃO. Sigamos a regra acima.

Primeiro passo. $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$, equação auxiliar.

Segundo passo. Resolvendo, as raízes são $-1, 2, 2$.

Terceiro passo. (a) A raiz -1 fornece a solução e^{-x}.

(c) A raiz dupla 2 fornece as duas soluções e^{2x}, xe^{2x}.

Quarto passo. A solução geral é

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2.

Resolver $$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$$

SOLUÇÃO. Sigamos a regra acima.

Primeiro passo. $r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = 0$, equação auxiliar.

Segundo passo. Resolvendo, as raízes são $1, 1, 1 \pm 2i$.

* Observe-se que os três primeiros passos devem fornecer n soluções particulares independentes.

Terceiro passo. (b) O par de raízes imaginárias $1 \pm 2i$ dá as duas soluções

$$e^x \cos 2x, \; e^x \operatorname{sen} 2x. \qquad (a = 1, \; b = 2)$$

(c) A raiz dupla 1 dá as duas soluções e^x, xe^x.

Quarto passo. A solução geral é

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^x \cos 2x + c_4e^x \operatorname{sen} 2x,$$

ou

$$y = (c_1 + c_2x + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x)\, e^x. \quad \textit{Resp.}$$

A equação diferencial linear

$$(J) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_ny = X,$$

na qual $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são constantes e X é uma função de x ou uma constante, resolve-se com os mesmos métodos que os usados no § 206 para a equação (H). Aqui também devem ser seguidos os três passos descritos no § 206, isto é, resolvemos primeiro a equação (I) e a solução geral,

$$(2) \qquad y = u,$$

desta equação é a função complementar para (J). A seguir procuramos uma solução particular

$$(3) \qquad y = v$$

para (J). Então, a solução geral de (J) é dada por

$$(4) \qquad y = u + v.$$

Na procura de (3), procede-se por tentativas com métodos análogos aos usados no § 206 para o caso de $n = 2$. As regras dadas aí para o caso geral aplicam-se também para qualquer valor de n. Em qualquer caso, podemos seguir a

Regra para achar uma solução particular de (J)

Primeiro Passo. *Derive sucessivamente a dada equação (J) e obtenha, ou diretamente ou por eliminação, uma equação diferencial de ordem mais alta e do tipo (I).*

Segundo Passo. *Resolvendo esta nova equação pela regra do § 209, obtemos sua solução geral*

$$y = u + v,$$

onde u é a função complementar de (J) já achada no primeiro passo, e v é a soma dos têrmos adicionais achados.*

TERCEIRO PASSO. *Para achar os valores das constantes de integração na solução particular v, substitua*

$$y = v$$

e suas derivadas na dada equação (J). Na identidade resultante iguale os coeficientes das mesmas potências de x, tire do sistema de equações obtido os valores das constantes de integração e os substitua em

$$y = u + v\,.$$

Vem a solução geral de (J).

Êste método será agora ilustrado por exemplos.

Nota. A resolução da equação auxiliar da nova equação diferencial deduzida é facilitada pelo fato de ser o seu primeiro membro divisível pelo primeiro membro da equação auxiliar usada para achar a função complementar.

Exemplo ilustrativo. Resolver

$$(5) \qquad y'' - 3\,y' + 2\,y = xe^x.$$

SOLUÇÃO. Vamos achar primeiro a função complementar u. Resolvendo

$$(6) \qquad y'' - 3\,y' + 2\,y = 0\,,$$

obtém-se

$$(7) \qquad y = u = c_1e^{2x} + c_2e^x.$$

Primeiro passo. Derivemos (5). Vem

$$(8) \qquad y''' - 3\,y'' + 2\,y' = xe^x + e^x.$$

Façamos a diferença entre (8) e (5). Temos

$$(9) \qquad y''' - 4\,y'' + 5\,y' - 2\,y = e^x.$$

Derivemos (9). Obtemos

$$(10) \qquad y^{\text{iv}} - 4\,y''' + 5\,y'' - 2\,y' = e^x.$$

Façamos a diferença entre (10) e (9). Vem

$$(11) \qquad y^{\text{iv}} - 5\,y''' + 9\,y'' - 7\,y' + 2\,y = 0,$$

que é uma equação do tipo (I).

Segundo passo. Resolvamos (11). A equação auxiliar é

$$(12) \qquad r^4 - 5\,r^3 + 9\,r^2 - 7\,r + 2 = 0\,.$$

* É óbvio que toda solução da equação original deve ser também uma solução da equação deduzida.

O primeiro membro deve ser divisível por $r^2 - 3r + 2$, pois a equação auxiliar de (6) é $r^2 - 3r + 2 = 0$. Realmente, vemos que (12) pode ser posta sob a forma

$$(13) \qquad (r^2 - 3r + 2)(r - 1)^2 = 0 .$$

As raízes são $r = 1, 1, 1, 2$. Logo, a solução geral de (11) é

$$(14) \qquad y = c_1e^{2x} + e^x(c_2 + c_3x + c_4x^2).$$

Terceiro passo. Comparando (7) e (14) vemos que

$$(15) \qquad y = v = e^x(c_3x + c_4x^2)$$

será uma solução particular de (5) para valores convenientes das constantes c_3 e c_4.

Derivando (15), obtemos

$$(16) \qquad \begin{aligned} y' &= e^x(c_3 + (c_3 + 2c_4)x + c_4x^2), \\ y'' &= e^x(2(c_3 + c_4) + (c_3 + 4c_4)x + c_4x^2). \end{aligned}$$

Substituindo em (5) os resultados de (15) e (16), dividindo ambos os membros por e^x e reduzindo, obtemos

$$(17) \qquad 2c_4 - c_3 - 2c_4x = x.$$

Igualando os coeficientes das mesmas potências de x, obtemos $-2c_4 = 1$, $2c_4 - c_3 = 0$; logo, $c_3 = -1$, $c_4 = -\frac{1}{2}$. Substituindo estes valores em (15), a solução particular é

$$(18) \qquad y = v = e^x(-x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

e a solução geral é

$$y = u + v = c_1e^{2x} + c_2e^x - e^x(x + \tfrac{1}{2}x^2). \quad \textit{Resp.}$$

EXERCÍCIOS

Achar a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0.$ *Resp.* $y = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\,\text{sen}\,2x.$

2. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$ $y = c_1 + c_2x + c_3\cos 2x + c_4\,\text{sen}\,2x.$

3. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - \dfrac{dy}{dx} = 0.$ $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + c_4\cos x + c_5\,\text{sen}\,x.$

4. $\dfrac{d^4s}{dt^4} + 3\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0.$ $s = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos 2t + c_4\,\text{sen}\,2t.$

5. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^3y}{dx^3} + 9\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Resp. $y = c_1 + c_2e^x + c_3\cos 3x + c_4\,\text{sen}\,3x.$

6. $\frac{d^4s}{dt^4} + 8\frac{d^2s}{dt^2} + 16\,s = 0.$ *Resp.* $s=(c_1+c_2t)\cos 2t+(c_3+c_4t)\operatorname{sen} 2t.$

7. $\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 12\,\frac{dx}{dt}+8x=0.$ *Resp.* $x = e^{-2t}(c_1 + c_2t + c_3t^2).$

8. $\frac{d^4s}{dt^4} - s = t^3+3\,t.$ *Resp.* $s=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\operatorname{sen} t - t^3 - 3\,t.$

9. $\frac{d^3y}{dx^3} - 4\,\frac{dy}{dx} = 2\,x^2.$ $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x.$

10. $\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} = 4\,x.$ $y=c_1+c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} - \frac{2}{3}\,x^3.$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\,\frac{dy}{dx}+2\,y=xe^{3x}.$ $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{3}{4}\,e^{3x} + \frac{1}{2}\,xe^{3x}.$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9\frac{ds}{dt}+20s=t^2e^{3t}.$ *Resp.* $s=c_1e^{4t}+c_2e^{5t}+\frac{e^{3t}(7+6\,t+2\,t^2)}{4}.$

13. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4\,s=t\operatorname{sen}^2 t.$

Resp. $s=c_1\cos 2\,t + c_2\operatorname{sen} 2\,t + \frac{t}{8} - \frac{t\cos 2\,t}{32} - \frac{t^2\operatorname{sen} 2\,t}{16}.$

14. $\frac{d^4y}{dx^4} - 9\,\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

15. $\frac{d^3x}{dt^3} + 8\,x = 0.$

16. $\frac{d^4y}{dx^4} - 13\,\frac{d^2y}{dx^2} + 36\,y = 0.$

17. $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\,\frac{d^2y}{dx^2} - 36\,y=0.$

18. $\frac{d^4s}{dt^4} + 13\frac{d^2s}{dt^2} + 36\,s=18\,t - 36.$

19. $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\,\frac{d^2x}{dt^2} + x=t+2.$

20. $\frac{d^3s}{dt^3} - 2\,\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = e^t.$

EXERCÍCIOS DIVERSOS

Ache a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais.

1. $8\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 = 27\,y.$ *Resp.* $y = (t+c)^{\frac{3}{2}}.$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 27\,y^2 = 0.$ $y = (x + c)^3.$

3. $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9\,x.$ $y = x^{\frac{3}{2}} + c.$

4. $(1 + x^2)\, dy = \sqrt{1-y^2}\, dx$. *Resp.* $\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{x+c}{1-cx}$.

5. $(x + y)\, dx = (x - y)\, dy$. $\ln (x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = c$.

6. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}$. $y = (x + c)e^{-x}$.

7. $\dfrac{d^2 s}{dt^2} - 4 \dfrac{ds}{dt} + 3\, s = 0$. $s = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$.

8. $\dfrac{d^2 s}{dt^2} - 4 \dfrac{ds}{dt} + 4\, s = 0$. $s = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$.

9. $\dfrac{d^2 s}{dt^2} - 4 \dfrac{ds}{dt} + 8\, s = 0$. $s = e^{2t}(c_1 \cos 2\, t + c_2 \operatorname{sen} 2\, t)$.

10. $\dfrac{d^2 y}{dt^2} - 2 \dfrac{dy}{dt} - 3\, y = e^{2t}$. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{3} e^{2t}$.

11. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = at + b$. $x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt + \dfrac{at+b}{k^2}$.

12. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = ae^{bt}$. $x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt + \dfrac{ae^{bt}}{b^2+k^2}$.

13. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} - k^2 x = a \cos kt$. $x = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} - \dfrac{a}{2\, k^2} \cos kt$.

14. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = a \operatorname{sen} kt$. $x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt - \dfrac{a}{2\, k} t \cos kt$.

15. $(x^2 - 2\, y^2)\, dx + 2\, xy\, dy = 0$. $y^2 + x^2 \ln cx = 0$.

16. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4\, xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$. $y\, (x^2 + 1)^2 = \operatorname{arc\,tg} x + c$.

17. $\dfrac{d^4 s}{dt^4} - 5 \dfrac{d^2 s}{dt^2} + 4\, s = 0$. *Resp.* $s = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$.

18. $\dfrac{d^4 s}{dt^4} + 5 \dfrac{d^2 s}{dt^2} + 4\, s = 0$.

Resp. $s = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos 2\, t + c_4 \operatorname{sen} 2\, t$.

19. $xy^2\, dy = (x^3 + y^3)\, dx$.

20. $dy + xy\, (1 - x^2 y^2)\, dx = 0$.

21. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} - 8 \dfrac{dx}{dt} + 25\, x = 0$.

22. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 4\, x = 8\, t + 2$.

23. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 4\, x = e^{-t}$.

24. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 4\, x = 6 \cos 3\, t$.

25. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 4\, x = 2 \cos 2\, t$.

Resolver cada uma das seguintes equações diferenciais, fazendo a transformação sugerida.

26. $t^2 \frac{ds}{dt} - 2\,st - s^3 = 0$. Tr. $s = \frac{t^2}{v}$ *Resp.* $\frac{t^4}{2s^2} + \frac{t^3}{3} = c$.

27. $(t^2 + t)\,ds = (t^2 + 2\,st + s)\,dt$. Tr. $s = vt$.
Resp. $s = ct\,(1 + t) - t$.

28. $(3 + 2\,st)\,s\,dt = (3 - 2\,st)\,t\,ds$. Tr. $st = v$.

29. $(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = 2\,x + 2\,y + 5$. Tr. $x + y = v$.

OUTROS PROBLEMAS

1. A área limitada por uma curva, o eixo dos xx e duas paralelas quaisquer ao eixo dos yy é k vezes o comprimento do arco da curva compreendido entre as paralelas. Sabendo que a curva passa pelo ponto $(0, k)$, mostre que ela é uma catenária.

2. A aceleração de um paraquedista provindo de um balão estacionário é $32 - \frac{1}{8} v^2$ pés por segundo quadrado, sendo v a velocidade em pés por segundo. Se ele atinge o solo em um minuto, prove que o balão está a pouco mais de 950 pés de altura.

3. Um ponto movendo-se sôbre o eixo dos xx está sujeito a uma aceleração dirigida para a origem e proporcional à sua distância da origem e a um retardamento proporcional à sua velocidade. Sabendo que a equação diferencial do movimento é da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\,\frac{dx}{dt} + nx = 0,$$

onde m e n são números positivos, e que $x = 10$, $\frac{dx}{dt} = 0$ quando $t = 0$, achar em cada um dos seguintes casos x e $\frac{dx}{dt}$ e discutir a natureza do movimento.

(a) $m = 4,\ n = 5$; (b) $m = 4,\ n = 4$; (c) $m = 4,\ n = 3$.

Capítulo XXII

FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

210.—Seno e cosseno hiperbólicos. Certas expressões simples envolvendo funções exponenciais (§ 62) ocorrem frequentemente na matemática aplicada. São as *funções hiperbólicas*, nome que será justificado mais tarde, no parágrafo 215. Duas destas funções, o *seno hiperbólico* e o *cosseno hiperbólico* de uma variável v, que se indicam respectivamente por senh v e cosh v, são definidas pelas equações

$$(A) \qquad \operatorname{senh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}, \quad \cosh v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}.$$

onde e é, como é usual, a base dos logaritmos naturais (§ 61). Estas funções não são independentes, pois de (A) deduzimos

$$(B) \qquad \cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v = 1.$$

[De (A) resulta, quadrando, $\cosh^2 v = \frac{e^{2v} + 2 + e^{-2v}}{4}$, $\operatorname{senh}^2 v = \frac{e^{2v} - 2 + e^{-2v}}{4}$.
Logo, subtraindo, $\cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v = 1$.]

Resolvendo as equações (A) em relação às exponenciais, obtemos

$$(1) \qquad e^v = \cosh v + \operatorname{senh} v, \quad e^{-v} = \cosh v - \operatorname{senh} v.$$

Exemplo ilustrativo. Mostre que a solução geral da equação diferencial

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - a^2y = 0$$

pode ser posta sob a forma

$$y = A \operatorname{senh} ax + B \cosh ax,$$

onde A e B são constantes.

SOLUÇÃO. Pelo § 206, a equação auxiliar de (2) é $r^2 - a^2 = 0$, cujas raízes são a e $-a$. Portanto, a solução geral de (2) é

$$y = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}.$$

Os valores de e^{ax} e e^{-ax} são obtidos de (1), pondo $v = ax$. Logo

$$e^{ax} = \cosh ax + \operatorname{senh} ax, \quad e^{-ax} = \cosh ax - \operatorname{senh} ax,$$
$$y = c_1(\cosh ax + \operatorname{senh} ax) + c_2(\cosh ax - \operatorname{senh} ax)$$
$$= (c_1 + c_2)\cosh ax + (c_1 - c_2)\operatorname{senh} ax.$$

Pondo $c_1 - c_2 = A$, $c_1 + c_2 = B$, obtemos a forma desejada.

Compare-se o resultado com o do Exemplo Ilustrativo 2, § 206.

211.—Outras funções hiperbólicas. A *tangente hiperbólica*, tgh v, é definida por

$$(C) \qquad \operatorname{tgh} v = \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}.$$

As equações

$$(1) \quad \operatorname{ctgh} v = \frac{1}{\operatorname{tgh} v}, \quad \operatorname{sech} v = \frac{1}{\cosh v}, \quad \operatorname{cossech} v = \frac{1}{\operatorname{senh} v}$$

definem, respectivamente, a *cotangente hiperbólica*, a *secante hiperbólica* e a *cossecante hiperbólica*. As razões usadas em (C) e (1) são as mesmas que as de (2), § 2, para as correspondentes funções trigonométricas.

Valem as seguintes relações:

$$(2) \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2 v = \operatorname{sech}^2 v, \quad \operatorname{ctgh}^2 v - 1 = \operatorname{cossech}^2 v,$$

análogas às fórmulas em (2), § 2. A demonstração da primeira fórmula é dada abaixo.

Para os valores das funções hiperbólicas tem-se os seguintes resultados, que o leitor pode verificar:

senh v toma qualquer valor; cosh v toma qualquer valor positivo não menor que 1; sech v toma qualquer valor positivo não maior que 1; tgh v toma qualquer valor menor que 1, em valor absoluto; ctgh v toma qualquer valor maior que 1, em valor absoluto; cossech v toma qualquer valor exceto zero.

Das definições resulta também

$$(3) \qquad \begin{aligned} \operatorname{senh}(-v) &= -\operatorname{senh} v, & \operatorname{cossech}(-v) &= -\operatorname{cossech} v. \\ \cosh(-v) &= \cosh v, & \operatorname{sech}(-v) &= \operatorname{sech} v. \\ \operatorname{tgh}(-v) &= -\operatorname{tgh} v, & \operatorname{ctgh}(-v) &= -\operatorname{ctgh} v. \end{aligned}$$

Exemplo ilustrativo. Dado $\operatorname{tgh} x = \frac{4}{5}$, achar os valores das outras funções hiperbólicas.

SOLUÇÃO. Dividamos, em (B), cada termo por $\cosh^2 x$. Obtemos

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Logo $$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x. \qquad \text{Por } (C) \text{ e } (1)$$

Como $\operatorname{tgh} x = \frac{4}{5}$, esta equação dá $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, sendo inadmissível o valor negativo. Logo,

$$\cosh x = \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{5}{3}, \qquad \text{por } (1)$$

$$\operatorname{senh} x = \cosh x \operatorname{tgh} x = \frac{4}{3}, \qquad \text{por } (C)$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{5}{4}, \text{ e } \operatorname{cossech} x = \frac{3}{4}. \qquad \text{por } (1)$$

212. — Tábua de valores do seno, cosseno e tangente hiperbólicos. Gráficos. Uma tábua dando os valores, até quatro decimais, de senh v, cosh v e tgh v para valores de v dêsde 0 a 5,9 é apresentada na pág. 527. Para valores negativos de v, use as relações (3), § 211.

Quando $v \to +\infty$, senh v e cosh v tendem ao infinito, enquanto tgh v tende a 1.

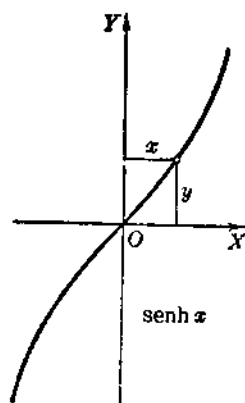
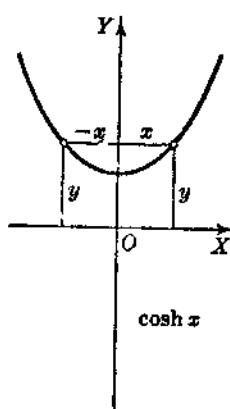
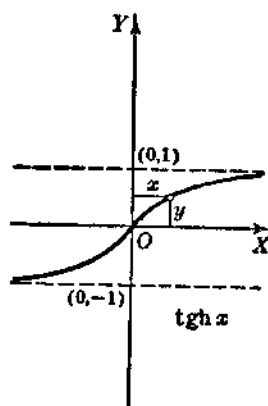



FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3

Os gráficos de senh x, cosh x e tgh x (Figs. 1, 2, 3) podem ser traçados fàcilmente fazendo uso da tábua.

v	Senh v	Cosh v	Tgh v	v	Senh v	Cosh v	Tgh v	v	Senh v	Cosh v	Tgh v
0,00	0,0000	1,000	0,0000	0,50	0,5211	1,128	0,4621	1,0	1,175	1,543	0,7616
0,01	0,0100	1,000	0,0100	0,51	0,5324	1,133	0,4700	1,1	1,336	1,669	0,8005
0,02	0,0200	1,000	0,0200	0,52	0,5438	1,138	0,4777	1,2	1,509	1,811	0,8337
0,03	0,0300	1,000	0,0300	0,53	0,5552	1,144	0,4854	1,3	1,698	1,971	0,8617
0,04	0,0400	1,001	0,0400	0,54	0,5666	1,149	0,4930	1,4	1,904	2,151	0,8854
0,05	0,0500	1,001	0,0500	0,55	0,5782	1,155	0,5005	1,5	1,129	2,352	0,9052
0,06	0,0600	1,002	0,0599	0,56	0,5897	1,161	0,5080	1,6	2,376	2,577	0,9217
0,07	0,0701	1,002	0,0699	0,57	0,6014	1,167	0,5154	1,7	2,646	2,828	0,9354
0,08	0,0801	1,003	0,0798	0,58	0,6131	1,173	0,5227	1,8	2,942	3,107	0,9468
0,09	0,0901	1,004	0,0898	0,59	0,6248	1,179	0,5299	1,9	3,268	3,418	0,9562
0,10	0,1002	1,005	0,0997	0,60	0,6367	1,185	0,5370	2,0	3,627	3,762	0,9040
0,11	0,1102	1,006	0,1096	0,61	0,6485	1,192	0,5441	2,1	4,022	4,144	0,9705
0,12	0,1203	1,007	0,1194	0,62	0,6606	1,198	0,5511	2,2	4,457	4,568	0,9757
0,13	0,1304	1,008	0,1293	0,63	0,6725	1,205	0,5581	2,3	4,937	5,007	0,9801
0,14	0,1405	1,010	0,1391	0,64	0,6846	1,212	0,5649	2,4	5,466	5,557	0,9837
0,15	0,1506	1,011	0,1489	0,65	0,6967	1,219	0,5717	2,5	6,050	6,132	0,9866
0,16	0,1607	1,013	0,1587	0,66	0,7090	1,226	0,5784	2,6	6,695	6,769	0,9809
0,17	0,1708	1,014	0,1684	0,67	0,7213	1,233	0,5850	2,7	7,406	7,743	0,9910
0,18	0,1810	1,016	0,1781	0,68	0,7336	1,240	0,5915	2,8	8,192	8,253	0,9926
0,19	0,1911	1,018	0,1878	0,69	0,7461	1,248	0,5980	2,9	9,060	9,115	0,9940
0,20	0,2013	1,020	0,1974	0,70	0,7586	1,255	0,6044	3,0	10,02	10,07	0,9951
0,21	0,2115	1,022	0,2070	0,71	0,7712	1,263	0,6107	3,1	11,08	11,12	0,9960
0,22	0,2218	1,024	0,2165	0,72	0,7838	1,271	0,6169	3,2	12,25	12,29	0,9967
0,23	0,2320	1,027	0,2260	0,73	0,7966	1,278	0,6231	3,3	13,54	13,57	0,9974
0,24	0,2423	1,029	0,2355	0,74	0,8094	1,287	0,6291	3,4	14,97	15,00	0,9978
0,25	0,2526	1,031	0,2449	0,75	0,8223	1,295	0,6352	3,5	16,54	16,57	0,9982
0,26	0,2629	1,034	0,2543	0,76	0,8353	1,303	0,6411	3,6	18,29	18,31	0,9985
0,27	0,2733	1,037	0,2636	0,77	0,8484	1,311	0,6469	3,7	20,21	20,24	0,9988
0,28	0,2837	1,039	0,2729	0,78	0,8615	1,320	0,6527	3,8	22,34	22,36	0,9990
0,29	0,2941	1,042	0,2821	0,79	0,8748	1,329	0,6584	3,9	24,69	24,71	0,9992
0,30	0,3045	1,045	0,2913	0,80	0,8811	1,337	0,6640	4,0	27,29	27,31	0,9993
0,31	0,3150	1,048	0,3004	0,81	0,9015	1,346	0,6696	4,1	30,16	30,18	0,9995
0,32	0,3255	1,052	0,3095	0,82	0,9150	1,355	0,6751	4,2	33,34	33,35	0,9996
0,33	0,3360	1,055	0,3185	0,83	0,9286	1,365	0,6805	4,3	36,84	36,86	0,9996
0,34	0,3466	1,058	0,3275	0,84	0,9423	1,374	0,6858	4,4	40,72	40,73	0,9997
0,35	0,3572	1,062	0,3364	0,85	0,9561	1,384	0,6911	4,5	45,00	45,01	0,9998
0,36	0,3678	1,066	0,3452	0,86	0,9700	1,393	0,6963	4.6	49,74	49,75	0,9998
0,37	0,3785	1,069	0,3540	0,87	0,9840	1,403	0,7014	4,7	54,97	54,98	0,9998
0,38	0,3892	1,073	0,3627	0.88	0,9981	1,413	0,7064	4,8	60,75	60,76	0,9999
0,39	0,4000	1,077	0,3714	0,89	1,012	1,423	0,7114	4,9	67,14	67,15	0,9999
0,40	0,4108	1,081	0,3800	0,90	1,027	1,433	0,7163	5,0	74,20	74,21	0,9999
0,41	0,4216	1,085	0,3885	0,91	1,041	1,443	0,7211	5,1	82,01	82,01	0,9999
0,42	0,4325	1,090	0,3969	0,92	1,055	1,454	0,7259	5,2	90,63	90,64	0,9999
0,43	0,4434	1,094	0,4053	0,93	1,070	1,465	0,7306	5,3	100,17	100,17	1,0000
0,44	0,4543	1.098	0,4136	0,94	1,085	1,475	0,7352	5,4	110,70	110,71	1,0000
0,45	0,4653	1,103	0,4219	0,95	1,099	1,486	0,7398	5,5	122,34	122,35	1,0000
0,46	0,4764	1,108	0,4301	0,96	1,114	1,497	0,7443	5,6	135,21	135,22	1,0000
0,47	0,4875	1,112	0,4382	0,97	1,129	1,509	0,7487	5,7	149,43	149,44	1,0000
0,48	0,4986	1,117	0,4462	0,98	1,145	1,520	0,7531	5,8	165,15	165,15	1,0000
0,49	0,5098	1,122	0,4542	0,99	1,160	1,531	0,7574	5,9	182,52	182,52	1,0000

213.—Funções hiperbólicas de $v + w$. As fórmulas para as funções hiperbólicas correspondentes às duas de (4), § 2, são

$$(D) \qquad \operatorname{senh}(v + w) = \operatorname{senh} v \cosh w + \cosh v \operatorname{senh} w,$$

$$(E) \qquad \cosh(v + w) = \cosh v \cosh w + \operatorname{senh} v \operatorname{senh} w.$$

Demonstração de (D). Da definição (A), substituindo v por $v + w$, vem

$$(1) \qquad \operatorname{senh}(v + w) = \frac{e^{v+w} - e^{-v-w}}{2},$$

$$(2) \qquad \cosh(v + w) = \frac{e^{v+w} + e^{-v-w}}{2}.$$

O segundo membro de (1) transforma-se como segue, fazendo uso de (1), § 210.

$$\frac{e^{v+w} - e^{-v-w}}{2} = \frac{e^{v} e^{w} - e^{-v} e^{-w}}{2} =$$

$$= \frac{(\cosh v + \operatorname{senh} v)(\cosh w + \operatorname{senh} w) - (\cosh v - \operatorname{senh} v)(\cosh w - \operatorname{senh} w)}{2}.$$

Fazendo as multiplicações e reduzindo, obtemos (D). A fórmula (E) demonstra-se do mesmo modo.

Pondo-se $w = v$ em (D) e (E), vem

$$(3) \qquad \operatorname{senh} 2v = 2 \operatorname{senh} v \cosh v,$$

$$(4) \qquad \cosh 2v = \cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v.$$

Estas são análogas às fórmulas para $\operatorname{sen} 2x$ e $\cos 2x$, respectivamente, de (5), p. 4. De (B) e (4) obtemos resultados que correspondem às fórmulas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x$ dadas em (5), p. 4. Elas são

$$(5) \qquad \operatorname{senh}^2 v = \tfrac{1}{2} \cosh 2v - \tfrac{1}{2}, \quad \cosh^2 v = \tfrac{1}{2} \cosh 2v + \tfrac{1}{2}.$$

Outras relações para as funções hiperbólicas que podem ser comparadas com as da página 4 para funções trigonométricas são dadas nos problemas.

Exemplo ilustrativo. Deduza a fórmula

$$(6) \qquad \operatorname{tgh} v = \frac{\operatorname{senh} 2v}{\cosh 2v + 1}.$$

Solução. De (5), por divisão, obtemos

$$(7) \qquad \operatorname{tgh}^2 v = \frac{\cosh 2v - 1}{\cosh 2v + 1}.$$

Ora $$\frac{\cosh 2v - 1}{\cosh 2v + 1} \cdot \frac{\cosh 2v + 1}{\cosh 2v + 1} = \frac{\cosh^2 2v - 1}{(\cosh 2v + 1)^2}.$$

Por (B), $\cosh^2 2v - 1 = \operatorname{sen}^2 2v$; logo (7) torna-se

$$\operatorname{thg}^2 v = \frac{\operatorname{senh}^2 2v}{(\cosh 2v + 1)^2}, \tag{8}$$

e portanto $$\operatorname{tgh} v = \pm \frac{\operatorname{senh} 2v}{\cosh 2v + 1}.$$

Vamos examinar o sinal deante do segundo membro. De (3) vem

$$\operatorname{senh} 2v = \frac{2 \operatorname{senh} v}{\cosh v} \cosh^2 v = 2 \operatorname{tgh} v \cosh^2 v.$$

Logo, $\operatorname{senh} 2v$ e $\operatorname{tgh} v$ têm o mesmo sinal. Vê-se também que $\cosh 2v + 1$ é sempre positiva e portanto é o sinal positivo que prevalece, o que demonstra (6).

Se v é substituído por $\frac{1}{2} v$, (6) torna-se

$$\operatorname{tgh} \frac{v}{2} = \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v + 1}. \tag{9}$$

EXERCICIOS

1. É dado o valor de uma função hiperbólica. Achar os valores das outras e verificar os resultados, se possível, pela tabela da página 527.

(a) $\cosh x = 1{,}25$. (c) $\operatorname{senh} x = 10$.
(b) $\operatorname{cossech} x = -0{,}75$. (*d*) $\operatorname{ctgh} x = -2{,}5$.

Prove cada uma das fórmulas dos Problemas 2-7 e confronte com a fórmula correspondente (se existir) em (2), (4)-(6), pp. 3 e 4.

2. $1 - \operatorname{ctgh}^2 v = -\operatorname{cossech}^2 v$.

3. $\operatorname{senh}(v - w) = \operatorname{senh} v \cosh w - \cosh v \operatorname{senh} w$,
$\cosh(v - w) = \cosh v \cosh w - \operatorname{senh} v \operatorname{senh} w$.

4. $$\operatorname{tgh}(v \pm w) = \frac{\operatorname{tgh} v \pm \operatorname{tgh} w}{1 \pm \operatorname{tgh} v \operatorname{tgh} w}.$$

5. $$\operatorname{senh} \frac{v}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh v - 1}{2}}, \quad \cosh \frac{v}{2} = + \sqrt{\frac{\cosh v + 1}{2}}.$$

6. $\operatorname{senh} v + \operatorname{senh} w = 2 \operatorname{senh} \frac{1}{2}(v + w) \cosh \frac{1}{2}(v - w)$,
$\cosh v + \cosh w = 2 \cosh \frac{1}{2}(v + w) \cosh \frac{1}{2}(v - w)$.

7. $$\operatorname{tgh} \frac{1}{2}(v - w) = \frac{\operatorname{senh} v - \operatorname{senh} w}{\cosh v + \cosh w}.$$

8. Mostre que a equação da catenária (figura, cap. XXVI) pode ser posta sob a forma $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$.

9. Resolva a equação diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ em termos de funções hiperbólicas, sendo $y = 3$ quando $x = 0$ e $y = 0$ quando $\operatorname{tgh} x = \dfrac{4}{5}$.

10. Mostre que $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$. Desenhe o gráfico e prove que $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sech} x = 0$.

11. Mostre que $\operatorname{ctgh}(-x) = -\operatorname{ctgh} x$. Desenhe o gráfico e prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ctgh} x = 1$.

12. Mostre que $\operatorname{cossech}(-x) = -\operatorname{cossech} x$. Desenhe o gráfico e prove que $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{cossech} x = 0$.

13. Prove que

(a) $\operatorname{senh} 3u = 3 \operatorname{senh} u + 4 \operatorname{senh}^3 u$;
(b) $\cosh 3u = 4 \cosh^3 u - 3 \cosh u$.

14. Mostre que $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh} nx + \cosh nx$, sendo n um inteiro positivo qualquer.

15. Prove que $\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{senh}(x + y) \operatorname{senh}(x - y)$.

16. Simplifique

$$\frac{\cosh 2u + \cosh 4v}{\operatorname{senh} 2u + \operatorname{senh} 4v}. \quad \textit{Resp.} \quad \operatorname{ctgh}(u + 2v).$$

17. As equações paramétricas da tratória podem ser postas sob a forma

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}.$$

O parâmetro é t e a é uma constante. Desenhe a curva quando $a = 4$. (A tratória é a curva para a qual o comprimento da tangente (§ 43) é constante e igual a a. Figura no Capítulo XXVI).

18. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = n^2 (y - mx^2)$.

$$\textit{Resp.} \quad y = A \cosh nx + B \operatorname{senh} nx + mx^2 + \frac{2m}{n^2}.$$

214.—Derivadas. As fórmulas, nas quais v é uma função de x, são as seguintes

$$\text{XXVII} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} v = \cosh v \frac{dx}{dv}.$$

$$\text{XXVIII} \qquad \frac{d}{dx}\cosh v = \operatorname{senh} v \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{XXIX} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{tgh} v = \operatorname{sech}^2 v \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{XXX} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{ctgh} v = -\operatorname{cossech}^2 v \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{XXXI} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sech} v = -\operatorname{sech} v \operatorname{tgh} v \frac{dv}{dx}.$$

$$\text{XXXII} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{cossech} v = -\operatorname{cossech} v \operatorname{ctgh} v \frac{dv}{dx}.$$

DEMONSTRAÇÃO DE XXVII. Por (A), $\operatorname{senh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$.

$$\text{Então } \frac{d}{dx}\operatorname{senh} v = \frac{e^v \frac{dv}{dx} + e^{-v}\frac{dv}{dx}}{2}$$

$$= \frac{e^v + e^{-v}}{2}\frac{dv}{dx}$$

$$= \cosh v \frac{dv}{dx},$$

usando (A).

Prova-se a fórmula XXVIII de modo semelhante. A demonstração de XXIX é análoga à dada no § 72 para a derivada de $\operatorname{tg} v$. Para demonstrar XXX-XXXII, deriva-se as expressões dadas em (1), § 211. Os detalhes são deixados como exercícios.

215.—Relações com a hipérbole equilátera. A curva cujas equações paramétricas são

$$(1) \qquad x = a\cosh v, \quad y = a \operatorname{senh} v,$$

é a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, pois, eliminado o parâmetro v por elevação ao quadrado e subtração, temos

$$x^2 - y^2 = a^2(\cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v) = a^2. \qquad \text{Por } (B).$$

A Fig. 2 desta página mostra um setor hiperbólico OAP_1 limitado pelo arco AP_1 de (1), o eixo semi-transverso OA e o raio vetor OP_1. Em P_1, $v = v_1$.

Teorema. *A área do setor hiperbólico* OAP_1 *é igual a* $\frac{1}{2} a^2 v_1$.

Demonstração. Sejam (ρ, θ) as coordenadas polares de um ponto qualquer sobre o arco AP_1. Então, o elemento de área é (§ 159) $dA = \frac{1}{2} \rho^2 \, d\theta$.

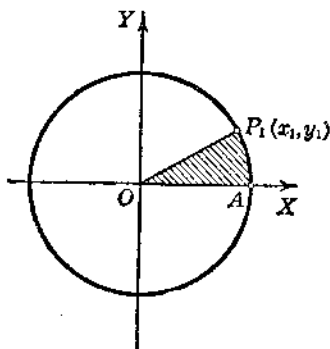
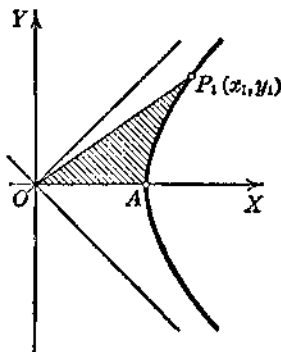



Fig. 1 Fig. 2

Mas $\rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 (\cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v)$. Usando (1)

Ora, por (5), p. 5,

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tgh} v). \qquad \text{Por (1)}$$

Logo $\dfrac{d\theta}{dv} = \dfrac{\operatorname{sech}^2 v}{1 + \operatorname{tgh}^2 v}$. Por XXII, § 60, e XXIX.

Usando (C) e (1), § 211, obtemos

$$d\theta = \frac{dv}{\cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v},$$

e portanto $$dA = \tfrac{1}{2} a^2 \, dv.$$

O teorema resulta por integração, pois $v = 0$ em A. Q.E.D.

As equações paramétricas do círculo da Fig. 1 são

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t. \qquad \S\ 81$$

O parâmetro t é igual a t_1 em P_1 e t_1 é a medida do ângulo cêntrico AOP_1 em radianos. Logo, a área do setor circular AOP_1 é $\frac{1}{2} r^2 t_1$.

Seja $r = a = 1$, Então na Fig. 1, para $P(x, y)$,

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad \tfrac{1}{2} t = \text{área } AOP.$$

Na Fig. 2, para $P(x, y)$,

$$x = \cosh v, \quad y = \operatorname{senh} v, \quad \tfrac{1}{2} v = \text{área } AOP.$$

As funções hiperbólicas têm, pois, as mesmas relações com a hipérbole equilátera que as funções trigonométricas têm com o círculo.

PROBLEMAS

1. Mostre que o elemento de comprimento de arco relativo à catenária $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$ é dado por $ds = \cosh \dfrac{x}{a} dx$.

2. Na catenária do Problema 1 prove que o raio de curvatura é igual a $\dfrac{y^2}{a}$.

Verifique os seguintes desenvolvimentos de funções em série de Maclaurin e determine para que valores da variável elas são convergentes

3. $\operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots.$

Resp. Todos os valores

4. $\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$

Resp. Todos os valores

Verifique os seguintes desenvolvimentos usando as séries dos Problemas 3 e 4 e os métodos explicados no § 195.

5. $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 - \frac{61}{720} x^6 + \cdots.$

6. $\operatorname{tgh} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \cdots.$

7. Examine a função $5 \cosh x + 4 \operatorname{senh} x$ no que concerne a máximo e mínimo valores. *Resp.* Mínimo, 3

8. Examine a função $A \operatorname{senh} x + B \cosh x$ no que concerne a máximo e mínimo valores.

Resp. Se $B^2 > A^2$, máximo $= -\sqrt{B^2 - A^2}$ se $B < 0$;
mínimo $= +\sqrt{B^2 - A^2}$ se $B > 0$.

9. Deduza as séries dos Problemas 3 e 4 das séries relativas a e^x e e^{-x}, por subtração e adição. (Use (*A*) e § 195).

10. Seja ds = comprimento do elemento de arco; seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ = raio vetor de $P(x, y)$ relativos ao círculo ou à hipérbole equilátera do § 215, e tome limites de integração relativos ao arco AP_1 das Figs. 1 e 2 da pág. 532. Prove que

(a) $\int \frac{ds}{\rho} = t_1$ para o círculo; (b) $\int \frac{ds}{\rho} = v_1$ para a hipérbole.

11. Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cosh x - \operatorname{senh} x) = 0$.

12. Calcule cada um dos seguintes limites

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2}$. *Resp.* $-\frac{1}{2}$.

13. Dado $\operatorname{tg} \phi = \operatorname{senh} x$, prove que $\frac{d\phi}{dx} = \operatorname{sech} x$.

14. Deduza o desenvolvimento

$$\operatorname{arc\,tg} (\operatorname{senh} x) = x - \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{24} x^5 - \tfrac{61}{5040} x^7 + \ldots$$

por integração como no § 196, usando o resultado do Problema 5.

15. Dada a tratória (v. figura)

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a}, \quad \rho = a \operatorname{sech} \frac{t}{a},$$

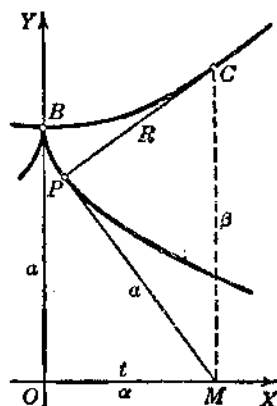
prove que:

(a) o parâmetro t é igual à abscissa do ponto de interseção da tangente à curva com o eixo dos xx.

(b) a constante a é igual ao comprimento da tangente (§ 43).

(c) a evoluta é a catenária

$$\beta = a \cosh \frac{\alpha}{a}.$$

(d) o raio de curvatura PC é $a \operatorname{senh} \frac{t}{a}$.

216. — Funções hiperbólicas inversas. A relação

(1) $$y = \operatorname{senh} v$$

também se escreve

(2) $$v = \operatorname{senh}^{-1} y,$$

e se lê "v igual função inversa do seno hiperbólico de y". Portanto senh v e $\operatorname{senh}^{-1} y$ são funções inversas uma da outra (§ 39). A mesma notação e nomenclatura são usadas para as outras funções hiperbólicas inversas, $\cosh^{-1} v$ (função inversa do coseno hiperbólico de v), etc.

As curvas

(3) $$y = \operatorname{senh} x, \quad y = \cosh x, \quad y = \operatorname{tgh} x$$

são apresentadas abaixo.

Vamos admitir que y seja dada.

Na Fig. 1, y pode ter qualquer valor, positivo ou negativo, e então o valor de x é univocamente determinado.

Na Fig. 2, y pode ter qualquer valor positivo não menor que 1. Quando $y > 1$, x tem dois valores iguais em valor absoluto mas de sinais contrários.

Na Fig. 3, y pode ter qualquer valor menor, em valor absoluto, que 1 e então o valor de x é univocamente determinado.

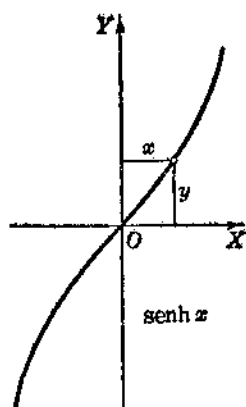
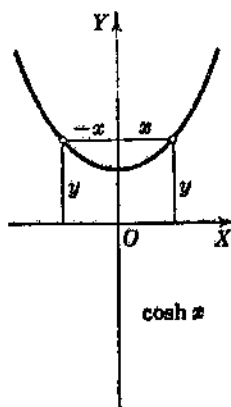
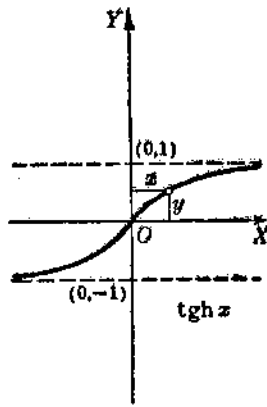



FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3

Resumindo, os resultados são: $\operatorname{senh}^{-1} v$ é univocamente determinado para qualquer valor de v. Tem-se também $\operatorname{senh}^{-1}(-v) =$ $= -\operatorname{senh}^{-1} v$.

A função $\cosh^{-1} v$, quando $v > 1$, tem dois valores diferindo só pelo sinal. Tem-se também $\cosh^{-1} 1 = 0$.

A função $\text{tgh}^{-1} v$ é univocamente determinada quando $v^2 < 1$. Tem-se também $\text{tgh}^{-1}(-v) = -\text{thg}^{-1} v$.

As funções hiperbólicas foram definidas no § 210 em têrmos das funções exponenciais. As funções hiperbólicas inversas são exprimíveis em termos das funções logarítmicas. As relações são

$$\text{(F)} \qquad \text{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \qquad (x \text{ qualquer})$$

$$(G) \qquad \cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}). \qquad (x \geq 1)$$

$$(H) \qquad \text{tgh}^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \qquad (x^2 < 1)$$

DEMONSTRAÇÃO DE (F). Seja $v = \text{senh}^{-1} x$. Então

$$(4) \qquad x = \text{senh}\, v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}. \qquad \text{Por } (A)$$

Para resolver (4) em relação a v, ponhamo-la sob a forma

$$e^v - \frac{1}{e^v} - 2x = 0, \quad \text{ou} \quad e^{2v} - 2xe^v - 1 = 0.$$

Esta é uma equação do segundo grau em e^v. Resolvendo, $e^v = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

Como e^v é sempre positiva, deve-se desprezar o sinal negativo antes do radical. Logo, usando logaritmos neperianos, temos (F).

DEMONSTRAÇÃO DE (G). Seja $v = \cosh^{-1} x$. Então

$$(5) \qquad x = \cosh v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}. \qquad \text{Por } (A)$$

Eliminados os denominadores e reduzindo, vem $e^{2v} - 2xe^v + 1 = 0$.

Resolvendo, $\qquad e^v = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

Os dois valores devem ser considerados. Tomando-se os logaritmos, obtemos (G).

DEMONSTRAÇÃO DE (H). Seja $v = \text{tgh}^{-1} x$. Então

$$(6) \qquad x = \text{tgh}\, v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}. \qquad \text{Por } (C)$$

Efetuando os cálculos,

$$(x - 1)\, e^v + (x + 1)\, e^{-v} = 0. \quad \text{Logo } e^{2v} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Tomando os logaritmos, obtemos (H).

Exemplo ilustrativo. Transformar

$$(7) \qquad 5 \cosh x + 4 \operatorname{senh} x$$

na forma $C \cosh (x + a)$, onde C e a são constantes, e achar C e a.

Solução. Por (E), § 213, temos

$$(8) \qquad C \cosh (x + a) = C \cosh x \cosh a + C \operatorname{senh} x \operatorname{senh} a.$$

Logo, (7) terá a forma desejada se C e a satisfizerem as equações

$$(9) \qquad C \cosh a = 5, \quad C \operatorname{senh} a = 4\,.$$

Quadrando, subtraindo, e usando (B), § 210, obtemos $C^2 = 9$; logo $C =$ $= +\,3$, pois $\cosh a$ deve ser positivo. Por divisão, obtemos também $\operatorname{tgh} a = \frac{4}{5}$; logo

$$a = \operatorname{tgh}^{-1} 0{,}8 = \tfrac{1}{2} \ln 9\,.$$

Portanto $a = 1{,}099$ e

$$(10) \qquad 5 \cosh x + 4 \operatorname{senh} x = 3 \cosh (x + 1{,}099)\,.$$

O gráfico da função $5 \cosh x + 4 \operatorname{senh} x$ pode ser obtido do gráfico de $3 \cosh x$ fazendo-se uma translação do eixo dos yy para a nova origem $(1{,}099,\, 0)$ (Confronte com o exemplo ilustrativo 2, § 206).

Quando x é dado, os valores de $\operatorname{senh}^{-1} x$, $\cosh^{-1} x$ ou $\operatorname{tgh}^{-1} x$ podem ser determinados pela tabela do parág. 212 com não mais que três decimais. Por exemplo, $\operatorname{senh}^{-1} 0{,}25 = 0{,}247$; $\cosh^{-1} 3 =$ $= \pm\, 1{,}76$. Para maior precisão, (F), (G) ou (H) podem ser usados quando se tenha ao alcance uma tábua de logaritmos neperianos.*

217. — Derivadas (continuação). As fórmulas, nas quais v é uma função de x, são as seguintes

$$\text{XXXIII} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{senh}^{-1} v = \frac{\dfrac{dv}{dx}}{\sqrt{v^2 + 1}}. \qquad (v \text{ qualquer})$$

$$\text{XXXIV} \qquad \frac{d}{dx} \cosh^{-1} v = \frac{\dfrac{dv}{dx}}{\pm \sqrt{v^2 - 1}}. \qquad (v > 1)$$

* As Tabelas Matemáticas Smithsonianas, "Hyperbolic Functions" (1909), dão os valores de $\operatorname{senh} u$, $\cosh u$, $\operatorname{tgh} u$, $\operatorname{ctgh} u$ com cinco decimais. Os valores das funções inversas correspondentes com cinco decimais podem ser obtidos por estas tabelas.

XXXV $$\frac{d}{dx}\ \mathrm{tgh}^{-1}\, v = \frac{\dfrac{dv}{dx}}{1 - v^2}. \qquad (v^2 < 1)$$

Demonstração de XXXIII. (confronte § 75). Seja

$$y = \mathrm{senh}^{-1}\, v\,;$$

então $$v = \mathrm{senh}\, y\,.$$

Derivando em relação a y, por XXVII,

$$\frac{dv}{dy} = \cosh y\,;$$

portanto $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cosh y}. \qquad \text{Por } (C),\ \S\ 39$$

Como v é uma função de x, isto pode ser substituído em (A), § 38, o que fornece

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}\frac{dv}{dx}.$$

$$[\cosh y = \sqrt{\mathrm{senh}^2\, y + 1} = \sqrt{v^2 + 1}, \quad \text{por } (B)].$$

As demonstrações de XXXIV e XXXV são semelhantes. Outras fórmulas são as seguintes

(I) $$\mathrm{ctgh}^{-1}\, x = \tfrac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}. \qquad (x^2 > 1)$$

(J) $$\mathrm{sech}^{-1}\, x = \ln\left(\frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right). \qquad (0 < x \leq 1)$$

(K) $$\mathrm{cossech}^{-1}\, x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right). \qquad (x^2 > 0)$$

XXXVI $$\frac{d}{dx}\,\mathrm{ctgh}^{-1}\, v = \frac{-\dfrac{dv}{dx}}{v^2 - 1}. \qquad (v^2 > 1)$$

XXXVII $$\frac{d}{dx}\,\mathrm{sech}^{-1}\, v = \frac{-\dfrac{dv}{dx}}{\pm v\sqrt{1 - v^2}}. \qquad (0 < v < 1)$$

XXXVIII $$\frac{d}{dx}\,\mathrm{cossech}^{-1}\, v = \frac{-\dfrac{dv}{dx}}{v^2\sqrt{1 + \dfrac{1}{v^2}}}. \qquad (v^2 > 0)$$

Detalhes das demonstrações são pedidos nos Problemas 5-8 desta página.

PROBLEMAS

1. Mostre que os dois valores de $\cosh^{-1} x$ em (G) diferem só pelo sinal.

2. Desenhe o gráfico de $y = \frac{1}{2} \operatorname{senh}^{-1} x$. Verifique na figura os valores de y e y' quando $x = 2$. *Resp.* $y = 0{,}72$, $y' = 0{,}2236$.

3. Demonstre XXXIII diretamente, derivando (F).

4. Desenhe o gráfico de cada uma das seguintes curvas e verifique na figura os valores de y e y' para o dado valor de x.

(a) $y = \cosh^{-1} x$; $x = 2$.
(b) $y = \operatorname{tgh}^{-1} x$; $x = -0{,}75$.

5. Demonstre XXXIV e XXXV.

6. Deduza (I) e XXXVI.

7. Deduza (J) e XXXVII.

8. Deduza (K) e XXXVIII.

9. Deduza o desenvolvimento

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

pelo § 195.

10. Dado $\operatorname{senh} x = \operatorname{tg} \phi$, prove que

$$\text{(a) } x = \ln(\sec \phi + \operatorname{tg} \phi)\,; \quad \text{(b) } \frac{dx}{d\phi} = \sec \phi.$$

11. Mostre que $\operatorname{cossech}^{-1} v = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{v}$. Deduza XXXVIII de XXXIII, usando esta relação.

12. Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{ctgh}^{-1} x$. *Resp.* 1

13. Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{cossech}^{-1} x$.

14. Deduza o desenvolvimento

$$\operatorname{senh}^{-1} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} x - \cdots.$$

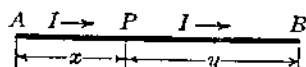
15. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{senh}^{-1} x - \ln x)$. *Resp.* ln 2

16. Mostre que $\operatorname{ctgh}^{-1} v = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{1}{v}$, $\operatorname{sech}^{-1} v = \cosh^{-1} \frac{1}{v}$, e comprove XXXVI e XXXVII por estas relações.

17. Prove que $\frac{d}{dx} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{\operatorname{tgh} a \operatorname{tg} x}{\operatorname{sech} a + \sec x} = \frac{\operatorname{senh} a}{1 + \cosh a \cos x}$.

18. Desenhe os graficos de (a) $y = \operatorname{ctgh}^{-1} x$; (b) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$; (c) $y = \operatorname{cossech}^{-1} x$, usando o teorema do Problema 28, § 41.

218. — Linha telegráfica. Suponhamos que numa linha telegráfica se estabeleceu um "estado contínuo" de fluxo de eletricidade de A, estação transmissora, para B, estação receptora, com isolamento perfeito e fluxo linear uniforme.

A $I \rightarrow$ P $I \rightarrow$ B
x y

Seja P um ponto qualquer intermediário entre as duas estações e consideremos:

a força eletromotriz (volts), f. e. m., E_A em A, E_B em B, E em P;
a intensidade da corrente (amperes), I_A em A, I_B em B, I em P;

as constantes características α e r_0 cujos valores dependem da resistência linear e do fluxo. Elas são números positivos.

Seja $x = AP$; demonstra-se, então, nos livros de engenharia elétrica, que E e I são funções de x satisfazendo as equações

(1) $$\frac{d^2E}{dx^2} - \alpha^2 E = 0\,,$$

(2) $$r_0 \alpha I = -\frac{dE}{dx}.$$

Desejamos achar a f. e. m. e a intensidade da corrente em P. Elas são

(3) $$E = E_A \cosh \alpha x - r_0 I_A \operatorname{senh} \alpha x,$$

(4) $$I = I_A \cosh \alpha x - \frac{E_A}{r_0} \operatorname{senh} \alpha x\,.$$

DEMONSTRAÇÃO. A solução geral de (1) é (Exemplo ilustrativo, § 210)

(5) $$E = A \cosh \alpha x + B \operatorname{senh} \alpha x.$$

Substituindo em (2), vem

(6) $$r_0 I = -A \operatorname{senh} \alpha x - B \cosh \alpha x.$$

Mas $E = E_A$, $I = I_A$ quando $x = 0$. Logo, $A = E_A$, $B = -r_0 I_A$ e (5) e (6) tornam-se (3) e (4) respectivamente.

Para a solução em termos da f. e. m. e intensidade da corrente na estação receptora, ver o Problema 2 abaixo.

PROBLEMAS

A seguir nos referiremos sempre a uma linha telegráfica com um "estado contínuo" de fluxo de A para B e $L = AB$.

1. Dados $E_A = 200$ volts, $L = 500$ Km, $r_0 = 4000$ ohms, $\alpha = 0{,}0025$, $I_B = 0$, achar I_A e E_B.

Resp. $I_A = 0{,}05 \operatorname{tgh} 1{,}25 = 0{,}04238$ ampere;

$$E_B = 200 \operatorname{sech} 1{,}25 = 105{,}8 \text{ volts} = 0{,}53\, E_A.$$

2. Se $y = PB$ = distância de P da estação receptora, mostre que $E = E_B \cosh \alpha y + r_0 I_B \operatorname{senh} \alpha y$, $I = I_B \cosh \alpha y + \dfrac{E_B}{r_0} \operatorname{senh} \alpha y$.

3. Dados $E_A = 200$ volts, $I_A = 0{,}04$ ampere, $r_0 = 4000$ ohms, $\alpha = 0{,}0025$, mostre que

$$E = 120 \cosh (1{,}099 - 0{,}0025\, x),\ I = 0{,}03 \operatorname{senh} (1{,}099 - 0{,}0025\, x).$$

(Veja o exemplo ilustrativo, § 216. A f. e. m. E tende ao mínimo de 120 volts e I tende a zero quando x tende a 439,6).

4. Dados $E_A = 160$ volts, $I_A = 0{,}05$ ampere, $r_0 = 4000$ ohms, $\alpha = 0{,}0025$, mostre que

$$E = 120 \operatorname{senh} (1{,}099 - 0{,}0025\, x), \quad I = 0{,}03 \cosh (1{,}099 - 0{,}0025\, x).$$

(Veja o exemplo ilustrativo, § 216. A f. e. m. E tende a zero e I decresce tendendo ao mínimo de 0,03 ampere quando x tende a 439,6).

5. Prove que $\frac{d^2I}{dx^2} - \alpha^2 I = 0$. (Assim, E e I são soluções da mesma equação diferencial linear, que tem a forma $y'' - \alpha^2 y = 0$).

6. Sendo $E_A = r_0 I_A$, prove que

(a) $E = E_A e^{-\alpha x}$, $I = I_A e^{-\alpha x}$;
(b) $E = r_0 I$;
(c) $E \to 0$ quando x tende ao infinito.

(Por exemplo, se $r_0 = 4000$ e a f. e. m. na estação transmissora é 4000 vezes a intensidade da corrente, então em *cada ponto* da linha a f. e. m. é 4000 vezes a intensidade da corrente e diminui tendendo a zero quando o comprimento da linha cresce e tende ao infinito).

7. No problema 6 mostre que a f. e. m. num ponto da linha distante de uma unidade de P é igual a $Ee^{-\alpha}$, onde e é a base dos logaritmos neperianos.

8. Prove que

(a) se $I_B = 0$, então $E_A = r_0 I_A \operatorname{ctgh} \alpha L$.
(b) se $E_B = 0$, então $E_A = r_0 I_A \operatorname{tgh} \alpha L$.

OUTROS PROBLEMAS

Deduza as seguintes relações

1. Se $E_A > r_0 I_A$ e $\tau = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{r_0 I_A}{E_A}$, então

$$E = E_A \operatorname{sech} \tau \cosh(\tau - \alpha x), \quad I = I_A \operatorname{cossech} \tau \operatorname{senh} (\tau - \alpha x).$$

2. Se $E_A < r_0 I_A$ e $\tau = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{E_A}{r_0 I_A}$, então

$$E = E_A \operatorname{cossech} \tau \operatorname{senh}(\tau - \alpha x), \quad I = I_A \operatorname{sech} \tau \cosh(\tau - \alpha x).$$

219. — Integrais. Damos aqui uma lista de integrais elementares envolvendo funções hiperbólicas. Trata-se de um suplemento à lista do § 128.

$$\int \operatorname{senh} v \, dv = \cosh v + C. \tag{24}$$

$$\int \cosh v \, dv = \operatorname{senh} v + C. \tag{25}$$

(26) $$\int \operatorname{tgh} v\, dv = \ln \cosh v + C.$$

(27) $$\int \operatorname{ctgh} v\, dv = \ln \operatorname{senh} v + C.$$

(28) $$\int \operatorname{sech}^2 v\, dv = \operatorname{tgh} v + C.$$

(29) $$\int \operatorname{cossech}^2 v\, dv = -\operatorname{ctgh} v + C.$$

(30) $$\int \operatorname{sech} v \operatorname{tgh} v\, dv = -\operatorname{sech} v + C.$$

(31) $$\int \operatorname{cossech} v \operatorname{ctgh} v\, dv = -\operatorname{cossech} v + C.$$

As demonstrações resultam imediatamente de XXVII-XXXII, exceto para (26) e (27). Para demonstrar (26), temos

$$\int \operatorname{tgh} v\, dv = \int \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v} dv \qquad \text{por } (C)$$

$$= \int \frac{d(\cosh v)}{\cosh v} = \ln \cosh v + C.$$

A demonstração de (27) é análoga.

Exemplo ilustrativo. Deduza as fórmulas

(1) $$\int \operatorname{sech} v\, dv = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{senh} v) + C\,;$$

(2) $$\int \operatorname{cossech} v\, dv = \ln \operatorname{tgh} \frac{v}{2} + C\,.$$

Solução. Como $\operatorname{sech} v = \dfrac{1}{\cosh v} = \dfrac{\cosh v}{\cosh^2 v} = \dfrac{\cosh v}{1 + \operatorname{senh}^2 v}$, por (B)

temos $$\int \operatorname{sech} v\, dv = \int \frac{\cosh v\, dv}{1 + \operatorname{senh}^2 v} = \int \frac{d(\operatorname{senh} v)}{1 + \operatorname{senh}^2 v}$$

$$= \int d\,[\operatorname{arc\,tg} (\operatorname{senh} v)] = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{senh} v) + C.$$

Para deduzir (2) temos (confronte § 131)

$$\operatorname{cossech} v = \operatorname{cossech} v \frac{\operatorname{cossech} v + \operatorname{ctgh} v}{\operatorname{cossech} v + \operatorname{ctgh} v}$$

$$= \frac{\operatorname{cossech}^2 v + \operatorname{cossech} v \operatorname{ctgh} v}{\operatorname{ctgh} v + \operatorname{cossech} v}.$$

$$\int \operatorname{cossech} v\, dv = -\int \frac{-\operatorname{cossech}^2 v - \operatorname{cossech} v \operatorname{ctgh} v}{\operatorname{ctgh} v + \operatorname{cossech} v} dv$$

$$= -\int \frac{d(\operatorname{ctgh} v + \operatorname{cossech} v)}{\operatorname{ctgh} v + \operatorname{cossech} v}$$

$$= -\ln(\operatorname{ctgh} v + \operatorname{cossech} v) + C$$

$$= -\ln\left(\frac{\cosh v}{\operatorname{senh} v} + \frac{1}{\operatorname{senh} v}\right) + C \qquad \text{por (1), § 211}$$

$$= -\ln(\cosh v + 1) + \ln \operatorname{senh} v + C = \ln \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v + 1} + C$$

$$= \ln \operatorname{tgh} \frac{v}{2} + C. \qquad \text{Por (9), § 213}$$

PROBLEMAS

Calcular as seguintes integrais.

1. $\int \operatorname{senh}^2 v\, dv = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2v - \frac{1}{2} v + C.$

2. $\int \cosh^2 v\, dv = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2v + \frac{1}{2} v + C.$

3. $\int \operatorname{tgh}^2 v dv = v - \operatorname{tgh} v + C.$

4. $\int \operatorname{ctgh}^2 v\, dv = v - \operatorname{ctgh} v + C.$

5. $\int \operatorname{senh}^3 v\, dv = \frac{1}{3} \cosh^3 v - \cosh v + C.$

6. $\int \cosh^3 v\, dv = \frac{1}{3} \operatorname{senh}^3 v + \operatorname{senh} v + C.$

7. $\int \operatorname{tgh}^3 v\, dv = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 v + C.$

8. $\int \operatorname{tgh}^4 v\, dv = v - \operatorname{tgh} v - \frac{1}{3} \operatorname{tgh}^3 v + C.$

9. $\int \operatorname{cossech}^3 v\, dv = -\frac{1}{2} \operatorname{cossech} v \operatorname{ctgh} v - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tgh} \frac{v}{2} + C.$

10. $\int x \operatorname{senh} x\, dx = x \cosh x - \operatorname{senh} x + C.$

11. $\int \cos x \operatorname{senh} x\, dx = \frac{1}{2} (\cos x \cosh x + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x) + C.$

12. $\int \operatorname{senh}(mx) \operatorname{senh}(nx) = \frac{1}{m^2 - n^2} [m \operatorname{senh}(nx) \cosh(mx) - n \cosh(nx) \operatorname{senh}(mx)] + C.$

Calcule cada uma das seguintes integrais

13. $\int \operatorname{senh}^4 x\, dx.$

14. $\int \operatorname{sech}^4 2x\, dx.$

15. $\int \operatorname{sen} x \cosh x\, dx.$

16. $\int x \cosh x\, dx.$

17. $\int x^2 \cosh x\, dx.$ 18. $\int e^x \operatorname{senh} x\, dx.$ 19. $\int e^{ax} \cosh x\, dx.$

Calcule cada uma das seguintes integrais, usando a substituição hiperbólica indicada (confronte § 135).

20. $\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx;\ x = 2 \cosh v.$

Resp. $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4} - 2 \cosh^{-1} \frac{1}{2} x + C.$

21. $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}};\ u = a \operatorname{tgh} z.$

22. $\int \frac{(x + 2)\, dx}{x^2 + 2x + 5};\ x = 2 \operatorname{senh} z - 1.$

23. O arco da catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$, de $(0,a)$ a (x, y), gira em tôrno do eixo dos yy. Achar a área da superfície curva gerada, usando funções hiperbólicas.

24. Achar o centróide do setor hiperbólico OAP_1, figura 2, § 215.

Resp. $\bar{x} = \frac{2}{3} a \frac{\operatorname{senh} v_1}{v_1}$, $\bar{y} = \frac{2}{3} a \frac{\cosh v_1 - 1}{v_1}$.

220. — Integrais (continuação). De XXXIII-XXXVIII podemos deduzir as fórmulas abaixo. Algumas delas foram vistas no § 128. Elas estão expressas agora em termos das funções hiperbólicas inversas.

$$(32) \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1} \frac{v}{a} + C. \qquad (v \text{ qualquer})$$

$$(33) \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \cosh^{-1} \frac{v}{a} + C. \qquad (v \geq a)$$

$$(34) \quad \int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tgh}^{-1} \frac{v}{a} + C. \qquad (v^2 < a^2)$$

$$(35) \quad \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctgh}^{-1} \frac{v}{a} + C. \qquad (v^2 > a^2)$$

$$(36) \quad \int \frac{dv}{v\sqrt{a^2 - v^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{sech}^{-1} \frac{v}{a} + C. \qquad (0 < v < a)$$

$$(37) \quad \int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} \operatorname{cossech}^{-1} \frac{v}{a} + C. \qquad (v \text{ qualquer})$$

$$(38) \quad \int \sqrt{v^2 + a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{senh}^{-1} \frac{v}{a} + C.$$

$$(39) \quad \int \sqrt{v^2 - a^2}\, dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \cosh^{-1} \frac{v}{a} + C.$$

Em (33) e (39) deve-se usar o valor positivo da função inversa do cosseno hiperbólico e em (36) o valor positivo da função inversa da secante hiperbólica.

Demonstrações de (32) e (33). Seja, em (F), $x = \frac{v}{a}$. Então

$$\operatorname{senh}^{-1} \frac{v}{a} = \ln\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2} + 1}\right) = \ln(v + \sqrt{v^2 + a^2}) - \ln a.$$

Logo

$$(1) \qquad \ln\left(v + \sqrt{v^2 + a^2}\right) = \operatorname{senh}^{-1}\frac{v}{a} + \ln a.$$

Do mesmo modo obtemos de (G)

$$(2) \qquad \ln\left(v + \sqrt{v^2 - a^2}\right) = \cosh^{-1}\frac{v}{a} + \ln a.$$

Usando estes resultados no segundo membro de (21), § 128, obtemos (32) e (33).

Demonstraçoes de (34) e (35). Seja $x = \dfrac{v}{a}$ em (H). Então

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\ln\frac{a+v}{a-v} = \operatorname{tgh}^{-1}\frac{v}{a}.$$

Portanto, (34) resulta de (3) e de (19a), § 128.

Do mesmo modo, de (I) e (19), § 128, obtemos (35).

$$\left[\text{Em (19), } \ln\frac{v-a}{v+a} = -\ln\frac{v+a}{v-a}\right].$$

Demonstração de (36). Como

$$d\left(-\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a}\right) = \frac{\dfrac{1}{a}\,d\left(\dfrac{v}{a}\right)}{\pm\dfrac{v}{a}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{a^2}}} = \frac{dv}{\pm v\sqrt{a^2-v^2}},$$

temos $\displaystyle\int\frac{dv}{v\sqrt{a^2-v^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a}$, caso se escolha o sinal positivo deante do radical. A demonstração de (37) é análoga. As fórmulas (38) e (39) resultam de (23), § 128, usando (1) e (2).

Observação. Como

$$\operatorname{ctgh}^{-1}\frac{v}{a} = \operatorname{tgh}^{-1}\frac{a}{v},\quad \operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a} = \cosh^{-1}\frac{a}{v},\quad \operatorname{cossech}^{-1}\frac{v}{a} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{v},$$

as integrais (35)-(37) podem também ser expressas em têrmos de funções mais convenientes para o uso da tabela do § 212.

Exemplo ilustrativo. Deduzir (37) mediante a substituição $v = z \operatorname{cossech} x$ (Confronte § 135)

SOLUÇÃO. Temos

$$\sqrt{v^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{cossech}^2 z + a^2} = a \operatorname{ctgh} z . \qquad \text{Por (2), § 211}$$

Temos também $\quad dv = -a \operatorname{cossech} z \operatorname{ctgh} z \, dz . \qquad$ Por XXXII

$$\text{Logo} \quad \int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 + a^2}} = \int \frac{-a \operatorname{cossech} z \operatorname{ctgh} z \, dz}{a \operatorname{cossech} z \cdot a \operatorname{ctgh} z} = -\frac{1}{a} z + C.$$

Como $\quad z = \operatorname{cossech}^{-1} \frac{v}{a}$, temos (37).

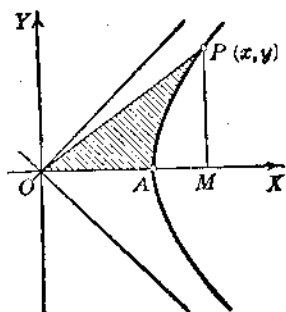
PROBLEMAS

1. A curva da figura é a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$. Usando os resultados do § 142, provar que
(a) área AMP = área do triângulo

$$OMP - \frac{1}{2} a^2 \cosh^{-1} \frac{x}{a} ;$$

(b) área do setor

$$OPA = \frac{1}{2} a^2 \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} a^2 v,$$

se $x = a \cosh v$ (Temos, assim, uma outra demonstração do teorema do § 215).

2. Deduza, por integração, cada um dos seguintes desenvolvimentos em séries de potências (§ 196).

$$\text{(a)} \quad \operatorname{tgh}^{-1} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots (x^2 < 1)$$

$$\text{(b)} \quad \operatorname{senh}^{-1} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots (x^2 < 1)$$

Calcule as seguintes integrais

3. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^{-1} x \, dx = x \operatorname{senh}^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + C .$

4. $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^{-1} x \, dx.$ **5.** $\displaystyle\int x \cosh^{-1} x \, dx.$

Calcule as integrais, usando funções hiperbólicas

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16x^2+9}}$. 7. $\int_0^2 \frac{dx}{25-4x^2}$. 8. $\int_3^5 \sqrt{x^2-9}\,dx$.

9. Ache o comprimento do arco da parábola $x^2 = 4y$ de (0,0) a (4,4), usando funções hiperbólicas. *Resp.* $\sqrt{20} + \text{senh}^{-1} 2 = 5{,}92$.

10. Ache a área limitada pela catenária $y = a \cosh \frac{x}{a}$ e a reta $y = 2a$.

11. A aceleração para baixo, a, de um corpo que cai é dada por $a = 32 - \frac{1}{2} v^2$, e $v = 0$, $s = 0$, quando $t = 0$. Achar v e s.

Resp. $v = 8 \text{ tgh } 4t$, $s = 2 \ln \cosh 4t$.

221. — A gudermaniana. A função arc tg (senh v), que ocorre frequentemente em matemática (por exemplo, em (1), Exemplo ilustrativo, § 219), chama-se a *gudermaniana** de v. Para indicá-la usa-se o símbolo gd v (ler "gudermaniana de v"). Assim,

(1) $$\text{gd } v = \text{arc tg} (\text{senh } v).$$

A derivada é

XXXIX $$\frac{d}{dx} \text{gd } v = \text{sech } v \frac{dv}{dx},$$

admitindo que v seja uma função de x.

Demonstração. Derivando (1), obtemos

$$\frac{d}{dv} \text{gd } v = \frac{\cosh v}{1 + \text{senh}^2 v}. \qquad \text{Por XXII e XXVII}$$

Mas $$1 + \text{senh}^2 v = \cosh^2 v, \qquad \text{Por } (B)$$

e $$\frac{1}{\cosh v} = \text{sech } v. \qquad \text{Por (1), § 211}$$

Então $$\frac{d}{dx} \text{gd } v = \text{sech } v \frac{dv}{dx}. \qquad \text{Por } (A), \text{ § 38.}$$

* Do nome do matemático Gudermann. Seus trabalhos foram publicados em 1830.

Da definição (1) e § 77, vem

(2) $\operatorname{gd}(0) = 0$; $\operatorname{gd}(-v) = -\operatorname{gd} v$; $\operatorname{gd}(+\infty) = \frac{1}{2}\pi$;
$\operatorname{gd}(-\infty) = -\frac{1}{2}\pi$.

Quando v cresce, $\operatorname{gd} v$ cresce (pois $\operatorname{sech} v > 0$). Seu valor está compreendido entre $-\frac{1}{2}\pi$ e $+\frac{1}{2}\pi$. Alguns valores estão dados na tabela ao lado.

v	$\operatorname{gd} v$
0,5	0,480
1,0	0,864
1,5	1,132
2,0	1,302
2,5	1,407
3,0	1,471
3,5	1,510
4,0	1,534
4,5	1,549
5,0	1,557

Por (1), § 219,

$$(40) \qquad \int \operatorname{sech} v \, dv = \operatorname{gd} v + C.$$

Para achar a função inversa (§ 39), seja

$$(3) \quad \phi = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{senh} v), \quad (-\tfrac{1}{2}\pi < \phi < \tfrac{1}{2}\pi)$$

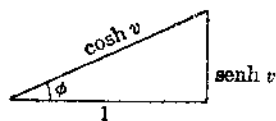
e resolvamos em relação a v. Obtemos

$$(4) \qquad v = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{tg}\phi).$$

De (3) vem $\operatorname{tg}\phi = \operatorname{senh} v$. Como $\cosh^2 v = 1 + \operatorname{senh}^2 v$, por ($B$), as funções trigonométricas de ϕ, quando $v > 0$, podem ser obtidas do triângulo retângulo ao lado. Assim,

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{tgh} v, \ \cos\phi = \operatorname{sech} v, \text{ etc.}$$

A função inversa* (4) pode ser posta sob a forma

$$(5) \qquad v = \ln(\sec\phi + \operatorname{tg}\phi).$$

DEMONSTRAÇÃO. Substituamos em (F), § 216, x por $\operatorname{tg}\phi$. Notando que $1 + \operatorname{tg}^2\phi = \sec^2\phi$, por (2), p. 3, obtemos (5).

Reciprocamente, de (5) resulta que $\phi = \operatorname{gd} v$.

DEMONSTRAÇÃO. A (5) fornece

$$\sec\phi + \operatorname{tg}\phi = e^v, \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg}\phi - e^v = -\sec\phi.$$

* O símbolo $gd^{-1}\phi$ é usado por alguns escritores ($v = gd^{-1}\phi$).

Quadrando ambos os membros, substituindo $\sec^2\phi$ por $1 + \operatorname{tg}^2\phi$ e reduzindo, vem

$$-2\operatorname{tg}\phi\, e^v + e^{2v} = 1.$$

Resolvendo em relação a $\operatorname{tg}\phi$, obtemos

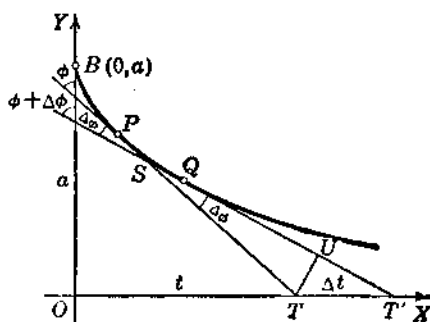
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \operatorname{senh} v. \qquad \text{Por (A)}$$

Logo $$\phi = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{senh} v) = \operatorname{gd} v. \qquad \text{Q. E. D.}$$

Exemplo ilustrativo. Dada a tratória (ver figura), sejam

a = comprimento da tangente PT (constante, por definição);

t = abscissa da interseção da tangente com o eixo dos xx;

ϕ = ângulo formado pela tangente orientada para cima e o eixo dos yy (portanto, $\phi = 0$ quando $t = 0$ e o ponto B $(0, a)$ esta sobre a curva).

Demonstrar que

$$(6) \qquad \phi = \operatorname{gd}\left(\frac{t}{a}\right).$$

Demonstração. Quando t é dado, ϕ é determinado; logo, ϕ é uma função de t. Para a tangente em Q, um ponto próximo de P, sejam respectivamente, $t + \Delta t\,(= OT')$ e $\phi + \Delta\phi$ os valores de t e ϕ. Tracemos TU perpendicular a QT'. Seja S o ponto de interseção das tangentes em P e em Q. Temos, então, nos triângulos retângulos UTT' e STU

$$TU = TT' \cos UTT'; \quad TU = TS \operatorname{sen} TSU.$$

Portanto $$TT' \cos UTT' = TS \operatorname{sen} TSU.$$

Mas, ângulo $UTT' = \phi + \Delta\phi$, ângulo $TSU = \Delta\phi$, $TT' = \Delta t$. Logo

$$\Delta t \cos(\phi + \Delta\phi) = TS \operatorname{sen} \Delta\phi.$$

Façamos Q mover-se sobre a curva, tendendo a P, de modo que $\Delta\phi \to 0$. Então, $\Delta t \to 0$, S tende a P e TS tende a a. Consequentemente, pelo Teorema sobre infinitésimos equivalentes, § 98, e por (B) do § 68, temos

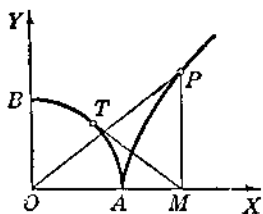
$$dt \cos\phi = a\, d\phi, \quad \text{ou} \quad d\,\frac{t}{a} = \sec\phi\, d\phi.$$

Integrando e lembrando que $\phi = 0$ quando $t = 0$, vem

$$\frac{t}{a} = \ln(\sec\phi + \operatorname{tg}\phi).$$

Logo, por (5)
$$\phi = \operatorname{gd}\left(\frac{t}{a}\right).$$
Q. E. D.

PROBLEMAS

1. A figura mostra o círculo $x^2 + y^2 = 1$ e a hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$ no primeiro quadrante. De M, pé da ordenada MP de um ponto P da hipérbole, traça-se MT tangente ao círculo. Seja $\frac{1}{2}v =$ área do setor hiperbólico OAP (§ 215) e $\phi =$ ângulo AOT. Provar que $\phi = \operatorname{gd} v$.

2. Provar que

(a) $\operatorname{gd} v = 2 \operatorname{arc\,tg} e^v - \frac{1}{2}\pi$;

(b) $\int \operatorname{senh} v \operatorname{tgh} v\, dv = \operatorname{senh} v - \operatorname{gd} v + C$.

3. Traçar o gráfico de $y = \operatorname{gd} x$. Calcular y e y' quando $x = 1$. Ver figura.
Resp. $y = 0{,}86$, $y' = 0{,}65$.

4. No exemplo ilustrativo, p. 551, se P é (x, y), provar que

$$x = t - a \operatorname{sen}\phi, \quad y = a\cos\phi.$$

Destas e de (6) deduzir as equações paramétricas,

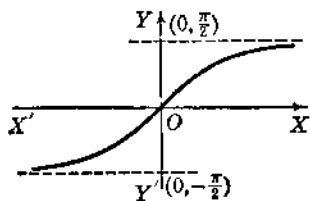
$$x = t - a \operatorname{tgh}\frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech}\frac{t}{a},$$

da tratória. Achar também a equação em coordenadas retangulares.

5. Deduzir $\int \operatorname{sech}^3 v\, dv = \frac{1}{2}\operatorname{sech} v \operatorname{tgh} v + \frac{1}{2}\operatorname{gd} v + C$.

6. Se o comprimento da tangente de uma curva (§ 43) é constante ($= a$),

(a) provar que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$.

(b) integrar usando a substituição hiperbólica $y = a \operatorname{sech}\dfrac{t}{a}$ com a condição $x = 0$ quando $t = 0$ e dêste modo deduzir as equações da tratória, dadas no Problema 4.

7. Calcular cada um dos seguintes limites

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{gd} x - x}{x^3}; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{gd} x - \operatorname{sen} x}{x^5}.$$

Resp. (a) $-\frac{1}{6}$; (b) $\frac{1}{30}$

8. Usando o desenvolvimento em série do Problema 14, § 215, tem-se

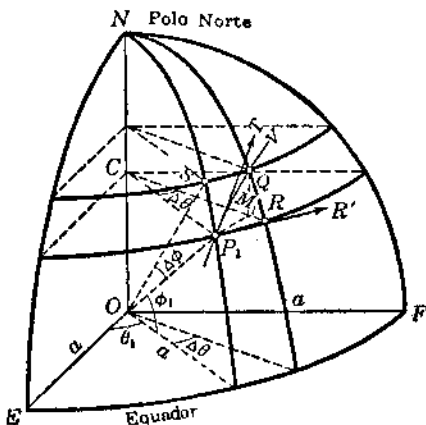
$$\operatorname{gd} x = x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^5 - \tfrac{61}{5040}\,x^7 + \cdots.$$

Calcular o valor de gd 0,5 com quatro decimais. *Resp.* 0,4804.

9. A equação (5), § 221, pode ser posta sob a forma

$$v = \ln \operatorname{tg} (\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\phi).$$

Prove isto, fazendo uso de (2), (4) e (5), pp. 3 e 4.

222. — Carta de Mercator. A figura mostra uma porção (um oitavo) de uma esfera representando a Terra. Estão indicados o Polo Norte N, o Equador EF, a longitude θ_1 e a latitude ϕ_1 de um ponto P_1. Um segundo ponto Q, próximo de P_1 sobre a curva P_1QV, com longitude $\theta_1 + \Delta\theta$ e latitude $\phi_1 + \Delta\phi$, bem como os meridianos e paralelos passando por P_1 e Q estão também indicados. Os meridianos e paralelos formam o quadrilátero P_1SQR. Vamos exprimir os arcos de círculo RQ e P_1R em função da latitude, longitude e raio da esfera.

Como O é o centro dos arcos iguais RQ e P_1S, cada um com ângulo cêntrico $\Delta\phi$, temos

$$(1) \qquad \text{arco } RQ = \text{arco } P_1S = a\,\Delta\phi.$$

Ora, C é também o centro do arco P_1R, com ângulo cêntrico $\Delta\theta$; logo, arco $P_1R = CP_1\,\Delta\theta$. Mas, no triângulo retângulo OP_1C (ângulo reto em C), $CP_1 = a\cos\phi_1$. Logo

$$\text{arco } P_1R = a\cos\phi_1\,\Delta\theta.$$

A linha P_1R' é tangente em P_1 ao paralelo P_1R. A linha P_1T é tangente* em P_1 à curva P_1QV. O ângulo em P_1 compreendido entre a curva e o paralelo é o ângulo $R'P_1T$. Portanto

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg} R'P_1T = \sec \phi_1 \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)_1,$$

sendo o valor da derivada obtido da equação

$$\text{(3)} \qquad \theta = f(\phi)$$

que é satisfeita pela latitude e longitude de cada ponto da curva P_1QV.

DEMONSTRAÇÃO de (2). Pelo teorema sobre infinitésimos equivalentes, § 98, pode-se mostrar** que

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg} R'P_1T = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\text{arco } RQ}{\text{arco } P_1R}.$$

Substituindo os valores de (1), obtemos (2).

Na carta de Mercator*** da superfície da Terra o ponto com latitude ϕ e longitude θ está representado pelo ponto (x, y) tal que

$$\text{(5)} \qquad x = \theta, \; y = \ln(\sec \phi + \operatorname{tg} \phi),$$

ou, inversamente,

$$\text{(6)} \qquad \theta = x, \quad \phi = \operatorname{gd} y. \qquad \text{Pelo § 221}$$

Em (5) e (6), θ e ϕ são expressos em radianos. Os meridianos (θ = constante) estão representados na carta por retas paralelas ao eixo dos yy, os paralelos (ϕ = constante) por retas paralelas ao eixo dos xx. A curva (3) é dada pelas equações paramétricas

$$\text{(7)} \qquad x = f(\phi), \quad y = \ln(\sec \phi + \operatorname{tg} \phi).$$

---

* Definida no § 28 como a posição limite da reta passando por P_1 e Q quando Q tende a P_1, movendo-se sobre a curva P_1Q.

** Os detalhes estão indicados num problema do § 223. Note que os arcos RQ e P_1R são, respectivamente, oposto e adjante ao ângulo em P_1 no triângulo curvilíneo P_1RQ.

*** Gerardus Mercator (1512-1594), famoso cartógrafo, publicou sua Carta do Mundo em 1569. Seu nome é a forma latina de Gerhard Kremer.

TEOREMA. *O ângulo compreendido entre uma curva sobre a superfície esférica e um paralelo que a corta não muda com a representação.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja (x_1, y_1) o ponto de (7) onde $\phi = \phi_1$. Na carta, o paralelo é representado pela reta $y = y_1$; logo, temos que demonstrar que a curva (7) é tal que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \sec \phi_1 \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)_1. \tag{8}$$

Usando (2)

De (7) e (3) obtemos

$$\frac{dy}{d\phi} = \sec \phi, \quad \frac{dx}{d\phi} = f'(\phi) = \frac{d\theta}{d\phi}.$$

A igualdade (8) resulta, pois, de (A), § 81, e (C), § 39. Q.E.D.

Há dois corolários importantes.

COR. I. O ângulo em P_1, sobre a esfera, formado por duas curvas, P_1QR e $P_1Q'R'$ é igual ao ângulo em (x_1, y_1), na carta, formado pelas curvas correspondentes pela representação. Logo, a representação conserva os ângulos.

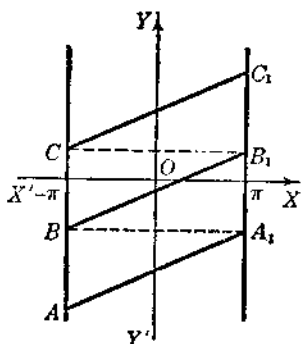
COR. II. Uma reta com coeficiente angular α, na carta, é a correspondente, pela representação, de uma curva, sobre a esfera, que corta cada paralelo sob o mesmo ângulo α. Esta curva chama-se uma *loxodrômica*.

Ao longo de uma loxodrômica

$$\phi = \text{gd}\,(\theta \operatorname{tg} \alpha + b). \tag{9}$$

Isto resulta de (6) e de $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$. A rota de um navio que mantém sempre a mesma direção é uma loxodrômica. Na representação (5), θ, e portanto x, tem valores compreendidos entre $-\pi$ e $+\pi$, inclusive; y pode ter qualquer valor (§ 221). Portanto, a superfície da Terra está representada na faixa do plano xy determinada pelas retas $x = -\pi$ e $x = +\pi$.

Pela tabela do § 221 podemos achar a latitude em graus dos paralelos que são dados sobre a carta pelas retas y = constante.

y	0	0,5	1,0	1,5	2	3	4	5
lat.	0°	27°31′	49°36′	64°51′	74°35′	84°18′	87°54′	89°14′

Uma loxodrômica é representada no mapa por uma série de segmentos paralelos como AA_1, BB_1, CC_1, etc., na figura, onde BA_1, CB_1, etc. são paralelas ao eixo dos xx. A representação é "conforme", isto é, a forma das pequenas áreas se preserva. Isto resulta do Cor. I. Por exemplo, uma figura triangular* sobre a superfície da Terra, limitada por loxodrômicas, será um triângulo no mapa e os ângulos correspondentes das duas figuras são iguais. A imagem, na carta, de uma área sobre a superfície da Terra, também depende da distância que a separa do Equador. O problema 4, p. 558, trata dêste ponto.

223. — Relações entre as funções trigonométricas e as hiperbólicas. Seja o expoente v da função exponencial e^v um número complexo $x + iy$ (x e y são números reais, $i = \sqrt{-1}$). Então, poremos, por definição,

$$(1) \qquad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Se $x = 0$, temos (ver § 206).

$$(2) \qquad e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Trocando y por $-y$, (2) torna-se

$$(3) \qquad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y\,.$$

Resolvendo (2) e (3) em relação a sen y e cos y, vem

$$(4) \qquad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Vê-se, assim, que o seno e o cosseno de uma variável real são exprimíveis em termos de funções exponenciais com expoentes imaginários.

As fórmulas (4) e (A) sugerem definições para as funções mencionadas quando a variável é um número complexo qualquer z.

* As retas $x = -\pi$ e $x = +\pi$ representam o mesmo meridiano (180° W. ou 180° E.) Admite-se que este meridiano não corta o triângulo curvilíneo. Na figura, A_1 e B representam o mesmo ponto sobre a Terra, B_1 e C também.

Estas definições são

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

(5)

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

As outras funções trigonométricas e hiperbólicas de z são definidas pelas mesmas razões que as usadas quando a variável é um número real.

De (5) resulta

$$(L) \qquad \operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z, \quad \cosh iz = \cos z.$$

$$\left[\operatorname{senh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \operatorname{sen} z, \text{ usando (5) ; etc.}\right]$$

De (L), por divisão, obtém-se

$$(6) \qquad \operatorname{tgh} iz = i \operatorname{tg} z.$$

A semelhança de muitas fórmulas dêste capítulo com outras para funções trigonométricas é explicada pelas relações (L) e (6) (ver Exemplo ilustrativo 2). Os segundos membros de (5) são exprimíveis por números complexos cujas partes reais envolvem apenas funções trigonométricas e hiperbólicas de variáveis reais. Isto aparece abaixo no Exemplo Ilustrativo 1.

Exemplo ilustrativo 1. Deduzir a fórmula

$$(7) \qquad \operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y.$$

Solução. Por (5), se $z = x + iy$, temos

$$(8) \qquad \operatorname{senh}(x + iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2}$$

$$(9) \qquad = \frac{e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) - e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2}.$$

Por (1), § 210, se $v = x$, temos

$$e^{x} = \cosh x + \operatorname{senh} x, \quad e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x.$$

Substituindo estes valores em (9) e reduzindo, vem (7).

Trocando i por $-i$, (7) torna-se

$$\operatorname{senh}(x - iy) = \operatorname{senh} x \cos y - i \cosh x \operatorname{sen} y.$$

Observe-se a forma do segundo membro aqui e em (7).

Exemplo ilustrativo 2. Prove diretamente, por (5), as relações

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1 .$$

Solução. Os detalhes são os mesmos que os da demonstração de (*B*), § 210. A primeira relação pode ser deduzida da segunda como segue:

Seja $z = iv$. Então $\cosh^2 iv - \operatorname{senh}^2 iv = 1$. Mas, por (*L*), $\cosh iv = \cos v$, $\operatorname{senh} iv = i \operatorname{sen} v$. Logo $\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1$.

PROBLEMAS

1. Usando diferenciais, mostre que na Carta de Mercator a distância que separa retas paralelas ao eixo dos xx representando paralelos de latitudes ϕ_1 e $\phi_1 + \Delta\phi$, varia proporcionalmente a $\sec \phi_1$.

2. Ao longo de uma loxodrômica $\phi = \operatorname{gd}(\theta \operatorname{tg} \alpha + b)$, prove, por derivação, que $\operatorname{tg} \alpha = \sec \phi \dfrac{d\phi}{d\theta}$.

3. A altura h da zona, sobre a esfera, limitada pelos paralelos $\phi = \phi_2$, $\phi = \phi_1$ $(\phi_2 > \phi_1)$ é $a(\operatorname{sen} \phi_2 - \operatorname{sen} \phi_1)$ (ver figura, § 222). Se $y = y_2$, $y = y_1$ são as correspondentes paralelas no mapa, provar que

$$\text{(a)} \quad h = a(\operatorname{tgh} y_2 - \operatorname{tgh} y_1) ;$$

$$\text{(b)} \quad dy = \frac{1}{a} \sec^2 \phi_1 \, dh, \text{ se } \phi_2 = \phi_1 + d\phi.$$

4. Usando (*b*), Problema 3, mostrar que zonas iguais de pequena altura cujas bases inferiores são paralelos de latitudes 0°, 30°, 45°, 60°, respectivamente, estão representadas por retângulos cujas áreas estão entre si como 3 : 4 : 6 : 12. (A área de uma zona é igual à sua altura vezes a circunferência de um círculo máximo).

5. Descrever a direção de uma curva sôbre a esfera (a) se $\dfrac{d\phi}{d\theta} = 0$; (b) se $\dfrac{d\phi}{d\theta}$ é infinita.

6. Deduza, pelo método usado no Exemplo Ilustrativo 1, cada uma das seguintes fórmulas.

$$\text{(a)} \quad \cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y ;$$

$$\text{(b)} \quad \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y = i \cos x \operatorname{senh} y ;$$

$$\text{(c)} \quad \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y .$$

Destas, calcular os valores de $\cosh(x - iy)$, $\operatorname{sen}(x - iy)$, $\cos(x - iy)$.

7. Prove que (a) $\operatorname{senh}\left(i\frac{\pi}{2} \pm x\right) = i \cosh x$;

(b) $\cosh\left(i\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \pm\, i \operatorname{senh} x$.

8. Calcule, com duas decimais, as expressões abaixo

(a) $\operatorname{senh}(1{,}5 + i)$; (b) $\cosh(1 - i)$;
(c) $\cos(0{,}8 + 0{,}5\,i)$; (d) $\operatorname{sen}(0{,}5 + 0{,}8\,i)$.

Resp. (a) $1{,}15 + 1{,}98\,i$; (c) $0{,}78 - 0{,}37\,i$.

OUTROS PROBLEMAS

1. Na figura do § 222, P_1M_1 é perpendicular a CR e, por conseguinte, perpendicular ao plano do meridiano NQR. Portanto, o triângulo P_1QM_1 é retângulo (a corda P_1Q não está traçada) e $\operatorname{tg} M_1P_1Q = \frac{M_1Q}{P_1M_1}$. Quando $\Delta\theta \to 0$, a reta P_1M_1 tende à tangente P_1R' e o ângulo M_1P_1Q tende ao ângulo $R'P_1T$. Consequentemente,

$$\operatorname{tg} R'P_1T = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{M_1Q}{P_1M_1}. \tag{10}$$

Compare com (4), § 222, e mostre que

(a) $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{P_1M_1}{\text{arco}\, P_1R} = 1$ (ver Fig. 1);

(b) $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{M_1Q}{\text{arco}\, RQ} = 1$ (ver Fig. 2, a qual mostra o plano do meridiano NQR). No triângulo M_1QR, mostre que M_1R é um infinitésimo de ordem mais alta que QR quando $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$ são de mesma ordem (§ 99). Então, ver problema do § 99, usando (a) e (b) e o teorema sôbre infinitésimos equivalentes, § 98, (10) torna-se (4), § 222.

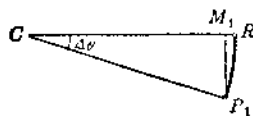
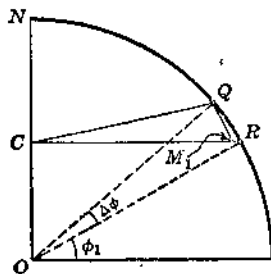



FIG. 1

FIG. 2

2. Se ds_1 é o elemento de comprimento de arco de uma curva sôbre a esfera do § 222, provar que $ds_1{}^2 = a^2(d\phi^2 + \cos^2\phi\, d\theta^2)$. (Na figura do § 222,

$$(\text{corda } P_1Q)^2 = \overline{P_1M_1}^2 + \overline{M_1Q}^2 \text{ e } \lim \frac{\text{corda } P_1Q}{\text{arc } P_1Q} = 1).$$

3. Se ds é a diferencial do arco de uma curva sobre a Carta de Mercator, mostrar que $ds^2 = \sec^2\phi\,(d\phi^2 + \cos^2\phi\, d\theta^2)$. (Comparando com o Problema 2, temos $ds_1{}^2 = a^2\cos^2\phi\, ds^2$).

4. Achar o comprimento de uma loxodrômica entre pontos cujas latitudes diferem de $\Delta\phi$. *Resp.* $a \operatorname{cossec}\alpha\,\Delta\phi$ (a = raio da Terra).

5. Mostrar que as quatro primeiras fórmulas em (4), p. 3, e (*D*), (*E*), § 213, subsistem quando x, y, v e w são substituídos por números complexos (Use as definições (5)).

6. Demonstre as fórmulas do Problema 6, p. 558, usando os resultados do Problema 5 e (*L*).

7. Prove que $\operatorname{tgh}(x + iy) = \dfrac{\operatorname{senh} 2x + i \operatorname{sen} 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$.

8. Deduza a fórmula para $\operatorname{tg}(x + iy)$ do resultado do problema precedente.

CAPÍTULO XXIII

DERIVAÇÃO PARCIAL

224. — Funções de diversas variáveis. Nos capítulos precedentes estudou-se o cálculo para funções de uma variável. Vamos agora estudar funções de mais de uma variável independente. Na matemática elementar encontramos exemplos simples de tais funções. Assim, o volume de um cilindro circular reto

$$(1) \qquad v = \pi x^2 y$$

é uma função das duas variáveis independentes x (= raio) e y (= altura). A área de um triângulo

$$(2) \qquad u = \frac{1}{2} xy \operatorname{sen} \alpha$$

é uma função das três variáveis independentes x, y e α, representando, respectivamente, dois lados e o ângulo compreendido entre êles.

Tanto em (1) como em (2) os valores que podem ser atribuídos às variáveis do segundo membro são, evidentemente, independentes um do outro.

A relação

$$(3) \qquad z = f(x, y)$$

pode ser representada gràficamente por uma superfície, lugar geométrico da equação (3), interpretando-se x, y e z como coordenadas retangulares, como na geometria analítica do espaço. Esta superfície é o gráfico da função de duas variáveis $f(x, y)$.

Uma função $f(x, y)$ de duas variáveis independentes x e y diz-se *contínua* para $x = a$, $y = b$, se

$$(A) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b),$$

qualquer que seja o modo como x e y tendam, respectivamente, aos limites a e b.

Esta definição é, algumas vezes, enunciada abreviadamente, do seguinte modo: quando x e y são suficientemente próximos de a e b respectivamente, $f(x, y)$ difere muito pouco de $f(a, b)$*.

Isto pode ser ilustrado geomètricamente, considerando-se a superfície representada pela equação

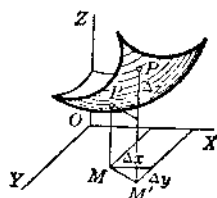
$$(3) \qquad z = f(x, y).$$

Seja M, de coordenadas a e b, a projeção de um ponto fixo VP da superfície.

Indiquemos com Δx e Δy os acréscimos das variáveis x e y respectivamente e com Δz o correspondente acréscimo da função z. Seja P' o ponto, da superfície, de coordenadas

$$(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a,b) + \Delta z).$$

Em M o valor da função é

$$z = f(a, b) = MP.$$

Se a função é contínua em M, então Δz tende a 0 quando Δx e Δy tendem a zero, qualquer que seja o modo como estas últimas tendem a zero, isto é, $M'P'$ tende a coincidir-se com MP, quando P' tende a P, movendo-se sobre a superfície, qualquer que seja a direção em que se dá o movimento.

A definição de continuidade para funções de mais de duas variáveis é semelhante à anterior.

A seguir consideraremos somente os valores para os quais a função em estudo é contínua.

---

* Para uma melhor compreensão disto, deve o leitor reler o § 17 sobre funções contínuas de uma só variável.

225. — Derivadas parciais. Na relação

$$(1) \qquad z = f(x, y),$$

podemos fixar y e fazer variar apenas x. Então, z torna-se uma função de uma variável x e podemos, portanto, considerar a derivada dela em relação a x, como temos feito até agora. Essa derivada chama-se *derivada parcial* de z em relação a x. Semelhantemente, fixando x e fazendo variar y podemos considerar a derivada parcial de z em relação a y. A notação é

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ = derivada parcial de z em relação a x (y permanece constante).*

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ = derivada parcial de z em relação a x (y permanece constante).*

Para funções de três ou mais variáveis, as derivadas parciais são indicadas de modo análogo.

Para evitar confusão, o símbolo ∂ ("d rond")** tem sido geralmente usado para indicar derivação parcial.

Exemplo ilustrativo 1. Achar as derivadas parciais de $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2by$, **tratando y como constante,**

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2bx + 2cy$, tratando x como constante.

Exemplo ilustrativo 2. Achar as derivadas parciais de $u = \operatorname{sen}(ax + by + cz)$.

SOLUÇÃO. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a\cos(ax + by + cz)$, tratando y e z como constantes,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = b\cos(ax + by + cz)$, tratando x e z como constantes,

$\dfrac{\partial u}{\partial z} = c\cos(ax + by + cz)$, tratando y e x como constantes.

---

* O valor constante pode ser substituído na função antes de derivar.

** Introduzido por Jacobi (1804-1851).

Com referência a (1), temos, nas notações comumente usadas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = f_x = z_x ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = f_x = z_y .$$

Notações semelhantes são usadas para funções de um número qualquer de variáveis.

Tendo em vista o § 24, temos

$$(2) \qquad f_x(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x},$$

$$(3) \qquad f_y(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

226. — Interpretação geométrica das derivadas parciais.

Seja $\qquad z = f(x, y).$

a equação da superfície mostrada na figura.

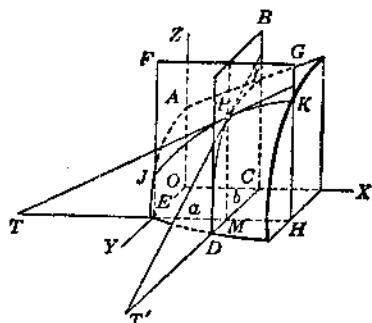
Pelo ponto P (onde $x = a$ e $y = b$) da superfície tracemos um plano $EFGH$, paralelo ao plano XOZ. Como a equação deste plano é

$$y = b ,$$

a equação da curva de interseção JPK com a superfície é

$$z = f(x, b) ,$$

se considerarmos EF como o eixo dos Z e EH como o eixo dos X. Neste plano, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ tem o mesmo significado que $\dfrac{dz}{dx}$ e, portanto, temos

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} MTP =$ coeficiente angular da curva de interseção JK em P.

Semelhantemente, se o plano BCD passa por P e é paralelo ao plano YOZ, sua equação é

$$x = a$$

e relativamente à curva de interseção DPI, $\frac{\partial z}{\partial y}$ tem o mesmo significado que $\frac{dz}{dy}$. Consequentemente

(2) $\frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{tg} MT'P =$ coeficiente angular da curva de interseção DI em P.

Exemplo ilustrativo. Dado o elipsóide $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$, achar o coeficiente angular da curva de interseção do elipsóide (a) com o plano $y = 1$, no ponto onde $x = 4$ e z é positivo; (b) com o plano $x = 2$, no ponto onde $y = 3$ e z é positivo.

Solução. Considerando y como constante,

$$\frac{2x}{24} + \frac{2z}{6}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}.$$

Quando x é constante, $\frac{2y}{12} + \frac{2z}{6}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, ou $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}$.

(a) Quando $y = 1$ e $x = 4$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$. $\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$. *Resp.*

(b) Quando $x = 2$ e $y = 3$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$. *Resp.*

PROBLEMAS

Calcule as derivadas parciais das seguintes funções.

1. $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$.

Resp. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + By + D$; $\frac{\partial z}{\partial y} = Bx + 2Cy + E$.

2. $f(x, y) = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$.

Resp. $f_x(x, y) = 3(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$;
$f_y(x, y) = 3(Bx^2 + 2Cxy + Dy^2)$.

3. $f(x, y) = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$.

$$Resp.\quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(AD - BC)\,y}{(Cx + Dy)^2}\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(BC - AD)\,x}{(Cx + Dy)^2}.$$

4. $u = xy + yz + zx$.
Resp. $u_x = y + z$; $u_y = x + z$; $u_z = x + y$.

5. $f(x, y) = (x + y)\,\text{sen}\,(x - y)$.
Resp. $f_x(x, y) = \text{sen}\,(x - y) + (x + y)\cos(x - y)$;
$f_y(x, y) = \text{sen}\,(x - y) - (x + y)\cos(x - y)$.

6. $\rho = \text{sen}\,2\,\theta\cos 3\,\phi$. *Resp.* $\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta} = 2\cos 2\,\theta\cos 3\,\phi$;

$$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = -\,3\,\text{sen}\,2\,\theta\,\text{sen}\,3\,\phi.$$

7. $\rho = e^{\theta+\phi}\cos(\theta - \phi)$.

$$Resp.\quad \frac{\partial \rho}{\partial \phi} = e^{\theta+\phi}\,\{\cos(\theta - \phi) - \text{sen}\,(\theta - \phi)\}\,;$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \phi} = e^{\theta+\phi}\,\{\cos(\theta - \phi) + \text{sen}\,(\theta - \phi)\}.$$

8. $f(x, y) = 3\,x^4 - 4\,x^3y + 6\,x^2y^2$.

9. $u = \dfrac{x + 2\,y}{y + 2\,z}$.

10. $z = e^{\frac{z}{y}}\ln\dfrac{y}{x}$.

11. $f(x, y) = (x + 2\,y)\,\text{tg}\,(2\,x + y)$.

12. $\rho = \text{tg}\,2\,\theta\,\text{ctg}\,4\,\phi$.

13. $\rho = e^{-\theta}\cos\dfrac{\theta}{\phi}$.

14. Se $f(x, y) = 2\,x^2 - 3\,xy + 4\,y^2$, mostre que $f_x(2, 3) = -\,1$, $f_y(2, 3) = 18$.

15. Se $f(x, y) = \dfrac{2\,x}{x - y}$, mostre que $f_x(3, 1) = -\frac{1}{2}$, $f_y(3, 1) = \frac{3}{2}$.

16. Se $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen}(x + 2y)$, mostre que $f_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= -1, f_y\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

17. Se $u = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$, mostre que $x\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 4u.$

18. Se $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$, mostre que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u.$

19. Se $u = x^2y + y^2z + z^2x$, mostre que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} =$

$$= (x + y + z)^2.$$

20. Se $u = \frac{Ax^n + By^n}{Cx^2 + Dy^2}$, mostre que $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = (n-2)u.$

21. A área de um triângulo é dada pela fórmula $K = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$. Dados $b = 10$ polegadas, $c = 20$ polegadas, $A = 60°$,

(a) achar a área;

(b) achar a velocidade de variação da área em relação ao lado b se c e A permanecem constantes;

(c) achar a velocidade de variação da área em relação ao ângulo A se b e c permanecem constantes;

(d) usando a velocidade achada em (c), calcular aproximadamente a variação da área quando o ângulo é acrescido de um grau;

(e) achar a velocidade de variação de c em relação a b se a área e o ângulo permanecem constantes.

22. A lei dos cossenos para um triângulo é $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Dados $b = 10$ polegadas, $c = 15$ polegadas, $A = 60°$,

(a) achar a;

(b) achar a velocidade de variação de a em relação a b se c e A permanecem constantes;

(c) usando a velocidade achada em (b), calcular aproximadamente a variação de a se b decresce de uma polegada;

(d) achar a velocidade de variação de a em relação a A se b e c permanecem constantes;

(e) achar a velocidade de variação de c em relação a A se a e b permanecem constantes.

227. — Diferencial total. No § 91 vimos o que é diferencial de uma função de uma variável; precisamente, se a função é

$$y = f(x),$$

a diferencial é

$$(1) \qquad dy = f'(x)\,\Delta x = \frac{dy}{dx}\,\Delta x = \frac{dy}{dx}\,dx\,.$$

Vamos agora ver o que é diferencial de uma função de duas variáveis.

Consideremos a função

$$(2) \qquad u = f(x, y).$$

Sejam Δx e Δy acréscimos de x e y respectivamente e Δu o correspondente acréscimo da função u. Temos

$$(3) \qquad \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Somando e subtraindo $f(x, y + \Delta y)$ no segundo membro,

$$(4) \qquad \Delta u = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Aplicando o teorema do valor médio (D), § 116, a cada uma das duas diferenças do segundo membro de (4), obtemos, para a primeira diferença

$$(5) \quad f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = f_x(x+\theta_1\,\Delta x, y+\Delta y)\,\Delta x.$$

[$a = x$, $\Delta a = \Delta x$, e como x varia e $y + \Delta y$ permanece constante, obtemos a derivada parcial em relação a x.]

Para a segunda diferença,

$$(6) \qquad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y + \theta_2\,\Delta y)\,\Delta y\,.$$

[$a = y$, $\Delta a = \Delta y$, e como y varia e x permanece constante, obtemos a derivada parcial em relação a y.]

Substituindo os resultados (5) e (6) em (4), vem

$$(7) \quad \Delta u = f_x(x + \theta_1\,\Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x, y + \theta_2\,\Delta y)\,\Delta y,$$

e θ_1 e θ_2 são positivos e menores que 1.

Como $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ são funções contínuas de x e y, os coeficientes de Δx e Δy em (7) tendem a $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$, respectivamente, quando Δx e Δy tendem a zero. Temos, pois,

$$(8) \qquad f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \epsilon,$$

$$(9) \qquad f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \epsilon',$$

onde ϵ e ϵ' são infinitésimos com Δx e Δy, isto é,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \epsilon = 0, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \epsilon' = 0,$$

e (7) torna-se, então,

$$(10) \qquad \Delta u = f_x(x, y)\, \Delta x + f_y(x, y)\, \Delta y + \epsilon \Delta x + \epsilon' \Delta y.$$

Pois bem, *diferencial total* ($= du$) de u é, por definição, a expressão

$$(11) \qquad du = f_x(x, y)\, \Delta x + f_y(x, y)\, \Delta y.$$

A diferencial total de u é a "parte principal" do acréscimo Δu, isto é, quando Δx e Δy são muito pequenos, du e Δu diferem de muito pouco (confronte § 92).

Se $u = x$, (11) torna-se, òbviamente, $dx = \Delta x$; se $u = y$, (11) torna-se $dy = \Delta y$. Substituindo êstes valores de Δx e Δy em (11), obtemos a importante fórmula

$$(B) \qquad du = f_x(x, y)\, dx + f_x(x, y)\, dy = \\ = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Se u é uma função de três variáveis, sua diferencial total é

$$(C) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

e assim sucessivamente, para funções de um número qualquer de variáveis.

Uma interpretação geométrica de (B) será dada no § 238.

Exemplo ilustrativo 1. Calcular Δu e du para a função

$$u = 2\,x^2 + 3\,y^2, \tag{12}$$

quando $x = 10$, $y = 8$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$, e comparar os resultados.

SOLUÇÃO. Substituamos em (12) x, y, e u respectivamente por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ e $u + \Delta u$, e procedamos como abaixo

$$\begin{aligned} u + \Delta u &= 2\,(x + \Delta x)^2 + 3\,(y + \Delta y)^2 \\ &= 2\,x^2 + 3\,y^2 + 4\,x\,\Delta x + 6\,y\,\Delta y + 2\,(\Delta x)^2 + 3\,(\Delta y)^2. \\ u &= 2\,x^2 + 3\,y^2 \end{aligned}$$

$$\Delta u = 4\,x\,\Delta x + 6\,y\,\Delta y + 2\,(\Delta x)^2 + 3\,(\Delta y)^2. \tag{13}$$

Derivando (12), vem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\,x\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6\,y\,.$$

Substituindo em (B), obtemos

$$du = 4\,x\,dx + 6\,y\,dy\,. \tag{14}$$

Lembrando que $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, vemos que o segundo membro de (14), é a "parte principal" do segundo membro de (13), pois os termos restantes são do segundo grau em Δx ou Δy. Êste resultado ilustra (10) e (11) acima (precisamente, $\epsilon = 2\,\Delta x$, $\epsilon' = 3\,\Delta y$).

Substituindo os valores dados em (13) e (14), vem

$$\Delta u = 8 + 14{,}4 + 0{,}08 + 0{,}27 = 22{,}75\,; \tag{15}$$

$$du = 8 + 14{,}4 = 22{,}4\,. \tag{16}$$

Portanto $\Delta u - du = 0{,}35 = 1{,}6\,\%$ de Δu. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Sendo $u = \text{arc tg}\,\dfrac{y}{x}$, achar du

SOLUÇÃO $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}\,.$$

Substituindo em (B), $du = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$. *Resp.*

PROBLEMAS

Achar a diferencial total de cada uma das seguintes funções.

1. $z = 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 3\,y^3$.

Resp. $dz = (6\,x^2 - 4\,y^2)\,dx + (9\,y^2 - 8\,xy)\,dy$.

2. $u = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$. $du = \dfrac{(AD - BC)(y\,dx - x\,dy)}{(Cx + Dy)^2}$.

3. $u = xy^2z^3$. $du = y^2z^3\,dx + 2\,xyz^3\,dy + 3\,xy^2z^2\,dz$.

4. $u = x^2 \cos 2\,y$. 5. $\theta = \text{arc tg}\,\dfrac{y}{x}$.

6. $u = (x - y)\ln(x + y)$.

7. Se $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, mostre que $dz = -\dfrac{x\,dx + y\,dy}{z}$.

8. Achar dz se $4\,x^2 - 9\,y^2 - 16\,z^2 = 100$.

9. Calcular Δu e du para a função $u = x^2 - 3\,xy + 2\,y^2$ quando $x = 2$, $y = -3$, $\Delta x = -0{,}3$, $\Delta y = 0{,}2$.

Resp. $\Delta u = -7{,}15$, $du = -7{,}5$.

10. Calcular du para a função $u = (x + y)\sqrt{x - y}$ quando $x = 6$, $y = 2$, $dx = \frac{1}{4}$, $dy = -\frac{1}{2}$.

11. Calcular Δu e du para a função $u = xy + 2\,x - 4\,y$ quando $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}4$, $\Delta y = -0{,}2$.

12. Calcular $d\rho$ para a função $\rho = e^{\frac{\theta}{2}} \operatorname{sen}(\theta - \phi)$ quando $\theta = 0$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$, $d\theta = 0{,}2$ e $d\phi = -0{,}2$.

228. — Valor aproximado do acréscimo. Pequenos erros. As fórmulas (*B*) e (*C*) são usadas para calcular Δu aproximadamente. Quando os valores de x e y são determinados por medida ou pela experiência e portanto estão sujeitos a erros pequenos Δx e Δy, uma aproximação sensível do erro em u pode ser achado por (*B*). (Confronte § § 92 e 93).

Exemplo ilustrativo. Achar, aproximadamente, o volume do material com que é feita uma panela sem tampa de forma cilíndrica, sabendo que o diâmetro interior e a altura são, respectivamente, 6 polegadas e 8 polegadas e que a espessura do material é de $\frac{1}{8}$ de polegada.

SOLUÇÃO. O volume v de um cilindro circular reto com diâmetro x e altura y é

$$(1) \qquad v = \tfrac{1}{4}\,\pi\,x^2\,y\,.$$

Òbviamente, o volume do material é a diferença Δv entre os volumes de dois cilindros, um para o qual $x = 6\frac{1}{4}$, $y = 8\frac{1}{8}$ e outro para o qual $x = 6$, $y = 8$. Como se quer apenas um valor aproximado, podemos calcular dv ao invés de Δv.

Derivando (1) e usando (B), obtemos

$$(2) \qquad dv = \tfrac{1}{2}\,\pi\, xy\, dx + \tfrac{1}{4}\,\pi x^2\, dy\,.$$

Pondo em (2), $x = 6$, $y = 8$, $dx = \dfrac{1}{4}$, $dy = \dfrac{1}{8}$, obtemos

$$dv = 7\,\frac{1}{8}\,\pi = 22{,}4 \text{ polegadas cúbicas.} \quad \textit{Resp.}$$

O valor exato é $\Delta v = 23{,}1$ polegadas cúbicas.

Exemplo ilustrativo 2. Mediu-se dois lados de um triângulo e o ângulo compreendido entre eles e achou-se, respectivamente, 63 pés, 78 pés e 60°. As medidas estão sujeitas a um erro máximo de 1 pé em cada comprimento e 1.° no ângulo. Achar o máximo erro aproximado e o erro por centum no cálculo do terceiro lado, usando estas medidas.

SOLUÇÃO. Usando a lei dos cossenos ((7), § 2),

$$(3) \qquad u^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy \cos\alpha\,,$$

onde x, y são os lados, α o ângulo compreendido entre êles e u o terceiro lado. Os dados são

$$(4) \quad x = 63,\ y = 78,\ \alpha = 60° = \frac{\pi}{3},\ dx = dy = 0{,}1,\ dy = 0{,}01745 \text{ (radiano)}$$

Derivando (3), vem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x - y\cos\alpha}{u}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - x\cos\alpha}{u}\,,\quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{xy \operatorname{sen}\alpha}{u}\,.$$

Logo, usando (C),

$$du = \frac{(x - y\cos\alpha)\,dx + (y - x\cos\alpha)\,dy + xy\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{u}\,.$$

Substituindo os valores de (4), achamos

$$du = \frac{2{,}4 + 4{,}65 + 74{,}25}{71{,}7} = 1{,}13 \text{ pé.} \quad \textit{Resp.}$$

O erro per centum é $100\,\dfrac{du}{u} = 1{,}6\ \%$. *Resp.*

PROBLEMAS

1. Mediu-se os catetos de um triângulo retângulo e achou-se 6 pés e 8 pés com erros máximos em cada um de 0,1 pé. Achar

aproximadamente o erro máximo e o erro por centum, calculando (a) a área, (b) a hipotenusa, usando estas medidas.

Resp. (a) 0,7 pés quad., 2,9%;
(b) 0,14 pés, 1,4%.

2. No problema precedente achar, usando as dadas dimensões, o ângulo oposto ao maior lado e calcular o máximo erro aproximado nesse ângulo em radianos e em gráus.

3. Os raios das bases de um tronco de cone circular reto foram medidos e se achou 5 polegadas e 11 polegadas. Mediu-se também a geratriz e esta acusou 12 polegadas. O êrro máximo em cada medida é 0,1 de polegada. Achar o erro aproximado e o erro per centum calculando, com estas medidas, (a) a altura, (b) o volume (ver (12), § 1).

Resp. (a) 0,23 polegadas, 2,2%;
(b) 24,4 π polegadas cúbicas, $3\frac{1}{2}$%.

4. Um lado de um triângulo mede 2 000 pés e os ângulos adjacentes medem 30° e 60°, com um máximo êrro em cada ângulo de 30′. O máximo erro na medida do lado é ± 1 pé. Achar o máximo erro aproximado e o erro per centum, calculando mediante estas medidas (a) a altura relativa ao dado lado; (b) a área do triângulo.

Resp. (a) 17,88 pés; 2,1%.

5. O diâmetro e a altura de um cilindro circular reto medem, com um êrro provável de 0,2 polegada em cada medida, respectivamente, 12 polegadas e 8 polegadas. Qual é, aproximadamente, o máximo êrro possível no cálculo do volume?

Resp. 16,8 π polegadas cúbicas.

6. As dimensões de uma caixa foram obtidas, com um erro provável de 0,05 pé na medida; achou-se 6, 8 e 12 pés. Pergunta-se (a) qual é, aproximadamente, o máximo erro possível no cômputo do volume? (b) qual é o erro per centum?

Resp. (a) 10,8 pés cúbicos; (b) $\frac{15}{8}$%.

7. Dada a superfície $z = \dfrac{x - y}{x + y}$, se no ponto $x = 4$, $y = 2$, x e y são acrescidos de $\frac{1}{10}$, qual é a variação aproximada de z?

Resp. $-\frac{1}{90}$

8. O peso específico de um sólido é dado pela fórmula $s = \frac{P}{w}$, onde P é o peso no vácuo e w o peso de igual volume de água. Como é afetado o peso específico por um erro de $\pm \frac{1}{10}$ no peso de P e $\pm \frac{1}{20}$ no peso de w, tomando-se $P = 8$ e $w = 1$, (a) se ambos os erros são positivos, (b) se um erro é negativo; (c) qual é, aproximadamente, o máximo erro per centum?

Resp. (a) 0,3; (b) 0,5; (c) $6\frac{1}{4}\%$.

9. O diâmetro e a geratriz de um cone circular reto medem respectivamente 10 polegadas e 20 polegadas. Se há um erro provável de 0,2 polegada em cada medida, qual é, aproximadamente, o máximo erro possível no cálculo do valor (a) do volume? (b) da superfície lateral?

Resp. (a) $\frac{37\pi\sqrt{15}}{18} = 25$ poleg. cub.; (b) $3\pi = 9{,}42$ pol.^{2}

10. Mediu-se dois lados de um triângulo e achou-se 63 pés e 78 pés. O ângulo compreendido entre os lados mede 60°, com um erro provável de 2°. Sabendo que há um erro provável de 0,5 pé na medida dos lados, qual é, aproximadamente, o máximo erro possível no cálculo do valor da área? (Ver (7), § 2).

Resp. 73,6 pés quadrados.

11. Se o peso específico de um corpo é determinado pela fórmula $s = \frac{A}{A - W}$ onde A é o peso no ar e W o peso na água, qual é (a) o máximo erro em s, aproximadamente, se A varia entre $9 - 0{,}01$ libras e $9 + 0{,}01$ libras e W entre $5 - 0{,}02$ libras e $5 + 0{,}02$ libras? (b) o máximo erro relativo?

Resp. (a) 0,0144; (b) $\frac{23}{3\,600}$.

12. Calculou-se a resistência de um circuito pela fórmula $C = \frac{E}{R}$, onde C = corrente e E = força eletromotriz. Se há um erro de 0,1 de ampere na leitura de C e de $\frac{1}{20}$ de volt na leitura de E, (a) qual é o erro aproximado em R se as leituras são $C = 15$ amperes e $E = 110$ volts? (b) qual é o erro per centum?

Resp. (a) 0,0522 ohms; (b) $\frac{47}{66}\%$.

13. Se se usa a fórmula $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$ para calcular $\operatorname{sen}(x + y)$, qual é o erro aproximado no resultado

se se comete um erro de 1°, na medida tanto de x como de y, sabendo que as medidas dos dois ângulos agudos deram $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen} y = \frac{5}{13}$? *Resp.* 0,0018.

14. A aceleração de uma partícula que desce num plano inclinado é dada por $a = g \operatorname{sen} i$. Se g varia de 0,1 pé por segundo quadrado e i, cuja medida acusou 30° é passível de um erro de 1°, qual é o erro aproximado no cálculo do valor de a? Tome o valor de g como 32 pés por segundo quadrado.

Resp. 0,534 pés por segundo quadrado.

15. O período de um pêndulo é $P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; (a) qual é o máximo erro aproximado no período se há um erro de $\pm 0{,}1$ pé na medida de cada 10 pés e na medida de $g = 32$ pés por segundo quadrado pode haver um erro de 0,05 pé por segundo quadrado? (b) qual é o erro per centum?

Resp. (a) 0,0204 seg; (b) $\frac{37}{64}\%$.

16. As dimensões de um cone são raio da base = 4 polegadas, altura = 6 polegadas. Qual o erro aproximado no volume e na superfície total se há um encurtamento de 0,01 polegada por polegada na medida usada

Resp. $dV = 3{,}0159$ polegadas cúbicas
$dS = 2{,}818$ polegadas quadradas.

17. O comprimento l e o período P de um pêndulo simples estão ligados pela relação $4\pi^2 l = P^2 g$. Se l é calculado admitindo $P = 1$ segundo e $g = 32$ pés por segundo quadrado, qual é aproximadamente o erro em l se os valores reais são $P = 1{,}02$ segundo e $g = 32{,}01$ pés por segundo quadrado? Qual é o erro per centum?

18. Um sólido tem a forma de um cilindro terminado nos extremos por semi-esferas de mesmo raio que o do cilindro. As dimensões são diâmetro = 8 polegadas e comprimento total = 20 polegadas. Qual é aproximadamente o erro no volume e na superfície se a fita usada para a medida esticou-se uniformemente $\frac{1}{2}\%$ além de seu próprio comprimento?

19. Admitindo que a equação característica de um gás perfeito é $vp = Rt$, onde v = volume, p = pressão, t = temperatura absoluta e R = constante, qual é a relação entre as diferenciais dv, dp e dt? *Resp.* $vdp + pdv = Rdt$.

20. Usando o resultado anterior em relação ao ar, suponha que achou-se num dado caso $t = 300°$ C, $p = 2\,000$ libras por pé quadrado, $v = 14{,}4$ pés cúbicos. Achar a mudança em p, admitindo que ela é uniforme quando t muda para 301 °C e v para 14,5 pés cúbicos, sendo $R = 96$.

Resp. $-7{,}22$ libras por pé quadrado.

229. — Derivadas totais. Velocidades. Suponhamos que as variáveis x e y que figuram em

$$(1) \qquad u = f(x, y)$$

não sejam independentes. Suponhamos, por exemplo, que ambas sejam funções de uma terceira variável t, precisamente,

$$(2) \qquad x = \phi(t), \; y = \psi(t).$$

Quando estes valores são substituídos em (1), u torna-se uma função de uma variável t e a sua derivada em relação a t pode ser achada do modo usual. Temos, neste caso,

$$(3) \qquad du = \frac{du}{dt}dt, \quad dx = \frac{dx}{dt}dt, \quad dy = \frac{dy}{dt}dt.$$

A fórmula (B) foi deduzida supondo que x e y são variáveis independentes; podemos, contudo, mostrar fàcilmente que ela também vale para o caso atual. Para fazê-lo, voltemos a (10), § 227, e dividamos ambos os membros por Δt. Obtemos, mudando a notação,

$$(4) \qquad \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\epsilon\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon'\frac{\Delta y}{\Delta t}\right).$$

Ora, quando $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$; logo (ver § 227)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \epsilon = 0, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \epsilon' = 0.$$

Portanto, quando $\Delta t \to 0$, (4) torna-se

$$(D) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Multiplicando ambos os membros por dt e usando (3), obtemos (B), isto é, (B) *vale também quando x e y são funções de uma terceira variável t.*

Do mesmo modo, se

$$u = f(x, y\, z)$$

e x, y e z são funções de t, temos

$$(E) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

e assim sucessivamente para um número qualquer de variáveis.

Em (D) podemos supor $t = x$; então y é uma função de x e u é realmente uma função de uma variável x. Tem-se neste caso

$$(F) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Do mesmo modo, de (E) resulta, quando y e z são funções de x,

$$(G) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

O leitor deve observar que $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{du}{dx}$ têm significados diferentes. A derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ é o limite da razão entre os acréscimos quando se dá à *particular variável x um acréscimo e se mantêm tôdas as outras variáveis fixas*, enquanto na definição de $\frac{du}{dx}$ *as demais variáveis não se mantêm constantes quando x recebe o acréscimo, mas sofrem também elas próprias outros tantos acréscimos*. Para distinguir a derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ da derivada $\frac{du}{dx}$ costuma-se dar a esta última o nome de *derivada total* de u em relação a x. Deve-se observar que enquanto a derivada parcial tem um valor determinado em cada ponto, o valor da derivada total num ponto só é determinado quando se dá também a direção particular segundo a qual a derivada total deve ser calculada.

Exemplo ilustrativo 1. Dados $u = \operatorname{sen}\frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = t^2$, achar $\frac{du}{dt}$.

Solução. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$; $\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = 2t$.

Substituindo em (D), $\frac{du}{dt} = (t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Dados $u = e^{ax}(y-z)$, $y = a \operatorname{sen} x$, $z = \cos x$, achar $\frac{du}{dt}$.

Solução. $\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y-z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}$; $\frac{dy}{dx} = a\cos x$, $\frac{dz}{dx} = -\operatorname{sen} x$.

Substituindo em (G),

$$\frac{du}{dx} = ae^{ax}(y-z) + ae^{ax}\cos x + e^{ax}\operatorname{sen} x = e^{ax}(a^2+1)\operatorname{sen} x. \quad \textit{Resp.}$$

Nota. Nos exemplos acima, poder-se-ia, por substituição, achar u explìcitamente em termos da variável independente e depois, então, derivar diretamente; geralmente, porém, êste processo é mais longo ou então impraticável.

As fórmulas (D) e (E) são úteis em todas as aplicações envolvendo velocidade de variação em relação ao tempo de funções de duas ou mais variáveis. O processo é pràticamente o mesmo que o esboçado na regra dada no § 52, exceto que, ao invés de derivar em relação a t (Terceiro Passo), achamos as derivadas parciais e substituímos em (D) ou (E). Ilustremos isto com um exemplo.

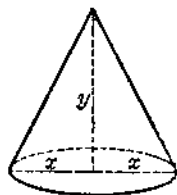
Exemplo ilustrativo 3. A altura de um cone circular é de 100 polegadas e decresce à razão de 10 polegadas por segundo. O raio da base é de 50 polegadas e cresce à razão de 5 polegadas por segundo. Com que velocidade varia o volume?

Solução. Seja x = raio da base, y = altura; então

$$u = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \text{volume}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\pi xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}\pi x^2.$$

Substituindo em (D), $\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\pi xy\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}\pi x^2\frac{dy}{dt}$.

Mas $x = 50$, $y = 100$, $\frac{dx}{dt} = 5$, $\frac{dy}{dt} = -10$.

$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\pi \cdot 5000 \cdot 5 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2500 \cdot 10 = 15{,}15$ pés cúbicos por segundo, crescendo. *Resp.*

230. — Mudança de variáveis.

Se as variáveis de

$$(1) \qquad u = f(x, y)$$

são mudadas pela transformação

$$(2) \qquad x = \phi(r, s), \quad y = \psi(r, s),$$

as derivadas parciais de u em relação às novas variáveis r e s podem ser obtidas por (D). Realmente, se mantemos s fixo, então x e y em (2) são funções só de r; logo,

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

sendo, neste caso, parciais todas as derivadas em relação a r.

Do mesmo modo,

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Em particular, seja a transformação dada por

$$(5) \qquad x = x' + h, \quad y = y' + k,$$

sendo x' e y' as novas variáveis e h e k constantes. Temos

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = 1.$$

Obtemos, pois, de (3) e (4).

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'}.$$

Portanto, a transformação (5) não altera os valores das derivadas parciais.

Se os valores de x e y em (5) são substituídos em (1), obtém-se

$$(7) \qquad u = f(x, y) = F(x', y').$$

Os resultados em (6) podem agora ser postos sob a forma

$$(8) \qquad f_x(x, y) = F_{x}'(x', y'), \quad f_y(x, y) = F_{y}'(x', y').$$

No § 229 mostrou-se que (B) é verdadeira quando x e y são funções de uma só variável t. Vamos mostrar agora que (B) também

vale quando x e y são funções de duas variáveis independentes r e s, como em (2).

De fato, quando r e s são variáveis independentes, temos, por (B)

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}\,dr + \frac{\partial x}{\partial s}\,ds\,, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r}\,dr + \frac{\partial y}{\partial s}\,ds\,.$$

Substituamos estes valores na expressão

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

e reduzamos por (3) e (4). Obtemos

$$(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial r}\,dr + \frac{\partial u}{\partial s}\,ds\,.$$

Mas, por (1) e (2), u torna-se uma função das variáveis independentes r e s; logo, por (B), (10) é igual a du. Consequentemente (9) é também igual a du, isto é, (B) vale quando x e y são funções de duas variáveis independentes.

Do mesmo modo, pode-se mostrar que (C) vale quando x, y e z são funções de duas ou três variáveis independentes

231. — Derivação das funções implícitas. A equação

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

define x como função (implícita) de y ou y como função (implícita) de x.

Ponhamos

$$(2) \qquad u = f(x, y)\,;$$

então

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\,, \qquad \text{por } (F)$$

caso y seja função de x. Em particular, se y é uma função de x, definida implìcitamente pela equação (1), então para tal função é $u = 0$, portanto $du = 0$ e se tem

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 . \tag{3}$$

Resolvendo, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} . \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right) \tag{H}$$

Temos, assim, uma fórmula para derivar funções implícitas. Esta fórmula, na forma (3), traduz o processo empregado no § 41 para a derivação de funções implícitas. Todos os exemplos do mencionado parágrafo podem ser resolvidos com ela.

Quando a equação de uma curva esta sob a forma (1), a fórmula (H) fornece um modo fácil de calcular o coeficiente angular dela.

Exemplo ilustrativo 1. Dado $x^2y^4 + \operatorname{sen} y = 0$, achar $\frac{dy}{dx}$.

SOLUÇÃO. Seja $f(x, y) = x^2y^4 + \operatorname{sen} y$.

Então $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2\,xy^4,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4\,x^2y^3 + \cos y$.

Portanto, de (H), $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2\,xy^4}{4\,x^2y^3 + \cos y}$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Se x cresce à razão de 2 polegadas por segundo quando passa pelo valor $x = 3$ polegadas, com que velocidade deve variar y quando $y = 1$ polegada afim de que a função $2xy^2 - 3\,x^2y$ permaneça constante?

SOLUÇÃO. Seja $u = 2\,xy^2 - 3\,x^2y$; então, como u permanece constante, $\frac{du}{dt} = 0$. Substituindo este valor no primeiro membro de (D), tranpondo e resolvendo em relação a $\frac{dy}{dt}$, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}\frac{dx}{dt} . \tag{4}$$

Também $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2y^2 - 6xy, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4xy - 3x^2.$

Substituindo em (4), $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{2y^2 - 6xy}{4xy - 3x^2}\dfrac{dx}{dt}.$

Mas $x = 3, \quad y = 1, \ \dfrac{dx}{dt} = 2.$

Logo $\dfrac{dy}{dt} = -2\dfrac{2}{15}$ polegadas por segundo. *Resp.*

De modo semelhante, a equação

(5) $$F(x, y, z) = 0$$

define z como função implícita das duas variáveis independentes x e y. Para achar as derivadas parciais de z em relação a x e a y, procedamos como segue.

Seja $u = f(x, y, z).$

Então $$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz,$$

por (B), e isto vale quaisquer que sejam as variáveis independentes (§ 230). Escolhamos agora z como a função das variáveis independentes x e y que satisfaz (5). Então $u = 0$, $du = 0$ e temos

(6) $$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0.$$

Mas agora $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$ Por (B)

Substituindo este valor em (6) e simplificando vem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = 0.$$

Aqui $dx\,(= \Delta x)$ e $dy\,(= \Delta y)$ são acréscimos independentes. Podemos, pois, pôr $dy = 0$, $dx \neq 0$, dividir ambos os membros

por dx e resolver em relação a $\frac{\partial z}{\partial x}$. Obtemos

$$(I) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Procedendo de modo semelhante, acha-se também

$$(J) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

As fórmulas (I) e (J) são interpretadas como segue: nos primeiros membros z é a função de x e y que satisfaz (5). Nos segundos membros F é a função de três variáveis, x, y, z, dada no primeiro membro de (5).

A generalização de (H), (I) e (J) às funções implícitas de um número qualquer de variáveis é óbvia.

Exemplo ilustrativo. Pela equação

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0,$$

z é definida como função implícita de x e y. Achar as derivadas parciais desta função.

SOLUÇÃO. $$F = \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1.$$

Logo $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{12}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{6}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{3}.$$

Substituindo em (I) e (J), vem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}. \quad \textit{Resp.}$$

(Compare com o Exemplo Ilustrativo do § 226).

PROBLEMAS

Nos problemas 1-5 achar $\dfrac{du}{dt}$.

1. $u = x^2 - 3\,xy + 2\,y^2;\ x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t.$

Resp. $\dfrac{du}{dt} = \operatorname{sen} 2\,t - 3\cos 2\,t.$

2. $u = x + 4\sqrt{xy} - 3\,y;\ x = t^3,\ y = \dfrac{1}{t},\quad \dfrac{du}{dt} = 3\,t^2 + 4 + \dfrac{3}{t^2}.$

3. $u = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x;\ x = \frac{1}{2}\,t,\ y = 2\,t.$

Resp. $\dfrac{du}{dt} = e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\,t + 2\cos 2\,t\right) + e^{2t}\left(2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\,t + \frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\,t\right).$

4. $u = 2\,x^2 - xy + y^2;\ x = \cos 2\,t,\ y = \operatorname{sen} t\,.$

5. $u = xy + yz + zx;\ x = \dfrac{1}{t},\ y = e^t,\ x = e^{-t}.$

Nos problemas 6-10 achar $\dfrac{dy}{dx}$ pela fórmula (H).

6. $Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + F = 0\,.$

Resp. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}.$

7. $x^3 + y^3 - 3\,axy = 0\,.\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$

8. $e^x \operatorname{sen} y - e^y \cos x = 1.\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{e^y \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} y}{e^y \cos x - e^x \cos y}.$

9. $x^4 - x^2y^2 - x^2 + 2\,y^2 = 8\,.$

10. $Ax^4 + 2\,Bx^2y^2 + Cy^4 = (x^2 + y^2)^2.$

Nos problemas 11-15 verificar que os valores dados de x e y satisfazem à equação e achar o valor correspondente de $\dfrac{dy}{dx}$.

11. $x^2 + 2\,xy + 2\,y = 22;\ x = 2,\ y = 3.$ *Resp.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{3}.$

12. $x^3 - y^3 + 4\,xy = 0;\ x = 2,\ y = -2.\qquad \dfrac{dy}{dx} = 1.$

13. $Ax + By + Ce^{xy} = C;\ x = 0,\ y = 0.$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{A}{B}.$

14. $2x - \sqrt{2xy} + y = 4;\ x = 2,\ y = 4.$

15. $e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x = 1;\ x = 0,\ y = 0.$

Nos Problemas 16-20 achar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

16. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D.$

Resp. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{Ax}{Cz};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{By}{Cz}.$

17. $Axy + Byz + Czx = D.$

Resp. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{Ay + Cz}{Cx + By};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{Ax + Bz}{Cx + By}.$

18. $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 10.$

Resp. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy};\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{xz - 2\sqrt{yxz}}{\sqrt{xyz} - xy}.$

19. $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0.$

20. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = G.$

21. Um ponto move-se sobre a curva interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ com o plano $y = 2$. Quando x é 6 e esta crescendo 4 unidades por segundo, achar (a) a velocidade de variação de z e (b) a velocidade com a qual o ponto se move.

Resp. (a) 8 unidades por segundo;(b) $4\sqrt{5}$ unidades por segundo.

22. Um ponto move-se sobre a curva interseção da superfície $x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$ com o plano $x - y + 2 = 0$. Quando x é três e esta crescendo 2 unidades por segundo, achar (a) a velocidade de variação de y, (b) a velocidade de variação de z, (c) a velocidade com a qual o ponto se move.

Resp. (a) 2 unidades por segundo; (b) $\dfrac{24}{7}$ unidades por segundo;

(c) 4,44 unidades por segundo.

23. A equação característica de um gás perfeito é $R\theta = pv$, onde θ é a temperatura, p a pressão, v o volume e R uma constante. Num dado instante uma certa quantidade de gás tem 15 pés cúbicos de volume e está sob a pressão de 25 libras por polegada quadrada. Tomando $R = 96$, achar a temperatura e a velo-

cidade de variação dela se o volume cresce à razão de $\frac{1}{2}$ pé cúbico por segundo e a pressão decresce à razão de $\frac{1}{10}$ de libra por polegada quadrada por segundo.

Resp. A temperatura cresce à razão de $\frac{11}{96}$ graus por segundo.

24. Um triângulo ABC está sendo transformado de modo a que o ângulo A mude com velocidade de variação uniforme de 0^o a 90^o em 10 segundos, enquanto o lado AC decresce de 1 polegada por segundo e o lado AB cresce uma polegada por segundo. Se num dado instante, $A = 60^o$, $AC = 16$ polegadas e $AB = 10$ polegadas, (a) com que rapidez varia BC? (b) com que rapidez varia a área ABC?

Resp. (a) 0,911 polegadas por segundo;
(b) 8,88 polegadas quadradas por segundo.

232. — Derivadas de ordem mais alta. Se

$$u = f(x, y), \tag{1}$$

então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y(x, y) \tag{2}$$

são elas próprias funções de x e y e podem, por sua vez, serem derivadas. Assim, tomando a primeira função e derivando, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = f_{yx}(x, y). \tag{3}$$

Do mesmo modo, da segunda função em (2), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f_{xy}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y). \tag{4}$$

Em (3) e (4) há aparentemente quatro derivadas de segunda ordem. Mostramos abaixo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \tag{K}$$

posto que, apenas, sejam contínuas as derivadas em questão, isto é, *a ordem de derivação sucessiva em relação a x e y não influi no resul-*

tado. Deste modo, $f(x, y)$ tem só três derivadas parciais de segunda ordem, precisamente.

$$(5) \qquad f_{xx}(x, y), \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), \quad f_{yy}(x, y).$$

Isto pode ser extendido fàcilmente às derivadas de ordem mais alta. Por exemplo, sendo (K) verdadeira.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}.$$

Resultados semelhantes valem para funções de três ou mais variáveis.

Exemplo ilustrativo. Dado $u = x^3 y - 3x^2y^3$, verificar que $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

SOLUÇÃO. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - 6xy^3$, $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 3x^2 - 18xy^2$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 9x^2y^2$, $\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 18xy^2$.

Logo, a fórmula é verificada.

DEMONSTRAÇÃO DE (K). Consideremos a expressão

$$(6) \quad F = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y).$$

Introduzamos a função

$$(7) \qquad \phi(u) = f(u, y + \Delta y) - f(u, y),$$

onde u é uma variável auxiliar. Então

$$\phi(x + \Delta x) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y),$$
$$(8) \qquad \phi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Portanto (6) pode ser posta sob a forma

$$(9) \qquad F = \phi(x + \Delta x) - \phi(x).$$

Aplicando o teorema do valor médio (*D*), § 116,

$$(10) \qquad F = \Delta x\, \phi'(x + \theta_1 \Delta x). \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$
$$[f(x) = \phi(u),\ a = x,\ \Delta a = \Delta x].$$

O valor de $\phi'(x + \theta_1 \Delta x)$ é obtido de (8) tomando a derivada parcial em relação a x e substituindo x por $x + \theta_1 \Delta x$. Assim, (10) torna-se

$$(11) \quad F = \Delta x\,(f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x(x + \theta_1 \Delta x, y)).$$

Aplicando agora (*D*), § 116, a $f_x(x + \theta_1 \Delta x, v)$, tomando v como variável independente, vem

$$(12) \quad F = \Delta x\, \Delta y\, f_{yx}(x + \theta_1 \Delta x\ y + \theta_2 \Delta y). \qquad (0 < \theta_2 < 1)$$

Trocando-se o segundo e o terceiro termos do segundo membro de (6), um procedimento análogo dará

$$(13) \quad F = \Delta y\, \Delta x f_{xy}(x+\theta_3 \Delta x, y+\theta_4 \Delta y). \quad (0<\theta_3<1, 0<\theta_4<1)$$

Logo, de (12) e (13),

$$(14) \quad f_{yx}(x + \theta_1 \Delta x, y + \theta_2 \Delta y) = f_{xy}(x + \theta_3 \Delta x, y + \theta_4 \Delta y).$$

Tomando os limites de ambos os membros quando Δx e Δy tendem a zero, vem

$$(15) \qquad f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y),$$

pois estas funções foram supostas contínuas.

EXERCÍCIOS

Achar as derivadas parciais de segunda ordem de cada uma das seguintes funções.

1. $f(x, y) = Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2$.
Resp. $f_{xx}(x, y) = 2\,A$; $f_{xy}(x, y) = 2\,B$; $f_{yy}(x, y) = 2\,C$.

2. $f(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$.
Resp. $f_{xx}(x, y) = 6\,Ax + 2\,By$; $f_{xy}(x, y) =$
$= 2\,Bx + 2\,Cy$; $f_{yy}(x, y) = 2\,Cx + 6\,Dy$.

3. $f(x, y) = Ax + By + Ce^{xy}$.

Resp. $f_{xx}(x, y) = Cy^2e^{xy}$; $f_{xy} = C(1 + xy)e^{xy}$; $f_{yy}(x, y) = Cx^2e^{xy}$.

4. $f(x, y) = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$.

5. $f(x, y) = x^2 \cos y + y^2 \operatorname{sen} x$.

6. Se $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3$, mostre que $f_{xx}(2, 3) = 30$, $f_{xy}(2, 3) = 48$, $f_{yy}(2, 3) = 6$.

7. Se $f(x, y) = x^4 - 4x^3y + 8xy^3 - y^4$, mostre que

$f_{xx}(2, -1) = 96$, $f_{xy}(2, -1) = -24$, $f_{yy}(2, -1) = -108$.

8. Se $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y^2 + y^4$, ache os valores de $f_{xx}(2, -2)$, $f_{xy}(2, -2)$, $f_{yy}(2, -2)$.

9. Se $u = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$, mostre que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24\,Ax + 6\,By, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 6\,Bx + 4\,Cy,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 4\,Cx + 6\,Dy, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6\,Dx + 24\,Ey.$$

10. Se $u = (ax^2 + by^2 + cz^2)^3$, mostre que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}.$$

11. Se $u = \dfrac{xy}{x + y}$, mostre que $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

12. Se $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

13. Se $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

OUTROS PROBLEMAS

1. Uma colina circular tem uma secção vertical central na forma de uma curva cuja equação é $x^2 + 160\,y - 1\,600 = 0$, onde a unidade é a jarda. O cume está sendo derrubado, mediante a retirada de camadas horizontais de terra, à razão constante de 100 jardas cúbicas por dia. Com que rapidez cresce a área da seção horizontal quando a colina tem 4 jardas a menos de altura?

Resp. 25 jardas quadradas por dia.

2. Se $u = \dfrac{e^{xy}}{e^x + e^y}$, mostre que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = (x + y - 1)\,u$.

3. Se $u = \dfrac{1}{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{r^4}.$$

4. Se $z = x^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$, mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} =$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

5. Se $u = z \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{y}$, mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

6. Se $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$, mostre que $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 2\,e^{x+y+z-3u}$

7. Se $u = f(x, y)$ e $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

8. Seja $u = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^k$. Que valores de k satisfazem a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$?

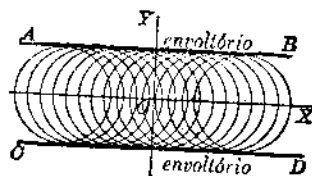
Resp. $k = 1 - \dfrac{n}{2}\ (n > 2)$.

Capitulo XXIV

APLICAÇÕES DAS DERIVADAS PARCIAIS

233. — Envoltória de uma família de curvas. A equação de uma curva contém geralmente, além das variáveis x e y, certas constantes das quais dependem a forma, a posição e a amplitude da curva. Por exemplo, a curva representada pela equação

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$$

é uma circunferência cujo centro esta sobre o eixo dos xx à distância α da origem e a amplitude da curva depende do raio r. Suponhamos que α tome uma série de valores e que r seja fixo; teremos, então, uma série de círculos de raios iguais diferindo, contudo, pela posição, como mostra a figura.

Um sistema de curvas formado dêste modo, diz-se uma *família de curvas*. A grandeza α, que é constante para cada curva, mas muda quando se passa de uma curva à outra da família, diz-se parâmetro. Para indicar que α figura como parâmetro é usual inserí-lo no símbolo funcional, assim

$$f(x, y, \alpha) = 0 .$$

As curvas de uma família podem ser tangentes a uma mesma curva ou grupo de curvas, como na figura acima. Neste caso, o nome *envoltória* da família de curvas é dado à curva ou grupo de curvas. Vamos agora dar um modo de achar a equação da envoltória de uma família de curvas.

Suponhamos que a curva de equações paramétricas

(1) $$x = \phi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha)$$

seja tangente a cada curva da família

(2) $$f(x, y, \alpha) = 0,$$

sendo o mesmo o parâmetro α nos dois casos. Para cada valor de α, as coordenadas (1) satisfazem (2); logo, por (E), § 229, sendo $u = f(x, y, \alpha)$, $du = df = 0$, $z = \alpha$, temos

(3) $$f_x(x, y, \alpha)\,\phi'(\alpha) + f_y(x, y, \alpha)\,\psi'(\alpha) + f_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

O coeficiente angular de (1) num ponto qualquer é

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)}, \qquad (A), \text{ § } 81$$

e o coeficiente angular de (2) num ponto qualquer é

(5) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y, \alpha)}{f_y(x, y, \alpha)}. \qquad (H), \text{ § } 231$$

Como as curvas (1) e (2) são tangentes, os coeficientes angulares num ponto de tangência devem ser iguais, ou seja,

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)} = -\frac{f_x(x, y, \alpha)}{f_y(x, y, \alpha)}, \quad \text{ou}$$

(6) $$f_x(x, y, \alpha)\,\phi'(\alpha) + f_y(x, y, \alpha)\,\psi'(\alpha) = 0.$$

Comparando (6) e (3), vem

(7) $$f_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Portanto, as coordenadas do ponto de tangência satisfazem as equações

(8) $$f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{e} \quad f_\alpha(x, y, \alpha) = 0,$$

isto é, as equações paramétricas da envoltória, quando existe envoltória, podem ser achadas resolvendo-se as equações (8) em relação a x e y, em termos de α.

REGRA GERAL PARA ACHAR AS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA ENVOLTÓRIA.

PRIMEIRO PASSO. *Ponha a equação da família das curvas sob a forma* $f(x, y, \alpha) = 0$ *e deduza* $f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$.

SEGUNDO PASSO. *Resolva estas duas equações em relação a* x *e* y, *em termos do parâmetro* α.

Obtém-se, assim, as equações paramétricas da envoltória. A equação retangular pode ser obtida das paramétricas (§ 81) ou então eliminando α nas equações (8).

Exemplo ilustrativo 1. Achar a envoltória da família de círculos

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = 0 .$$

Temos $$f_\alpha(x, y, \alpha) = (x - \alpha) = 0 .$$

Eliminando α, vem $y^2 - r^2 = 0$, ou seja, $y = r$, $y = -r$. Estas são as equações das retas AB e CD da figura do começo deste parágrafo e a família de círculos é a família considerada no princípio deste parágrafo.

Exemplo ilustrativo 2. Achar a envoltória da família de retas $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p$, sendo α o parâmetro variável.

SOLUÇÃO. Temos

$$f(x\, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0 . \tag{9}$$

PRIMEIRO PASSO. Derivando em relação a α,

$$f_\alpha(x, y, \alpha) = -y \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 0 . \tag{10}$$

SEGUNDO PASSO. Multiplicando (9) por $\cos \alpha$ e (10) por $\operatorname{sen} \alpha$ e subtraindo, vem

$$x = p \cos \alpha$$

Semelhantemente, eliminando x em (9) e (10),

$$y = p \operatorname{sen} \alpha$$

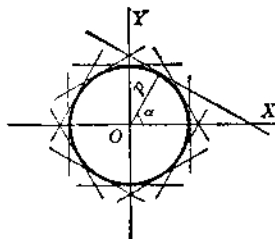
As equações paramétricas da envoltória são, pois,

$$\begin{cases} x = p \cos \alpha, \\ y = p \operatorname{sen} \alpha, \end{cases} \tag{11}$$

sendo α o parâmetro. Quadrando as equações (11) e somando, vem

$$x^2 + y^2 = p^2 ,$$

equação retangular da envoltória, uma circunferência.

Exemplo ilustrativo 3. Achar a envoltória da família de segmentos de reta de comprimento constante a, cujas extremidades estão sobre dois eixos fixos, perpendiculares entre si.

Solução. Seja AB um segmento de comprimento a, pertencente à reta de equação

$$(12) \qquad x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0\,;$$

Quando AB se move, α e p variam. Ora, p pode ser expresso em função de α, pois $AO = AB \cos \alpha = a \cos \alpha$ e $p = AO \operatorname{sen} \alpha$, portanto $p = a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$. Substituindo em (12), obtemos

$$(13) \quad x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - a \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 0\,,$$

onde α é o parâmetro variável. Esta equação esta sob a forma $f(x, y, \alpha) = 0$. Derivando em relação a α, a equação $f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ é

$$(14) \qquad -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + a \operatorname{sen}^2 \alpha - a \cos^2 \alpha = 0\,.$$

Resolvendo (13) e (14) em relação a x e y, em têrmos de α, vem

$$(15) \qquad \begin{cases} x = a \operatorname{sen}^3 \alpha\,, \\ y = a \cos^3 \alpha\,, \end{cases}$$

equações paramétricas da envoltória, uma hipociclóide. A equação retangular desta curva é obtida das equações (15) pela eliminação de α, como segue:

$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^2 \alpha\,,$$
$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 \alpha\,.$$

Somando, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, equação retangular da hipociclóide

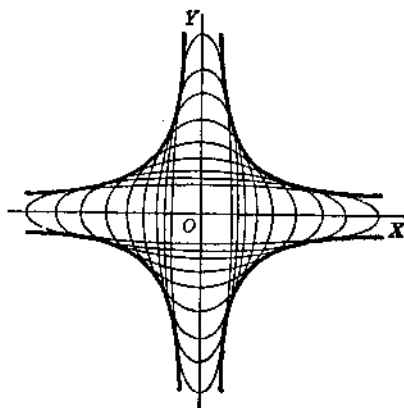
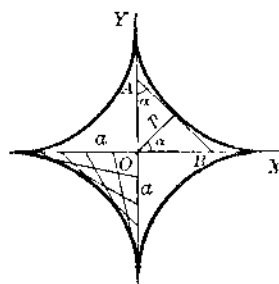
São frequentes os problemas nos quais é conveniente usar dois parâmetros ligados por uma equação de condição. Usando esta última, um parâmetro pode ser eliminado da equação da família de curvas. Contudo, é muitas vezes preferível proceder como no seguinte exemplo.

Exemplo ilustrativo 4. Achar a envoltória da família de elipses cujos eixos coincidem e cuja área é constante

Solução. A equação da elipse é

$$(16) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

onde a e b são os parâmetros variáveis ligados pela equação

$$(17) \qquad \pi ab = k,$$

sendo πab a área de uma elipse de semi-eixos a e b. Considerando a e b como variáveis e x e y como constantes, temos, diferenciando,

$$\frac{x^2da}{a^3} + \frac{y^2db}{b^3} = 0\,, \text{ (de (16))}$$

e

$$b\,da + a\,db = 0\,, \text{ (de (17))}$$

Transpondo um têrmo em cada das equações para o segundo membro e dividindo, vem

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

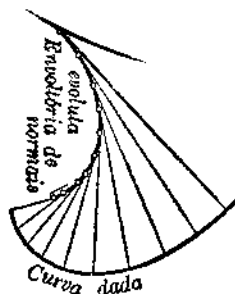
Portanto, usando (16), $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ e $\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$,

ou seja

$$a = \pm x\sqrt{2} \quad \text{e} \quad b = \pm y\sqrt{2}\,.$$

Substituindo estes valores em (17), obtemos a envoltória $xy = \pm \frac{k}{2\pi}$, um par de hipérboles retangulares conjugadas (ver figura).

234. — A evoluta de uma curva, considerada como envoltória da família de normais à curva. Como as normais a uma curva são todas tangentes à evoluta da curva (§ 110), é evidente que a *evoluta de uma curva pode ser definida como a envoltória da família de todas as suas normais.*

É interessante notar que se acharmos as equações paramétricas da envoltória pelo método do parágrafo precedente, obteremos as coordenadas x e y do centro de curvatura; temos aqui, portanto, um *segundo modo de achar as coordenadas do centro de curvatura.* Se eliminarmos o parâmetro variável, obtemos a equação retangular da evoluta.

Exemplo ilustrativo. Achar a evoluta da parábola $y^2 = 4\,px$, considerada envoltória de suas normais.

Solução. A equação da normal num ponto (x_1, y_1) da parábola é

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2\,p}(x - x_1)$$

por (2), § 43. Como estamos considerando as normais ao longo de tôda a curva, x_1 e y_1 são variáveis. Eliminando x_1 mediante $y_1{}^2 = 4\,px_1$, achamos a equação da normal em termos de y_1 apenas

$$(1) \qquad y - y_1 = \frac{y_1{}^3}{8\,p^2} - \frac{xy_1}{2\,p}\,, \quad \text{ou} \quad xy_1 + 2\,py - \frac{y_1{}^3}{4p} = 0\,.$$

Derivando o primeiro membro em relação a y_1 e igualando a zero o resultado, vem, explicitando x,

(2) $$x = \frac{3\,y_1^2 + 8\,p^2}{4\,p}.$$

Substituindo este valor de x em (1) e resolvendo em relação a y,

(3) $$y = -\frac{p_1^3}{4\,p^2}.$$

As equações (2) e (3) fornecem as coordenadas do centro de curvatura da parábola. Tomadas conjuntamente, elas são as equações paramétricas da evoluta em termos do parâmetro y_1. Eliminando y_1, obtemos

$$27\,py^2 = 4\,(x - 2\,p)^3,$$

equação retangular da evoluta da parábola. Êste resultado é o mesmo que obtivemos no Exemplo Ilustrativo 1, § 109, pelo primeiro método.

PROBLEMAS

Achar a envoltória de cada um dos sistemas de retas e desenhar as figuras.

1. $y = mx + m^2$. *Resp.* $x^2 + 4\,y = 0$.

2. $y = \frac{x}{m} + m^2$. $27\,x^2 = 4\,y^3$.

3. $y = m^2x - 2\,m^3$. $27\,y = x^3$.

4. $y = 2\,mx + m^4$. $16\,y^3 + 27\,x^4 = 0$.

5. $y = tx - t^2$. 6. $y = t^2x + t$. 7. $y = mx - 2\,m^2$.

Achar a envoltória de cada um dos sistemas de círculos e desenhar as figuras.

8. $(x - c)^2 + y^2 = 4\,c$. *Resp.* $y^2 = 4\,x + 4$.

9. $x^2 + (y - t)^2 = 2\,t$. 10. $(x - t)^2 + (y + t)^2 = t^2$.

Achar a envoltória de cada um dos sistemas de parábolas.

11. $y^2 = c\,(x - c)$. *Resp.* $2\,y = \pm\,x$.

12. $cy^2 = 1 - c^2x$.

13. Achar a evoluta da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, tomando a equação da normal na forma $by = ax \operatorname{tg}\phi - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}\phi$, sendo parâmetro o ângulo excêntrico ϕ.

Rerp. $x = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\phi,\ y = \frac{b^2 - a^2}{b}\operatorname{sen}^3\phi;$ ou

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

14. Achar a evoluta da hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, cuja normal tem

$$y \cos \tau - x \operatorname{sen} \tau = a \cos 2\tau,$$

por equação, sendo τ o parâmetro. *Resp.* $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2\,a^{\frac{2}{3}}$.

15. Achar a envoltória dos círculos que passam pela origem e tem os centros sobre a hipérbole $x^2 - y^2 = c^2$.

Resp. A lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 4\,c^2\,(x^2 - y^2)$.

16. Achar a envoltória da família de retas que interceptam sôbre os eixos coordenados segmentos de soma constante igual a c.

Resp. A parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

17. Achar a envoltória da família de elipses $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ cujos eixos têm soma constante igual a $2c$.

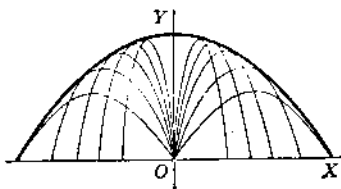
Resp. A hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$.

18. De um mesmo ponto lançam-se projéteis com velocidade inicial v_0. O lançamento se dá num mesmo plano vertical e segundo vários ângulos. Achar a envoltória das trajetórias, sendo despresada a resistência do ar.

Sugestão. A equação de uma trajetória é

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2\,v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

sendo α o parâmetro variável.

Resp. A parábola $y = \dfrac{v_0^2}{2\,g} - \dfrac{gx^2}{2\,v_0^2}$.

19. Se a família

$$t^2 f(x, y) + tg(x, y) + h(x, y) = 0$$

tem uma envoltória, mostre que a equação dela é

$$g^2(x, y) - 4\,f(x, y)\,h(x, y) = 0.$$

235. — Tangente e plano normal a uma curva reversa. O leitor já está familiarizado com as curvas planas (§ 81), dadas por equações paramétricas. Vamos agora estudar as curvas do espaço, dadas também por equações paramétricas.

Sejam as coordenadas de um ponto $P(x, y, z)$ de uma curva reversa dadas como funções de uma quarta variável, que indicaremos por t; então

$$(1) \quad x = \phi(t), \; y = \psi(t), \; z = \chi(t).$$

A eliminação do parâmetro t entre estas equações, tomadas duas a duas, fornece as equações dos cilindros que projetam a curva sôbre os planos coordenados.

Sejam $P(x, y, z)$ o ponto correspondente ao valor t do parâmetro e $P'(x + \Delta x, \; y + \Delta y, \; z + \Delta z)$ o ponto correspondente ao valor $t + \Delta t$, onde Δx, Δy e Δz são os acréscimos de x, y e z, respectivamente, devidos a um acréscimo Δt de t. Da geometria analítica do espaço, sabemos que os cossenos diretores do segmento PP' (diagonal do paralelepípedo, ver figura) são proporcionais a

$$\Delta x, \; \Delta y, \; \Delta z\,;$$

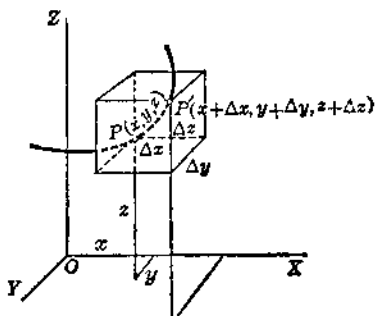
portanto, dividindo os três por Δt, temos, indicando por α', β' e γ' os cossenos diretores,

$$(2) \qquad \frac{\cos \alpha'}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\cos \beta'}{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\cos \gamma'}{\dfrac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Façamos agora P' tender a P, movendo-se sobre a curva. Então Δt e portanto também Δx, Δy e Δz tendem a zero e a secante PP' tende à tangente à curva em P. Ora

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \phi'(t), \text{etc.}$$

Logo, para a tangente tem-se

$$(A) \qquad \frac{\cos \alpha}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\cos \beta}{\dfrac{dy}{dt}} = \frac{\cos \gamma}{\dfrac{dz}{dt}}.$$

Quando o ponto de contato é $P_1(x_1, y_1, z_1)$, usamos a notação

$$(3) \qquad \left|\frac{dx}{dt}\right|_1 = \text{valor de } \frac{dx}{dt} \text{ quando } x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1,$$

e notações análogas para as outras derivadas.

Temos, pois, por (2) e (4), pp. 6 e 7, o seguinte resultado:

As equações da tangente à curva de equações

$$(1) \qquad x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

no ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ são

$$(B) \qquad \frac{x - x_1}{\left|\frac{dx}{dt}\right|_1} = \frac{y - y_1}{\left|\frac{dy}{dt}\right|_1} = \frac{z - z_1}{\left|\frac{dz}{dt}\right|_1}.$$

O *plano normal* a uma curva reversa num ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ é o plano que passa por P_1 e é perpendicular à tangente à curva em P_1. Os denominadores em (B) são os parâmetros diretores da tangente em P_1. Logo temos o seguinte resultado:

A equação do plano normal à curva (1) *no ponto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ é

$$(C) \qquad \left|\frac{dx}{dt}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{dy}{dt}\right|_1 (y - y_1) + \left|\frac{dz}{dt}\right|_1 (z - z_1) = 0.$$

Exemplo ilustrativo. Achar as equações da tangente e a equação do plano normal à hélice circular (sendo θ o parâmetro)

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= a\cos\theta, \\ y &= a\,\text{sen}\,\theta, \\ z &= b\,\theta, \end{aligned}$$

(a) num ponto qualquer (x_1, y_1, z_1); (b) quando $\theta = 2\pi$.

Solução.

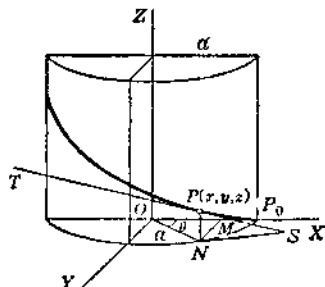
$$\frac{dx}{d\theta} = -a\,\text{sen}\theta = -y, \; \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta = x, \; \frac{dz}{d\theta} = b.$$

Substituindo em (B) e (C), obtemos, em (x_1, y_1, z_1),

$$(5) \qquad \frac{x - x_1}{-y_1} = \frac{y - y_1}{x_1} = \frac{z - z_1}{b},$$

equações da tagente, e

$$-y_1(x - x_1) + x_1(y - y_1) + b(z - z_1) = 0,$$

equação do plano normal.

Quando $\theta = 2\pi$, o ponto sobre a curva é $(a, 0, 2b\pi)$ e portanto

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y-0}{a} = \frac{z-2b\pi}{b}$$

ou seja, $\qquad x = a, \quad by = az - 2ab\pi$

são as equações da tangente e

$$ay + bz - 2b^2\pi = 0$$

é a equação do plano normal.

Observação. Para a tangente (5) temos, por (2) e (4), pp. 6 e 7,

$$\cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{constante},$$

isto é, a hélice corta todos os elementos do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sob o mesmo ângulo.

236. — Comprimento de arco de uma curva reversa. Pela figura do parágrafo precedente temos

$$(1) \qquad \frac{(\text{Corda } PP')^2}{\Delta t^2} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2.$$

Seja arco $PP' = \Delta s$. Procedendo como no § 95, mostramos fàcilmente que

$$(2) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Desta obtemos

$$(D) \qquad s = \int_{t_0}^{t_1} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\quad x = \phi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t)$, como em (1), § 235.

Aos cossenos diretores da tangente podemos agora dar uma forma simples. Realmente, de (A) do precedente parágrafo, e pela equação (2) acima, usando fórmulas de (2), p. 6, temos

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Exemplo ilustrativo. Achar o comprimento de arco da cúbica reversa

$$(4) \qquad x = t\,, \quad y = \frac{1}{2}t^2\,, \quad z = \frac{1}{3}t^3$$

compreendido entre os pontos onde $t = 0$ e $t = 4$.

SOLUÇÃO. Derivando (4), obtemos

$$dx = dt\,, \quad dy = t\,dt\,, \; dz = t^2\,dt\,.$$

substituindo em (D),
$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = 23{,}92,$$

aproximadamente, pela regra de Simpson, tomando $n = 8$.

EXERCÍCIOS

Achar as equações da tangente e a equação do plano normal a cada uma das seguintes curvas reversas, no ponto indicado.

1. $x = at,\ y = bt^2,\ z = ct^3;\ t = 1.$

Resp. $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{y-b}{2\,b} = \dfrac{z-c}{3\,c}$; $ax + 2\,by + 3\,cz = a^2 + 2\,b^2 + 3\,c^2.$

2. $x = 2\,t,\ y = t^2,\ z = 4\,t^4;\ t = 1\,.$

Resp. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{16}$; $x + y + 8\,z = 35\,.$

3. $x = t^2 - 1,\ y = t + 1,\ z = t^3;\ t = 2\,.$

Resp. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-8}{12}$; $4\,x + y + 12\,z = 111.$

4. $x = t^3 - 1,\ y = t^2 + t,\ z = 4\,t^3 - 3\,t + 1;\ t = 1.$

Resp. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{9}$; $x + y + 3\,z = 8\,.$

5. $x = 2\,t - 3,\ y = 5 - t^2,\ z = \dfrac{2}{t}\,;\ t = 2\,.$

6. $x = a\cos t,\ y = b \operatorname{sen} t,\ z = t;\ t = \frac{1}{6}\pi\,.$

7. $x = t,\ y = e^t,\ z = e^{-t}\,;\ t = 0\,.$

8. $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = \operatorname{tg} t;\ t = 0.$

9. Achar o comprimento do arco da hélice circular

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\operatorname{sen}\theta, \quad z = b\theta$$

compreendido entre os pontos onde $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Resp. $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

10. Achar o comprimento do arco da curva

$$x = 3\theta\cos\theta, \quad y = 3\theta\operatorname{sen}\theta, \quad z = 4\theta$$

compreendido entre os pontos onde $\theta = 0$ e $\theta = 4$.

Resp. $26 + \frac{25}{6}\ln 5 = 32{,}7$

11. Achar o comprimento do arco da curva

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 2, \quad z = 1 - t^2$$

compreendido entre os pontos onde $t = 0$ e $t = 2$.

12. Dadas as duas curvas

$$x = t, \quad y = 2t^2, \quad z = -\frac{1}{t}; \tag{5}$$

$$x = 1 - \theta, \quad y = 2\cos\theta, \quad z = \operatorname{sen}\theta - 1, \tag{6}$$

(a) mostrar que elas se cortam no ponto A $(1,\ 2 - 1)$.

(b) achar os cossenos diretores da tangente a (5) em A.

Resp. $\frac{1}{\sqrt{18}},\ \ \frac{4}{\sqrt{18}},\ \ \frac{1}{\sqrt{18}}$.

(c) achar os cossenos diretores da tangente a (6) em A.

(d) achar o ângulo de interseção das curvas em A. *Resp.* 90°.

13. Dadas as duas curvas

$$x = 2 - t, \quad y = t^2 - 4, \quad z = t^3 - 8;$$
$$x = \operatorname{sen}\theta, \quad y = \theta, \quad z = 1 - \cos\theta,$$

(a) mostrar que elas se cortam na origem O.

(b) achar os cossenos diretores da tangente em O a cada uma delas.

(c) achar o ângulo de interseção das curvas em O.

14. (a) Se OF, OE e ON da primeira figura do § 222 são escolhidos como eixosde coordenadas OX, OY e OZ respectivamente, e se $P(x, y, z)$ é um ponto da esfera, provar que $x = a \cos \phi \operatorname{sen} \theta$, $y = a \cos \phi \cos \theta$, $z = a \operatorname{sen} \phi$, se ϕ e θ são, respectivamente, a latitude e longitude de P.

(b) Usando (3), e (3) da página 5, achar o ângulo α em P compreendido entre uma curva da esfera para a qual $\theta = f(\phi)$ e o paralelo por P.

Resp. $\operatorname{tg} \alpha = \sec \phi \dfrac{d\phi}{d\theta}$, como no § 222.

237. — Reta normal e plano tangente a uma superfície. Uma reta diz-se *tangente a uma superfície* num ponto P da superfície quando é tangente em P a alguma curva que passa por P e está sobre a superfície. Tem-se o seguinte teorema de fundamental importância.

TEOREMA. *Todas as tangentes a uma superfície num dado ponto da superfície estão num plano.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

a equação de uma dada superfície e seja $P(x, y, z)$ um ponto dado sobre a superfície.

Se uma curva C de equações

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \tag{2}$$

está sobre a superfície, os valores (2) devem satisfazer a equação (1), qualquer que seja o valor de t. Logo, se $u = F(x, y, z)$, então $u = 0$, $du = 0$, e, por (E), § 229,

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0\,. \tag{3}$$

Esta equação (ver (3), § 4) mostra que a tangente à curva (2), cujos cossenos diretores são proporcionais a

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

é perpendicular à reta cujos cossenos diretores são proporcionais a

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Seja $P_1(x_1, y_1, z_1)$ um ponto da superfície e

$$(5) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1$$

os valores das derivadas parciais (4) quando $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. A reta passando por P_1, cujos parâmetros diretores são dados por (5), diz-se *normal à superfície em* P_1. Temos, pois, o seguinte resultado:

As equações da reta normal à superfície

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

em $P_1(x_1, y_1, z_1)$ são

$$(E) \qquad \frac{x - x_1}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1} = \frac{y - y_1}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1} = \frac{z - z_1}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1}.$$

O argumento precedente mostra que todas as retas tangentes à superfície (1) em P_1 são perpendiculares à reta normal à superfície em P_1 e portanto todas as mencionadas tangentes estão num plano. Isto prova o teorema.

O plano contendo todas as tangentes em P_1 chama-se *plano tangente à superfície em* P_1. Podemos pois enunciar o seguinte resultado.

A equação do plano tangente à superfície (1) *no ponto de contato* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ é

$$(F) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 (z - z_1) = 0.$$

Observação. Se todos os denominadores em (E) são nulos, a reta normal e o plano tangente são indeterminados. Um ponto onde isto se dá chama-se *singular*. Estes pontos não são considerados aqui.

No caso da equação da superfície ser dada sob a forma $z = f(x, y)$, ponhamos

$$(G) \qquad F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 .$$

Então $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial F}{\partial z} = -1.$

Por (E) temos, pois, o seguinte resultado.

As equações da reta normal à superfície $z = f(x, y)$ em (x_1, y_1, z_1) são

$$(G) \qquad \frac{x - x_1}{\left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_1} = \frac{y - y_1}{\left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_1} = \frac{z - z_1}{-1}.$$

De (F) obtemos também

$$(H) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) - (z - z_1) = 0 ,$$

que é, portanto, *a equação do plano tangente em (x_1, y_1, z_1) à superfície cuja equação é $z = f(x, y)$.*

238. — Interpretação geométrica da diferencial total. Podemos agora discutir a fórmula (B), § 227, à luz da geometria, de modo inteiramente análogo ao que fizemos no § 91.

Consideremos a superfície

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

e o ponto (x_1, y_1, z_1) sobre ela. A diferencial total de (1) é, quando

$$x = x_1, \quad y = y_1 ,$$

$$(2) \qquad dz = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 \Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 \Delta y ,$$

usando (B), § 227, e substituindo dx e dy por Δx e Δy respectivamente. Achemos a coordenada z do ponto do plano tangente à superfície em P_1, onde

$$x = x_1 + \Delta x, \quad y = y_1 + \Delta y .$$

Substituindo estes valores em (H) do § 237, vem

$$(3) \qquad z - z_1 = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 \Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 \Delta y .$$

Comparando (2) e (3), obtemos $dz = z - z_1$. Logo o

TEOREMA. *A diferencial total de uma função $f(x, y)$ correspondente aos acréscimos Δx e Δy é igual ao correspondente acréscimo da coordenada z do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$.*

Assim, na figura, PP' é o plano tangente à superfície PQ em $P(x, y, z)$.

Seja $\quad AB = \Delta x$

e $\quad CD = \Delta y$;

então $\quad dz = z - z_1 = DP' - DE = EP'$.

Observe também que $\Delta z = DQ - DE = EQ$.

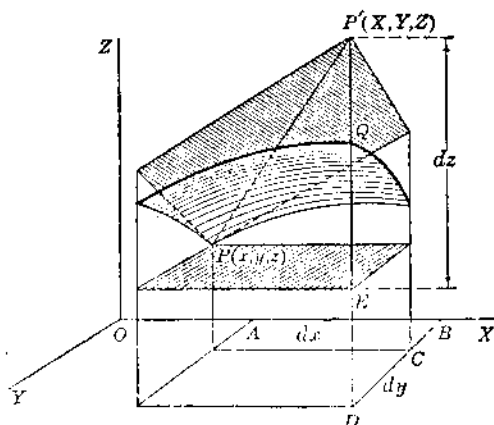
Exemplo ilustrativo. Achar a equação do plano tangente e as equações da reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, no ponto (1, 2, 3).

SOLUÇÃO. Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$;

então $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z; \quad x_1 = 1, \quad y_1 = 2, \quad z_1 = 3 .$

Portanto $\quad \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_1 = 2, \quad \left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_1 = 4, \quad \left|\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_1 = 6.$

Substituindo em (F), $2(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 3) = 0$,

ou $\quad x + 2y + 3z = 14$, equação do plano tangente.

Substituindo em (E), $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{6}$,

o que fornece $z = 3x$ e $2z = 3y$, equações da reta normal. *Resp.*

PROBLEMAS

Achar a equação do plano tangente e as equações da reta normal a cada uma das seguintes superfícies, nos pontos indicados.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $(6, 2, 3)$.

Resp. $6x + 2y + 3z = 49$; $\dfrac{x-6}{6} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.

2. $z = x^2 + y^2 - 1$; $(2, 1, 4)$.

Resp. $4x + 2y - z = 6$; $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

3. $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$; $(2, -3, 4)$.

Resp. $13x + 15y + z + 15 = 0$; $\dfrac{x-2}{13} = \dfrac{y+3}{15} = \dfrac{z-4}{1}$.

4. $x^2 + 2xy + y^2 + z - 7 = 0$; $(1, -2, 6)$.

Resp. $2x + 2y - z + 8 = 0$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$.

5. $x^2y^2 + xz - 2y^3 - 10 = 0$; $(2, 1, 4)$.

Resp. $4x + y + z - 13 = 0$; $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{1}$.

6. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $(3, 2, 2)$.

7. $x^2 + y^2 - z^2 = 25$; $(5, 5, 5)$.

8. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 6$; $(1, 1, \frac{1}{2})$.

9. $x + y - z^2 = 3$; $(3, 4, 2)$.

10. Achar a equação do plano tangente ao hiperbolóide de duas fôlhas $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ em (x_1, y_1, z_1). *Resp.* $\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} - \dfrac{z_1z}{c^2} = 1$.

11. Achar a equação do plano tangente à superfície $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$ no ponto (x_1, y_1, z_1).

Resp. $ax_1x + by_1y + cz_1z + d = 0.$

12. Mostrar que a equação do plano tangente à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,Lx + 2\,My + 2\,Nz + D = 0$$

no ponto (x_1, y_1, z_1) é

$$x_1x + y_1y + z_1z + L\,(x + x_1) + M\,(y + y_1) + N\,(z + z_1) + D = 0.$$

13. Achar a equação do plano tangente num ponto qualquer da superfície

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

e mostrar que a soma dos quadrados dos segmentos interceptados sôbre os eixos pelo plano tangente é constante.

14. Provar que o tetraedro formado pelos planos coordenados e um plano tangente qualquer à superfície $xyz = a^3$ tem volume constante.

15. A curva $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{4}{t}$, $z = \frac{t - 2\,t^2}{2}$ corta a superfície $x^2 - 4\,y^2 - 4\,z = 0$ no ponto $(2, 2, -3)$. Qual o ângulo de interseção?

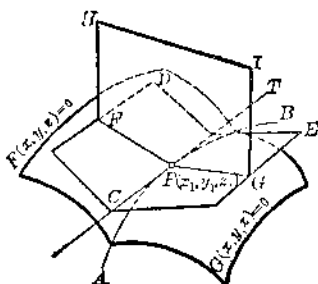
Resp. $90° - \text{arc cos}\,\frac{19}{3\sqrt{138}} = 32°\,37'.$

16. A superfície $x^2 + y^2 + 3\,z^2 = 25$ e a curva $x = 2\,t$, $y = \frac{3}{t}$, $z = -2\,t^2$ cortam-se no ponto da curva dada por $t = 1$. Qual é o ângulo de interseção?

M

Resp. $90° - \text{arc cos}\,\frac{19}{7\sqrt{29}} = 30°\,16'.$

17. O elipsóide $x^2 + 2\,y^2 + 3\,z^2 = 20$ e a curva reversa [illegible] $\frac{\,}{2}$ $(t^{[illegible]} + 1)$, $y = t^4 + 1$, $z = t^3$ encontram-se no ponto $(3, 2, 1)$. ostre que a curva corta a superfície ortogonalmente.

239. — Outra forma das equações da reta tangente e do plano normal a uma curva reversa. Se a curva em questão é a interseção AB de duas superfícies $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$, a reta tangente PT em $P(x_1, y_1, z_1)$ é a interseção dos planos tangentes CD e CE nesse ponto, pois PT é também tangente a ambas as superfícies e, portanto, deve estar em ambos os planos tangentes.

As equações dos dois planos tangentes em P são, por (F),

$$\text{(1)}\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) + \left|\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_1 (z - z_1) = 0\,, \\[2ex] \left|\dfrac{\partial G}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\dfrac{\partial G}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) + \left|\dfrac{\partial G}{\partial z}\right|_1 (z - z_1) = 0\,. \end{cases}$$

Tomadas simultâneamente, estas são as equações da reta tangente PT à curva reversa AB.

Se A, B e C são parâmetros diretores da reta interseção dos planos (1), então, por (6), § 4.

$$A = \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1 - \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1, \quad B = \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1 - \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1,$$

$$\text{(2)}\qquad C = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1 - \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1.$$

As equações da tangente CPT são, pois,

$$\text{(3)}\qquad \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}\,.$$

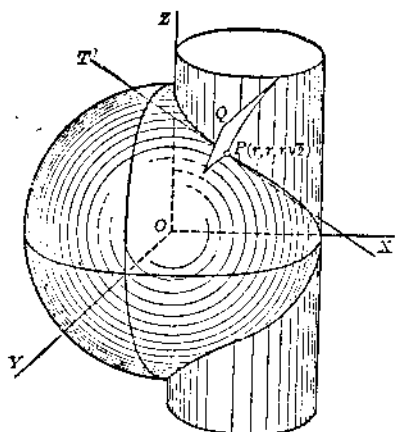
A equação do plano normal PHI é

$$\text{(4)}\qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\,.$$

Exemplo ilustrativo 1. Achar as equações da tangente e a equação do plano normal em $(r, r, r\sqrt{2})$ à curva interseção da esfera e cilindro cujas equações são, respectivamente, $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$, $x^2 + y^2 = 2rx$.

SOLUÇÃO. Seja $F = x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2$ e $G = x^2 + y^2 - 2rx$.

$$\text{Temos}\quad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 = 2r, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 = 2r, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 = 2r\sqrt{2};$$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1 = 0, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1 = 2r, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1 = 0.$$

Substituindo em (2), achamos

$$A = -4r^2\sqrt{2}, \quad B = 0, \quad C = 4r^2.$$

Logo, por (3), temos

$$\frac{x-r}{-\sqrt{2}} = \frac{y-r}{0} = \frac{z-r\sqrt{2}}{1};$$

ou $\quad y = r, \quad x + \sqrt{2}\,z = 3r,$

equações da tangente PT em P à curva interseção.

Substituindo em (4), obtemos a equação do plano normal

$$-\sqrt{2}\,(x-r) + 0\,(y-r) + (z - r\sqrt{2}) = 0,$$

ou

$$\sqrt{2}\,x - z = 0.$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar o ângulo de interseção das superfícies do exemplo precedente, no ponto dado.

SOLUÇÃO. O ângulo de interseção é igual ao ângulo compreendido entre os planos tangentes ou as retas normais. Achamos parâmetros diretores para estas linhas acima no Exemplo Ilustrativo 1 (ver (*E*), § 237). Êles são

$$a = 2r, \; b = 2r, \quad c = 2r\sqrt{2}.$$
$$a' = 0, \quad b' = 2r, \quad c' = 0.$$

Logo, por (6), § 4, $\cos\theta = \frac{4r^2}{8r^2} = \frac{1}{2}$. $\theta = 60°$ *Resp.*

EXERCÍCIOS

Achar as equações da reta tangente e a equação do plano normal a cada uma das seguintes curvas, no ponto indicado.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 49, \; x^2 + y^2 = 13$; $(3, 2, -6)$.

Resp. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-3}, \; z + 6 = 0$; $2x - 3y = 0$.

2. $z = x^2 + y^2 - 1,\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 = 30$; $(2, 1, 4)$.

Resp. $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{-11} = \dfrac{z-4}{-2}$; $5x - 11y - 2z + 9 = 0$.

3. $x^2 + y^2 - z^2 = 16,\ x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 84$; $(2, 4, 2)$.

Resp. $\dfrac{x-2}{16} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z-2}{6}$; $16x - 5y + 6z = 24$.

4. $x^2 + y^2 + 3z^2 = 32,\ 2x^2 + y^2 - z^2 = 0$; $(2, 1, 3)$.

Resp. $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y-1}{-21} = \dfrac{z-3}{1}$; $6x - 21y + z + 6 = 0$.

5. $x^2 - y^2 - z^2 = 1,\ x^2 - y^2 + z^2 = 9$; $(3, 2, 2)$.

6. $x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0,\ 2x + y + z - 24 = 0$; $(8, 3, 5)$.

7. As equações de uma hélice (espiral) são

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{c}.$$

Mostre que as equações da tangente no ponto (x_1, y_1, z_1) são

$$c(x - x_1) + y_1(z - z_1) = 0,$$
$$c(y - y_1) - x_1(z - z_1) = 0;$$

e a equação do plano normal é

$$y_1x - x_1y - c(z - z_1) = 0.$$

8. As superfícies $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ e $3x^2 + y^2 - 2z = 9$ cortam-se numa curva que passa pelo ponto $(2, 1, 2)$. Qual é a equação do plano tangente nesse ponto a cada uma das superfícies?

Resp. $3x + 4y + 6z = 22$; $6x + y - z = 11$.

9. Mostre que o elipsóide $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ são tangentes entre si no ponto $(2, 1, 1)$.

10. Mostre que o parabolóide $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ cortam-se ortogonalmente no ponto $(1, 1, 2)$.

240. — Lei da Média. Nas aplicações que faremos a seguir intervém a *Lei da Média* para funções de várias variáveis. O resultado que vamos deduzir está baseado no estudo feito no § 116. Primeiramente, vamos estabelecer a fórmula

$$(1)\quad f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k),\ (0<\theta<1)$$

Para êste fim, seja

$$(2)\qquad F(t) = f(x_0+ht, y_0+kt).$$

Apliquemos (D), § 116, a $F(t)$ com $a=0$, $\Delta a = 1$; temos

$$(3)\qquad F(1) = F(0) + F'(\theta). \qquad (0<\theta<1)$$

Mas de (2), por (D), § 229, posto que $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$,

$$(4)\qquad F'(t) = hf_x(x_0+ht, y_0+kt) + kf_y(x_0+ht, y_0+kt).$$

Logo, de (2), vem

$$(5)\qquad F(1) = f(x_0+h, y_0+k),\quad F(0) = f(x_0, y_0),$$

e de (4)

$$(6)\quad F'(\theta) = hf_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + kf_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k).$$

Substituídos êstes resultados em (3), obtemos (1).

Se desejamos uma fórmula análoga a (F), § 124, devemos considerar $F''(t)$. Aplicando (D) de novo, § 229, obtemos

$$\frac{d}{dt} f_x(x_0+ht, y_0+kt) = hf_{xx}(x_0+ht, y_0+kt) + kf_{yx}(x_0+ht, y_0+kt);$$

$$\frac{d}{dt} f_y(x_0+ht, y_0+kt) = hf_{xy}(x_0+ht, y_0+kt) + kf_{yy}(x_0+ht, y_0+kt).$$

De (4) temos, pois, derivando em relação a t,

$$(7)\quad F''(t) = h^2 f_{xx}(x_0+ht, y_0+kt) + 2\,hkf_{xy}(x_0+ht, y_0+kt) + k^2 f_{yy}(x_0+ht, y_0+kt).$$

De (F), § 124, obtemos, fazendo $b = 1$, $a = 0$, $x_1 = \theta$,

$$(8) \qquad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{\underline{|2}} F''(\theta).$$

Podemos agora demonstrar fàcilmente a Lei da Média ampliada para uma função de duas variáveis, substituindo em (8) os resultados (5), (4) e (7). Obtemos assim

$$(9) \quad f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0)$$
$$+ \frac{1}{\underline{|2}} h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hk f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$
$$+ k^2 f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k). \qquad (0 < \theta < 1).$$

Não há dificuldade em extender as fórmulas correspondentes para funções de mais de duas variáveis nem em extender as leis de modo análogo ao que foi feito no final do § 124.

241. — Máximos e mínimos para funções de várias variáveis. No § 46 e de novo no § 125 deduzimos condições necessárias e suficientes para um máximo e um mínimo valores de uma função de uma variável. Vamos agora considerar o problema para funções de mais de uma variável independente.

A função $f(x, y)$ diz-se *máxima* em $x = a$, $y = b$ se existe uma vizinhança de $x = a$, $y = b$ tal que para os valores de x e y desta vizinhança se tem que $f(a, b)$ é maior que $f(x, y)$. Anàlogamente, $f(x, y)$ diz-se *mínima* para $x = a$, $y = b$, se $f(a, b)$ é menor que $f(x, y)$ quando o ponto (x, y) esta em alguma vizinhança do ponto (a, b). Outro modo de formular estas definições é o seguinte:

Se para todos os valores de h e k, menores, em valor absoluto, que algum número positivo,

$$(1) \qquad f(a + h, b + k) - f(a, b) = \text{número negativo},$$

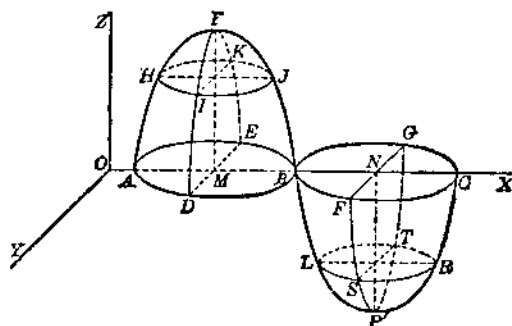
então $f(a, b)$ é um máximo de $f(x, y)$. Se

$$(2) \qquad f(a + h, b + k) - f(a, b) = \text{número positivo},$$

então $f(a, b)$ é um mínimo de $f(x, y)$.

Estas definições podem ser interpretadas geomètricamente como segue. Um ponto P da superfície

$$z = f(x, y)$$

é um ponto máximo quando ele é "mais alto" que todos os outros pontos da superfície que estão numa sua vizinhança, tendo-se admitido que o plano XOY é horizontal. Semelhantemente, P' é um ponto mínimo sobre a superfície quando ele é "mais baixo" que todos os outros pontos da superfície que estão numa sua vizinhança.

Portanto, se

$$z_1 = f(a, b)$$

é um máximo ou mínimo, o plano tangente em (a, b, z_1) deve ser horizontal, isto é, paralelo a XOY. Mas o plano tangente (H), § 237, é paralelo a XOY quando os coeficientes de x e y são nulos. Temos, pois, o seguinte resultado.

Uma condição necessária para que $f(a, b)$ seja máximo ou mínimo de $f(x, y)$ é que as equações

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sejam satisfeitas para $x = a$, $y = b$.

As condições (3) podem ser obtidas sem o uso do plano tangente. Realmente, quando $y = b$, a função $f(x, b)$ não pode crescer nem decrescer quando x atravessa a (ver § 45); logo, a primeira das equações (3) deve ser verificada O mesmo pode-se dizer para a função $f(a, y)$ e obtém-se assim a segunda das equações (3).

O método ora exposto aplica-se também a uma função de três variáveis. Temos pois: uma condição *necessária* para que $f(a, b, c)$ seja máximo ou mínimo para $f(x, y, z)$ é que as equações

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

sejam satisfeitas para $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Para estabelecer condições necessárias e suficientes, o problema é muito mais difícil (ver abaixo), mas em muitos problemas de

aplicação a existência de um máximo ou mínimo é conhecida a priori e portanto não se necessita de uma tal condição.

Exemplo ilustrativo 1. Faz-se uma caixa dobrando-se as extremidades de um pedaço de lata de 24 polegadas de comprimento. Achar o comprimento e a inclinação de cada lado para que a capacidade da caixa seja máxima.

SOLUÇÃO. A área da seção transversal mostrada na figura deve ser máxima. A mencionada seção é um trapézio cuja base superior mede $24 - 2x + 2x\cos\alpha$. A base inferior vale $24 - 2x$ e a altura é $x \operatorname{sen} \alpha$. A área é portanto

(5) $$A = 24x \operatorname{sen}\alpha - 2x^2 \operatorname{sen}\alpha + x^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

Derivando, temos

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 24 \operatorname{sen}\alpha - 4x \operatorname{sen}\alpha + 2x \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha).$$

Igualando as derivadas parciais a zero temos as duas equações

$$2\operatorname{sen}\alpha\,(12 - 2x + x\cos\alpha) = 0.$$
$$x\,[24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)] = 0.$$

Uma solução deste sistema é $\alpha = 0$, $x = 0$ que não tem sentido pela própria natureza do problema. Admitindo, pois, que sejam $\alpha \neq 0$, $x \neq 0$ e resolvendo as equações, obtemos $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $x = 8$.

Um exame da natureza física do problema mostra que deve existir um valor máximo da área. Êste máximo ocorre, pois, quando $\alpha = 60°$ e $x = 8$ polegadas.

Vamos agora estabelecer uma condição suficiente. Admitindo que as equações (3) sejam verificadas, obtemos de (9), § 240, substituindo x_0 por a, y_0 por b e transpondo,

(6) $$f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{\underline{|2}}[h^2 f_{xx}(x,y) + 2hkf_{xy}(x,y) + k^2 f_{yy}(x,y)],$$

onde puzemos $x = a + \theta h$, $y = b + \theta k$. Por (1) e (2), $f(a,b)$ será um máximo (ou um mínimo) se o segundo membro é negativo (ou positivo) para todos os valores de h e k suficientemente pequenos em valor absoluto, excluído o zero. Ponhamos

(7) $$A = f_{xx}(x,y), \quad B = f_{xy}(x,y), \quad C = f_{yy}(x,y)$$

e consideremos a identidade

(8) $$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A}[(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2].$$

A expressão entre colchetes é sempre positiva se

$$AC - B^2 > 0\,, \tag{9}$$

e o primeiro membro tem portanto o mesmo sinal que A (ou C, pois, por (9), A e C devem ter o mesmo sinal). Tudo está agora em saber interpetar o critério (9) para o segundo membro de (6).

Admitamos que (9) valha quando $x = a$, $y = b$. Então, sendo contínuas as derivadas (7), (9) vale também para valores de x e y próximos de a e b, respectivamente. O sinal de A (ou C) será também o mesmo que o sinal de $f_{xx}(a, b)$ (ou $f_{yy}(a, b)$). Assim, estabelecemos a seguinte *regra para achar máximo e mínimo de uma função* $f(x, y)$.

Primeiro Passo. *Resolva o sistema de equações*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Segundo Passo. *Calcule para os valores de x e y, fornecidos pelo sistema acima, a expressão*

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2.$$

Terceiro Passo. *A função será*

$$\textit{máxima} \text{ se } \Delta > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0\,;$$

$$\textit{mínima} \text{ se } \Delta > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0\,.$$

Se Δ é negativo, $f(x, y)$ não tem máximo nem mínimo, como se pode ver fàcilmente.

O leitor deve observar que esta regra não dá necessàriamente todos os valores máximos e mínimos, pois um par de valores x e y determinado no Primeiro Passo pode anular Δ e conduzir a um máximo ou mínimo. Para tais valores é pois necessária uma investigação ulterior. Não obstante, a regra dada permite resolver muitos problemas importantes.

O problema de máximos e mínimos para funções de três ou mais variáveis é feito com todos os detalhes nos tratados mais avançados.

Exemplo ilustrativo 2. Examinar a função $3axy - x^3 - y^3$ no que concerne a máximos e mínimos.

Solução. $f(x, y) = 3axy - x^3 - y^3.$

Primeiro Passo. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3ay - 3x^2 = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3ax - 3y^2 = 0.$

Resolvendo êste sistema de equações, obtemos

$$x = 0, \quad x = a,$$
$$y = 0, \quad y = a.$$

Segundo Passo. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3a, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y;$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 36xy - 9a^2.$$

Terceiro Passo. Quando $x = 0$ e $y = 0$, $\Delta = -9a^2$ e não pode haver nem máximo nem mínimo em (0, 0).

Quando $x = a$ e $y = a$, $\Delta = 27a^2$; como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6a$, temos as condições para um máximo em (a, a). Substituindo $x = a$, $y = a$ na dada função, obtemos o máximo a^3.

Exemplo ilustrativo 3. Dividir a em três partes tais que o produto delas seja máximo.

Solução. Seja x a primeira parte e y a segunda; então $a - (x + y) = a - x - y$ é a terceira parte. A função a ser examinada é, pois,

$$f(x, y) = xy(a - x - y),$$

Primeiro Passo. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = ay - 2xy - y^2 = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = ax - 2xy - x^2 = 0.$

Resolvendo êste sistema, um par de soluções é $x = \dfrac{a}{3}, \ y = \dfrac{a}{3}$.

Segundo Passo. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a - 2x - 2y, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x;$

$$\Delta = 4xy - (a - 2x - 2y)^2.$$

Terceiro Passo. Quando $x = \frac{a}{3}$ e $y = \frac{a}{3}$, $\Delta = \frac{a^2}{3}$; como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2a}{3}$, vê-se que nosso produto é máximo quando $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$. Portanto, a terceira parte é também $\frac{a}{3}$ e o máximo valor do produto é $\frac{a^3}{27}$.

EXERCICIOS

Examine cada uma das seguintes funções no que concerne a máximos e mínimos.

1. $x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$. *Resp.* $x = 4, y = -2$ dá mín.

2. $4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. $x = \frac{10}{3}, y = \frac{8}{3}$ dá máx.

3. $2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y$. $x = -1, y = \frac{1}{2}$ dá mín.

4. $x^3 - 3axy + y^3$. $x = y = a$ dá mín.

5. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$ $x = y = \frac{\pi}{3}$ dá máx.

   $x = y = \frac{5\pi}{3}$ dá mín.

6. $x^2 - xy + y^2 + ax + by + c$.

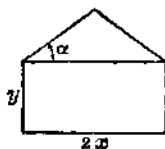
7. $xy + \frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y}$.

8. Mostre que o máximo de $\frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$ é $a^2 + b^2 + c^2$.

9. Ache o paralelepípedo retângulo de máximo volume que tem três faces nos três planos de coordenadas e um vértice no plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

   Resp. Volume $= \frac{abc}{27}$

10. Ache o volume do máximo paralelepípedo inscritível no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. *Resp.* $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

11. Um pentágono é formado por um retângulo e um triângulo isósceles como mostra a figura ao lado. O perímetro do pentágono tem o valor P. Achar as dimensões para que a área seja máxima.

Resp. $\alpha = 30°,\ 2x = \dfrac{P}{2 + 2\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha},$

$$y = \frac{P}{2} - x(1 + \sec\alpha).$$

12. Achar a menor distância entre as retas $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ e $x = y - 3 = z$.

13. Um fabricante produz dois tipos de açúcar. Um custa, em média, 50 centavos a libra e o outro 60. Se o preço teto do primeiro tipo é x centavos por libra e o do segundo y centavos por libra, o número de libras de açúcar que pode ser vendido em cada semana é dado pelas fórmulas
$N_1 = 250(y - x)$ (1.° tipo), $N_2 = 32.000 + 250(x - 2y)$ (2.° tipo).

Mostre que o lucro obtido é máximo quando os preços teto são fixados em 89 centavos e 94 centavos por libra, respectivamente

14. Um fabricante produz aparelhos de barbear e lâminas. Um aparelho custa, em média, 40 cruzeiros e uma dúzia de lâminas custa, em média, 20 cruzeiros. Se os aparelhos são vendidos a x cruzeiros e a dúzia de lâminas a y cruzeiros, a procura no mercado é, cada semana, de $\dfrac{4.000.000}{xy}$ aparelhos e $\dfrac{8.000.000}{xy}$ dúzias de lâminas. Achar os preços teto para que o lucro do fabricante seja máximo.

242. — Teorema de Taylor para funções de duas ou mais variáveis. A fórmula de Taylor para $f(x, y)$ é obtida com o uso dos métodos e resultados dos §§ 194 e 240.

Consideremos

$$F(t) = f(x + ht, y + kt), \tag{1}$$

e desenvolvamos $F(t)$ como em (5), § 194. Obtemos

$$F(t) = F(0) + F'(0)\frac{t}{\underline{|1}} + F''(0)\frac{t^2}{\underline{|2}} + \cdots + F^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R.$$

Obtemos os valores de $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, fazendo $t = 0$ em (2), (4), (7), § 240. Derivando (7) e pondo depois $t = 0$, virão os valores de $F'''(0)$ etc. Isto será omitido aqui. Note, contudo, que $F'''(0)$ é homogênea e do terceiro grau em h e k. Uma propriedade análoga vale para as derivadas de ordem mais alta. Substituídos êstes valores em (2) e posto $t = 1$, vem

$$(3)\quad f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \frac{1}{\underline{|2}}[h^2 f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)] + \cdots + R.$$

A expressão de R é complicada e será omitida daqui por diante.

Ponhamos, em (3), $x = a$, $y = b$ e substituamos h por $x - a$ e k por $y - b$. O resultado que se obtém é o *teorema de Taylor para funções de duas variáveis.*

$$(I)\quad f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{\underline{|2}}[f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2] + \cdots$$

Finalmente, pondo-se $a = b = 0$, obtemos a fórmula de Maclaurin (confronte (A), § 194).

$$(J)\quad f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{\underline{|2}}[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] + \cdots.$$

O segundo membro de (J) pode ser posto sob a forma

$$(4)\qquad u_0 + \frac{u_1}{\underline{|1}} + \frac{u_2}{\underline{|2}} + \cdots,$$

onde
$$u_0 = f(0,0),$$
$$u_1 = f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y,$$
$$u_2 = f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2\,f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2,$$
etc.

Os têrmos de (4) são polinômios homogêneos em (x, y). O grau de cada um é igual ao índice. Logo, em (J) a função está desenvolvida numa soma de polinômios homogêneos em (x, y) e de graus dispostos em ordem crescente. Semelhantemente, em (I) os têrmos são polinômios homogêneos em $(x - a,\ y - b)$.

A fórmula (I) diz-se *desenvolvimento de* $f(x, y)$ *no ponto* (a, b).

Em tratados mais avançados faz-se o estudo do desenvolvimento em série das funções de duas ou mais variáveis. Aí estuda-se então os valores de (x, y) para os quais os desenvolvimentos em série convergem para os valores da função.

Considerando-se apenas a soma de um número finito de termos de uma tal série, tem-se um valor aproximado para a função $f(x, y)$ para valores próximos de (a, b) ou $(0, 0)$ (confronte o § 200).

Exemplo ilustrativo. Desenvolva

$$xy^2 + \operatorname{sen} xy$$

no ponto $(1, \frac{1}{2}\pi)$ até os termos do terceiro grau.

SOLUÇÃO. Aqui
$$a = 1,\ b = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$f(x,y) = xy^2 + \operatorname{sen} xy,$$
$$f_x(x,y) = y^2 + y\cos xy,$$
$$f_y(x,y) = 2\,xy + x\cos xy,$$
$$f_{xx}(x,y) = -\,y^2 \operatorname{sen} xy,$$
$$f_{xy}(x,y) = 2\,y + \cos xy - xy \operatorname{sen} xy,$$
$$f_{yy}(x,y) = 2\,x - x^2 \operatorname{sen} xy.$$

Pondo $x = 1,\ y = \frac{1}{2}\pi$, os resultados são:

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi^2 + 1,$$
$$f_x(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi^2,$$
$$f_y(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \pi,$$
$$f_{xx}(1, \tfrac{1}{2}\pi) = -\tfrac{1}{4}\pi^2,$$
$$f_{xy}(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$f_{yy}(1, \tfrac{1}{2}\pi) = 1.$$

Substituindo em (I), obtemos

$$xy^2 + \operatorname{sen} xy = 1 + \tfrac{1}{4}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi^2(x-1) + \pi(y - \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$+ \frac{1}{\lfloor 2}\left[-\frac{1}{4}\pi^2(x-1)^2 + \pi(x-1)\left(y - \frac{1}{2}\pi\right) + \left(y - \frac{1}{2}\pi\right)^2\right] + \ldots \quad \textit{Resp.}$$

As fórmulas para o desenvolvimento de uma função de três variáveis $f(x,y,z)$ são deduzidas fàcilmente. Fica a dedução delas como problema.

EXERCÍCIOS

1. De (1) acima mostre que

$$F'''(0) = h^3 \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_0 + 3\,h^2k \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right|_0 + 3\,hk^2 \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right|_0 + k^3 \left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_0.$$

2. Verifique o seguinte desenvolvimento

$$\cos x \cos y = 1 - \frac{x^2 + y^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4 + 6\,x^2y^2 + y^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6 + 15\,x^4y^2 + 15\,x^2y^4 + y^6}{\underline{|6}} + \cdots.$$

3. Desenvolva $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ em potências de x e y.

4. Verifique o seguinte desenvolvimento

$$a^x \log(1+y) = y + \tfrac{1}{2}(2\,xy \log a - y^2 + x^2 y \log^2 a - xy^2 \log a) + \tfrac{1}{3}\,y^3 + \cdots$$

5. Desenvolva $x^3 + xy^2$ no ponto (1,2).

6. Verifique o seguinte desenvolvimento

$$\operatorname{sen}(x+y) = x + y - \frac{x^3 + 3\,x^2y + 3\,xy^2 + y^3}{\underline{|3}} + \cdots.$$

Verifique as seguintes fórmulas aproximadas para pequenos valores de x e y.

7. $e^x \operatorname{sen} y = y + xy.$

8. $e^x \ln(1+y) = y + xy.$

9. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y}} = 1 + \tfrac{1}{2}(x - y).$

CAPITULO XXV

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

243. — Integração parcial e sucessiva. Correspondente à *derivação parcial* no cálculo diferencial, temos, no cálculo integral, o processo inverso de *integração parcial.* Como se pode inferir da inter-relação, integração parcial de uma dada expressão diferencial envolvendo duas ou mais variáveis independentes, é a operação que consiste em integrar a expressão primeiro em relação a uma só das variáveis, considerando as demais como constantes e a seguir, se for o caso, integrar o resultado em relação a uma só das variáveis, considerando as demais como constantes e assim sucessivamente. Uma tal integração diz-se dupla ou tripla, etc., segundo o número de variáveis.

O que apresenta de novo neste problema é que a constante de integração é de novo tipo. Vamos ilustrar isto com exemplos.

Dada a expressão

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3 .$$

achar a função $u(x, y)$.

Integrando em relação a x, considerando y como constante, temos

$$u = x^2 + xy + 3x + \phi,$$

onde ϕ indica a constante de integração. Ora, podemos supor que ϕ seja uma função de y, pois que também neste caso a derivada parcial de u em relação a x é a expressão dada; logo, a forma mais geral de $u\ (x, y)$ é

$$u = x^2 + xy + 3x + \phi(y) ,$$

sendo $\phi(y)$ uma função arbitrária de y.

Como outro exemplo, seja calcular

$$u = \iint (x^2 + y^2)\, dy\, dx\,.$$

Isto significa que queremos achar uma função $u(x, y)$, sendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2.$$

Integrando primeiro em relação a y, considerando x como constante, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \psi(x)\,,$$

onde $\psi(x)$ é uma função arbitrária de x.

Integrando agora o resultado em relação a x, considerando y como constante, vem

$$u = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x y^3}{3} + \Psi(x) + \Phi(y)\,,$$

onde $\phi(y)$ é uma função arbitrária de y e

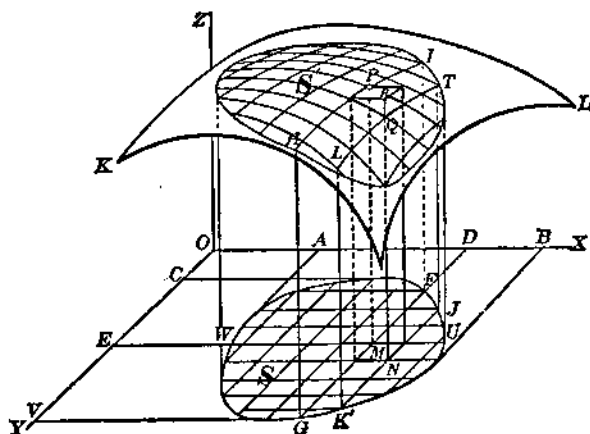
$$\Psi(x) = \int \psi(x)\, d\, x.$$

244. — Integral dupla definida. Interpretação geométrica. Seja $f(x, y)$ uma função contínua de x e y. Geomètricamente,

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

é a equação de uma superfície, digamos KL (figura, p. 625). Seja S uma parte da projeção de KL sobre o plano XOY e construamos sobre S como base um cilindro reto de geratrizes paralelas ao eixo OZ. Seja S' a parte da superfície KL contida no cilindro. Vamos procurar o volume do sólido limitado pelas superfícies S, S' e a superfície lateral do cilindro. Procedemos como segue.

Dividimos a projeção de S sobre OX em intervalos de comprimentos iguais a Δx e pelos pontos de divisão traçamos paralelas a OY. Dividimos a projeção de S sobre OY em intervalos de comprimentos iguais a Δy e pelos pontos de divisão tiramos paralelas a OX. Estes dois sistemas de retas determinam retângulos internos a S, como mostra a figura. Com base em cada um destes re-

tângulos construímos colunas como $MNPQ$, cuja base superior é uma parte de S'. A soma dos volumes destas colunas é um valor

aproximado do volume que procuramos. Não temos meios de achar diretamente o volume de uma coluna; vamos, pois, substituir cada uma delas por um conveniente paralelepípedo. Assim, a coluna $MNPQ$ será substituída pelo paralelepípedo de base MN e cuja altura é o valor da função $f(x, y)$ no extremo inferior esquerdo do retângulo MN, precisamente, o paralelepípedo $MNPR$ da figura.

Se as coordenadas de P são (x, y, z), então $MP = z = f(x, y)$ e portanto

$$(2) \qquad \text{Volume de } MNPR = f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y\,.$$

Calculando o volume de cada um dos outros paralelepípedos formados do mesmo modo e somando os resultados temos um volume V' aproximadamente igual ao volume V que estamos procurando.

O volume V' pode ser indicado por

$$(3) \qquad V' = \sum\sum f(x, y)\,\Delta y\,\Delta x\,,$$

onde o duplo somatório $\Sigma\Sigma$ indica que são duas as variáveis a se considerar.

Façamos crescer indefinidamente o número de intervalos em que foi dividida a projeção de S sobre OX, de modo que Δx tenda a zero e procedamos de modo análogo com a projeção de S sobre

OY. Então, a soma V' tende a um limite e este limite é o volume V que procuramos. Temos, pois,

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\, \Delta y\, \Delta x\,. \tag{4}$$

Vamos mostrar agora que este limite pode ser obtido por integração sucessiva.

O volume V pode ser achado como segue: consideremos uma qualquer das faixas em que é dividido o sólido por dois planos sucessivos paralelos a YOZ, por exemplo, consideremos a faixa cujas faces são $FIHG$ e $JTL'K'$, ver figura. A espessura desta faixa é Δx. Os valores de z ao longo da curva HI são obtidos pondo-se $x = OD$ na equação $z = f(x, y)$, isto é, ao longo de HI,

$$z = f(OD, y)\,.$$

Logo $$\text{Área } FIHG = \int_{DF}^{DG} f(OD, y)\, dy\,.$$

O volume da faixa em exame é aproximadamente igual ao de um paralelepípedo cuja base é $FIHG$ e cuja altura é Δx, isto é, igual a

$$\Delta x \cdot \text{área } FIHG = \Delta x \int_{DF}^{DG} f(OD, y)\, dy\,.$$

O volume do sólido é, evidentemente. o limite da soma dos volumes de todos os paralelepípedos construídos deste modo, quando o número de intervalos em que foi dividida a projeção de S sobre OX cresce indefinidamente de modo a que Δx tenda a zero, isto é,

$$V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y)\, dy\,. \tag{5}$$

Semelhantemente, pode-se mostrar que

$$V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y)\, dx\,. \tag{6}$$

As integrais (5) e (6) costumam ser postas, respectivamente, sob as formas

$$\int_{OA}^{OB}\int_{DF}^{DG} f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{e} \quad \int_{OC}^{OV}\int_{EW}^{EU} f(x, y)\, dx\, dy\,.$$

Em (5) os limites DF e DG são funções de x, pois eles são obtidos pela resolução, em relação a y, da equação da curva fronteira da base do sólido. Semelhantemente, em (6) os limites EW e EU são funções de y.

O confronto de (4), (5) e (6) dá o resultado

$$(A) \qquad V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\,\Delta y \cdot \Delta x = \int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y)\,dy\,dx$$

$$= \int_{b_2}^{b_1} \int_{v_2}^{v_1} f(x, y)\,dx\,dy,$$

onde v_1 e v_2 são, em geral, funções de y, u_1 e u_2 funções de x. O segundo sinal de integração aplica-se, em cada caso, à primeira diferencial.

A equação (A) é uma extensão do Teorema Fundamental do § 156 às somas duplas.

Nosso resultado pode ser formulado do seguinte modo.

A integral dupla definida

$$\int_{a_2}^{a_1} \int_{u_2}^{u_1} f(x, y)\,dy\,dx$$

pode ser interpretada como o volume de uma porção do cilindro reto de geratriz paralela a OZ e diretriz dada pelas curvas

$$y = u_1, \quad y = u_2, \quad x = a_1, \quad x = a_2.$$

A mencionada porção é a que esta compreendida entre o plano XOY e a superfície de equação $z = f(x, y)$.

Um resultado análogo vale para a outra integral dupla definida.

É instrutivo considerar o processo acima de achar o volume do sólido como segue.

Consideremos uma coluna com base retangular $dx\,dy$ e com altura z como elemento de volume. Somando todos os elementos que assim se obtém de $y = DF$ a $y = DG$, sendo momentâneamente x constante (digamos, $= OD$), obtemos o volume de uma faixa delgada tendo $FGHI$ como uma das faces. O volume de todo o sólido é então obtido com a soma de todas as faixas que como a anterior podem ser construídas desde $x = OA$ até $x = OB$.

Na integração sucessiva envolvendo duas variáveis, os limites que figuram no segundo sinal de integração referem-se à variável cuja diferencial esta escrita em primeiro lugar.

Antes de aplicar a integração sucessiva à resolução de problemas, é aconselhável que o leitor adquira prática no cálculo das integrais múltiplas definidas.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o valor da integral dupla definida

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dy\,dx.$$

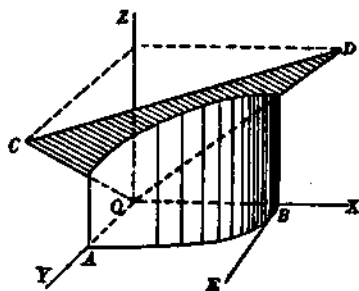
Solução.

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dy\,dx$$

$$= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)dy\right] dx$$

$$= \int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{2a^3}{3} \quad \textit{Resp.}$$

Interpretando geomètricamente, o resultado achado representa o volume do sólido de forma cilíndrica com base em OAB, limitado na parte superior pela superfície (plana) $z = x + y$.

A base OAB é limitada por:

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \text{ (reta } OB) \\ y = \sqrt{a^2-x^2} \text{ (quarto de círculo } AB) \end{array}\right\} \text{limites de } y.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ (reta } OA) \\ x = a \text{ (reta } BE) \end{array}\right\} \text{limites de } x.$$

Exemplo ilustrativo 2. Verificar que $\displaystyle\int_b^{2b} \int_0^a (a-y)x^2 dy\,dx = \frac{7a^2b^3}{6}$.

Solução. $$\int_b^{2b} \int_0^a (a-y)x^2\,dydx = \int_b^{2b} \left[ay - \frac{y^2}{2}\right]_0^a x^2 dx =$$

$$= \int_b^{2b} \frac{a^2}{2} x^2\,dx = \frac{7a^2b^3}{6}.$$

Exemplo ilustrativo 3. Verificar que $\displaystyle\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx = \frac{2a^3}{3}$.

SOLUÇÃO. $\displaystyle\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx = \int_0^a \Big[xy\Big]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$

$$= \int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

Na integração sucessiva envolvendo três variáveis, os limites que figuram no último sinal de integração referem-se à variável cuja diferencial está escrita em primeiro lugar, os limites que figuram no primeiro sinal de integração referem-se à variável cuja diferencial está escrita em último lugar.

Exemplo ilustrativo 4. Verificar que $\displaystyle\int_2^3 \int_1^2 \int_2^5 xy^2\,dz\,dy\,dx = \frac{35}{2}$.

SOLUÇÃO. $\displaystyle\int_2^3 \int_1^2 \int_2^5 xy^2\,dz\,dy\,dx = \int_2^3 \int_1^2 \left[\int_2^5 xy^2\,dz\right] dy\,dx =$

$$= \int_2^3 \int_1^2 \Big[xy^2 z\Big]_2^5 dy\,dx$$

$$= 3\int_2^3 \int_1^2 xy^2\,dy\,dx = 3\int_2^3 \left[\int_1^2 xy^2\,dy\right] dx$$

$$= 3\int_2^3 \left[\frac{xy^3}{3}\right]_1^2 dx = 7\int_2^3 x\,dx = \frac{35}{2}.$$

PROBLEMAS

Nos problemas 1-10 da lista abaixo, o sólido cujo volume é igual ao valor da integral, deve ser descrito.

Calcule as seguintes integrais definidas.

1. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 (x+2)\,dy\,dx = 5.$

2. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^x y\,dy\,dx = \tfrac{32}{3}.$

3. $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx = \tfrac{2}{3}\,a^{\frac{3}{2}}.$

4. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\frac{y}{2}} y\,dx\,dy = \tfrac{7}{6}.$

5. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{x^2} y\,dy\,dx = \tfrac{16}{5}.$

6. $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} (x+2y)\,dx\,dy = \tfrac{143}{30}$

7. $\displaystyle\int_0^{-1} \int_{y+1}^{2y} xy\,dx\,dy = \tfrac{11}{24}.$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{x^2} (x+y)\,dydx = \tfrac{1}{5}.$

9. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x (x^2+y^2)dy\,dx = \tfrac{16}{3}.$

10. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}.$

11. $\displaystyle\int_b^a \int_\beta^\alpha \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\rho = \tfrac{1}{3}(a^3 - b^3)(\cos\beta - \cos\alpha).$

12. $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{a\cos\theta} \rho \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta = \tfrac{1}{3} a^2.$

13. $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, d\rho \, d\theta = \tfrac{4}{3} a^3.$

14. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a\cos\theta}^a \rho^4 \, d\rho \, d\theta = (\pi - \tfrac{16}{15}) \frac{a^5}{10}.$

15. $\displaystyle\int_b^a \int_0^b \int_a^{2a} x^2y^2z \, dz \, dy \, dx = \tfrac{1}{6} a^2b^3 (a^3 - b^3).$

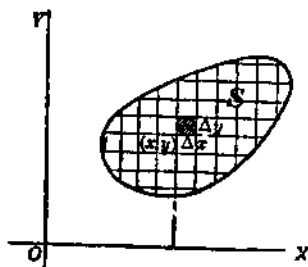
16. $\displaystyle\int_0^a \int_0^x \int_0^y x^3y^2z \, dz \, dy \, dx = \tfrac{1}{90} a^9.$

17. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x \, dz \, dx \, dy = \tfrac{4}{35}.$

18. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y^2} z \, dz \, dy \, dx = \tfrac{11}{60}.$

19. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^z \int_0^{x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy \, dx \, dz = \tfrac{1}{2}\pi.$

20. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} \, dz \, dy \, dx = \tfrac{1}{8} e^4 - \tfrac{3}{4} e^2 + e - \tfrac{3}{8}.$

245. — Integral dupla extendida a uma região S. No último parágrafo interpretamos uma integral dupla definida como o volume de uma porção de um cilindro reto. Isto não significa necessàriamente que toda integral dupla definida seja o volume de um tal sólido; realmente, na interpretação mencionada supuzemos implìcitamente que a função integranda fosse sempre não negativa. Afim de dar à integral dupla definida uma interpretação que não envolva necessàriamente o conceito acima, vamos nos limitar ao plano XOY.

Seja $f(x, y)$ uma função definida para os pontos (x, y) de uma região S do plano XOY. Como no § 244, consideremos os retângulos elementares de dimensões Δx e Δy, ver figura. Escolhamos arbitràriamente em cada retân-

gulo um ponto (x, y) e façamos o produto

$$f(x, y) \Delta x \Delta y .$$

Somemos depois todos estes produtos; temos o número

$$\sum\sum f(x, y) \Delta x \Delta y .$$

Pois bem, o limite da soma acima quando Δx e Δy tendem a zero chama-se *integral dupla da função $f(x, y)$ extendida à região S.* Indica-se pelo símbolo

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy .$$

Podemos, pois, escrever

$$(1) \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y) \Delta x \Delta y = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy .$$

Por (A), o valor do primeiro membro de (1) quando $f(x, y)$ não toma valores negativos em S, foi calculado com integrações sucessivas. O mesmo raciocínio que forneceu este resultado (ver § 244) pode ser aplicado quando a porção S' da superfície $z = f(x, y)$ está abaixo do plano XOY. O limite da dupla soma será o volume então achado mas com sinal negativo. As integrais em (A) darão o mesmo número negativo. Finalmente, se $f(x, y)$ é algumas vezes positiva e algumas vezes negativa nos pontos de S, podemos dividir esta região em sub-regiões nas quais $f(x, y)$ seja ou sempre positiva ou sempre negativa. O raciocínio vale para cada sub-região e portanto para a soma destas sub-regiões, isto é, para S. Daí, a conclusão: *a integral dupla em* (1) *pode ser calculada em todos os casos por integração sucessiva.*

Resta ainda explicar o método de determinação dos limites de integração. Isto será feito no próximo parágrafo.

246. — Área plana como uma integral dupla definida. Coordenadas retangulares. No § 145 resolvemos o problema das áreas planas por integração simples. Vamos agora ver o mesmo problema com integração dupla. O estudo sob este ponto de vista é útil sobretudo porque torna-se clara a determinação dos limites de integração para o problema geral do § 245.

Seja determinar a área de uma região S do plano XOY. Como já fizemos anteriormente, consideremos os retângulos elementares internos a S, ver figura. Temos

$$(1) \qquad \text{Elemento de área} = \Delta x \, \Delta y \, .$$

Se A é a área total da região S temos, por (1), § 245,

$$(B) \qquad A = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum \Delta x \, \Delta y = \iint_S dx \, dy \, .$$

Tendo em vista o resultado estabelecido no § 245, podemos dizer:

A área de uma região é o valor da integral dupla da função $f(x, y) = 1$ extendida à região.

Ou, também: *a área é o volume de um cilindro reto com base na região e cuja altura é a unidade* (§ 244).

Os exemplos mostram como são obtidos os limites de integração.

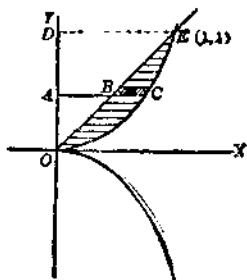
Exemplo ilustrativo 1. Calcular a área da região acima de OX que é limitada pela parábola semi-cúbica $y^2 = x^3$ e a reta $y = x$.

Solução. A ordem de integração esta indicada na figura. Integra-se primeiro em relação a x, isto é, soma-se primeiro os elementos $dx\,dy$ de uma faixa horizontal. Tem-se pois

$$\int_{AB}^{AC} dx \, dy = dy \int_{AB}^{AC} dx = \text{área de uma faixa horizontal de altura } dy.$$

Depois, integra-se este resultado em relação a y. Isto corresponde a somar todas as faixas horizontais. Obtém-se assim

$$A = \int_0^{OD} \int_{AB}^{AC} dx dy \, .$$

Obtém-se os limites AB e AC resolvendo-se em relação a x cada uma das equações das curvas limítrofes. Assim, da equação da reta, $x = AB = y$, e da equação da curva, $x = AC = y^{\frac{2}{3}}$. Para determinar OD, resolve-se as duas equações simultâneamente afim de achar o ponto de interseção E. Isto dá o ponto (1,1), logo $OD = 1$. Portanto

$$A = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} dx \, dy = \int_0^1 (y^{\frac{2}{3}} - y) \, dy =$$

$$= \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \, . \quad \textit{Resp.}$$

Podemos também começar somando os elementos $dx\,dy$ de uma faixa vertical e depois somar estas faixas. Assim procedendo, vem

$$A = \int_0^1 \int_{x^{\frac{3}{2}}}^{x} dy\,dx = \int_0^1 \left(x - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

Neste exemplo, a ordem de integração não influi sobre o número de integrais. Este não é, contudo, sempre o caso, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo ilustrativo 2. Achar a área no primeiro quadrante limitada pelo eixo dos xx e pelas curvas,

$$x^2 + y^2 = 10, \quad y^2 = 9x.$$

Solução. Aqui integramos primeiro em relação a x para cobrir uma faixa horizontal, isto é, da parábola para o círculo. Temos, pois, para a área tôda

$$A = \int_0^3 \int_{HG}^{HI} dx\,dy,$$

pois o ponto de interseção S é $(1, 3)$. Para achar HG, resolvamos em relação a x a equação $x^2 = 9x$. Então

$$x = HG = \frac{1}{9} y^2.$$

Para achar HI, tiremos x de $x^2 + y^2 = 10$. Obtemos

$$x = HI = +\sqrt{10 - y^2}.$$

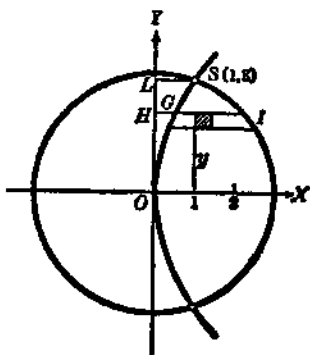
Logo

$$A = \int_0^3 \int_{\frac{1}{9}y^2}^{\sqrt{10-y^2}} dx\,dy =$$

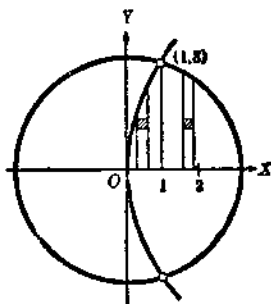
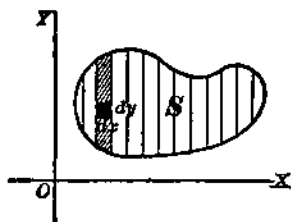
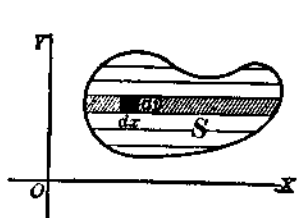
$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{10 - y^2} + 5 \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{\sqrt{10}} - \frac{1}{27} y^3\right]_0^3 = 6{,}75 \quad \textit{Resp.}$$

Se integrarmos primeiro em relação a y, usando faixas verticais, são necessárias duas integrações. Então

$$A = \int_0^1 \int_0^{3\sqrt{x}} dy\,dx + \int_1^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-x^2}} dy\,dx = 6{,}75.$$

A ordem de integração deve ser tal que a área seja obtida com uma única integral, se for possível.

Os exemplos acima mostram que pomos

$$A = \iint dx\, dy \qquad \text{ou}$$

$$A = \iint dy\, dx$$

segundo a natureza das curvas que limitam a área. As figuras abaixo ilustram, de um modo geral, a diferença no processo de soma indicado pelas duas integrais.

PROBLEMAS

1. Achar, por dupla integração, a área compreendida entre as duas parábolas $3y^2 = 25x$ e $5x^2 = 9y$, (a) integrando primeiro em relação a y; (b) integrando primeiro em relação a x.

$$\textit{Resp.}\quad \text{(a)} \int_0^3 \int_{\frac{5x^2}{9}}^{\sqrt{\frac{25x}{3}}} dy\, dx = 5\,; \quad \text{(b)} \int_0^3 \int_{\frac{3y^2}{25}}^{\sqrt{\frac{9y}{5}}} dx\, dy = 5.$$

Calcular, por dupla integração, a área finita limitada por cada um dos pares de curvas abaixo.

2. $y = 4x - x^2,\ y = x.$ *Resp.* $4\frac{1}{2}$.
3. $y^2 = 4x,\ 2x - y = 4.$ 9.
4. $y = x^2,\ 2x - y + 3 = 0.$ $\frac{32}{3}$.
5. $y^2 = 2x,\ x^2 = 6y.$ 4.
6. $y^2 = 4x,\ x = 12 + 2y - y^2.$ $\frac{4096}{75}$.
7. $y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 4x.$ $\pi - \frac{8}{3}$.

8. $y^2 = 9 + x, y^2 = 9 - 3x$. 48.

9. $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3,\ 2y = x,\ x = 0$. $a^2(\pi - 1)$.

10. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}},\ x + y = a$. $\frac{1}{3}a^2$.

11. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x + y = a$. $\frac{1}{32}(16 - 3\pi)a^2$.

12. $y = x^3 - 2x,\ y = 6x - x^3$. 16.

13. $x = 6y - y^2,\ y = x$.

14. $4y^2 = x^3,\ y = x$.

15. $y^2 = x + 4,\ y^2 = 4 - 2x$.

16. $x^2 + y^2 = 25,\ 27y^2 = 16x^3$.

17. $(2a - x)y^2 = x^3,\ y^2 = ax$.

18. $x^2 - y^2 = 14,\ x^2 + y^2 = 36$.

247. — Volume sob uma superfície. No § 244 examinamos o volume de um sólido limitado por uma superfície

$$(1) \qquad z = f(x, y),$$

o plano XOY e um cilindro de geratriz paralela a OZ e com base sôbre uma região S do plano XOY. Vimos que o volume do sólido é, por (A),

$$(2) \qquad V = \iint\limits_S z\,dx\,dy = \iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy.$$

A ordem de integração e os limites são os relativos à região S. O volume de um sólido deste tipo é o "volume sob uma superfície (1)". O problema análogo para o plano, "área sob uma curva", foi tratado no Capítulo XIV. Como caso particular, o volume pode ser limitado pela superfície e o próprio plano XOY.

Note que o elemento de volume em (2) é um prisma reto de base $dx\,dy$ e altura z.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o volume limitado pelo parabolóide elítico

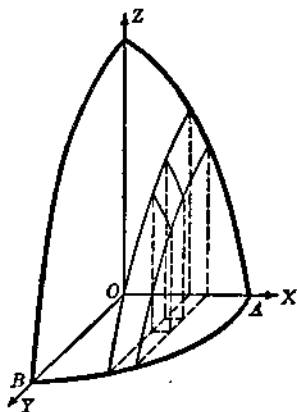
$$(3) \qquad 4z = 16 - 4x^2 - y^2$$

e o plano XOY.

Solução. Resolvendo (3) em relação a z, vem

$$(4) \qquad z = 4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2$$

Pondo $z = 0$, obtemos

$$4x^2 + y^2 = 16,$$

que é a equação da fronteira da base do sólido no plano XOY. Logo, por (2), usando o valor de z dado por (4),

$$(6) \qquad V = 4\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2)\, dy\, dx = 16\,\pi. \quad \textit{Resp.}$$

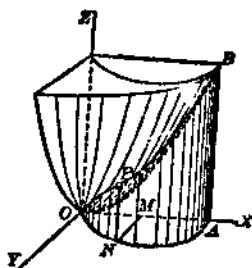
Os limites são fornecidos pelas linhas limítrofes da área OAB da elipse (5) que está no primeiro quadrante.

Exemplo ilustrativo 2. Achar o volume do sólido limitado pelo parabolóide de revolução

$$(7) \qquad x^2 + y^2 = az,$$

o plano XOY e o cilindro

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = 2\,ax.$$

SOLUÇÃO. Resolvendo (7) em relação a z e achando os limites da área da base do cilindro (8) no plano XOY, obtemos, usando (2),

$$V = 2\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2\,ax - x^2}} \frac{x^2 + y^2}{a}\, dy\, dx = \frac{3}{2}\pi a^3. \quad \textit{Resp.}$$

Para a área ONA (ver figura), $MN = \sqrt{2\,ax - x^2}$ (resolvendo (8) em relação a y), e $OA = 2\,a$. Êstes são os limites

PROBLEMAS

1. Achar o volume sob $z = 4 - x^2$, acima de $z = 0$ e dentro de $y^2 = 4\,x$.

$$\textit{Resp.} \quad V = 2\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} (4 - x^2)\, dy\, dx = 17{,}24.$$

2. Achar o volume sob o plano $x + z = 2$, acima de $z = 0$ e dentro de $x^2 + y^2 = 4$.

$$\textit{Resp.} \quad V = 2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2 - x)\, dy\, dx = 8\,\pi.$$

3. Achar o volume limitado pelo plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$ e os planos coordenados. *Resp.* $\frac{1}{6}\,abc$.

4. Achar o volume limitado superiormente por $x + z = 4$, inferiormente por $z = 0$ e lateralmente por $y^2 = 4\,x$. *Resp.* $\frac{512}{15}$.

5. Achar o volume do sólido dentro de $x^2 + y^2 = a^2$, limitado acima por $y^2 = a^2 - az$ e abaixo por $z = 0$. *Resp.* $\frac{3}{4}\pi a^3$.

6. Achar o volume do sólido sob o parabolóide elítico $z = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$ e acima de $z = 0$. *Resp.* 3π.

7. Achar o volume sob o plano $x + y + z = 8$, acima de $z = 0$ e compreendido entre os planos $x + 2y = 8$, $x - 2y = 8$.

Resp. $170\frac{2}{3}$.

8. Achar o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica $x^2 + az = a^2$ e os planos $x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.

Resp. $\frac{4}{3}a^3$.

9. Um sólido é limitado pelas superfícies $y^2 + z^2 = 4ax$, $x = 3a$ e está contido em $y^2 = ax$. Achar o seu volume.

Resp. $(6\pi + 9\sqrt{3})a^3$.

10. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela superfície cilíndrica $y^2 = a^2 - az$, inferiormente por $z = 0$ e que está contido na superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = ax$.

11. Achar o volume abaixo de $z = 2x + a$, acima de $z = 0$ e dentro de $x^2 + y^2 = 2ax$. *Resp.* $3\pi a^3$.

12. Achar o volume sob $y^2 + z = 4$, acima de $z = 0$ e dentro das superfícies cilíndricas $y^2 - 2x = 0$, $y^2 = 8 - 2x$.

13. Um sólido é limitado pelo parabolóide $x^2 + y^2 = az$, a superfície cilíndrica $y^2 = a^2 - ax$ e o planos $x = 0$, $z = 0$. Achar o volume. *Resp.* $\frac{4}{7}a^3$.

14. Achar o volume sob $4z = 16 - 4x^2 - y^2$, acima de $z = 0$ e contido em $x^2 + y^2 = 2x$. *Resp.* $\frac{43}{16}\pi$.

15. Os eixos de duas superfícies cilíndricas circulares cortam-se em ângulo reto. Os raios desses cilindros são iguais ($= r$). Achar o volume do sólido interseção das duas superfícies.

Resp. $\frac{16}{3}r^3$.

16. Achar o volume da superfície fechada $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (O traço sobre cada plano coordenado é a astróide, Cap. XXVI).

17. Achar o volume do sólido interseção de $y^2 + z^2 = 4\,ax$ com $x^2 + y^2 = 2\,ax$. *Resp.* $(2\,\pi + \frac{16}{3})\,a^3$.

248. — Diretrizes para formar uma integral dupla com dadas propriedades. Vamos dar agora uma regra para formar uma integral com dadas propriedades. Nos parágrafos seguintes faremos aplicações. Para uma integral simples a regra correspondente é a que foi dada no § 156.

PRIMEIRO PASSO. *Trace as curvas que limitam a região em exame.*

SEGUNDO PASSO. *Num ponto qualquer $P(x, y)$, interno à região, construa o elemento retangular de área $\Delta x \Delta y$.*

TERCEIRO PASSO. *Considere a função $f(x, y)$ que, multiplicada por $\Delta x\, \Delta y$, fornece as propriedades desejadas para o elemento retangular.*

QUARTO PASSO. *A integral que se quer é*

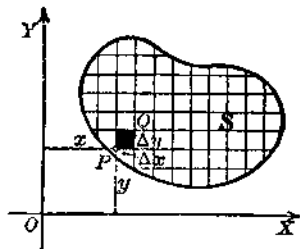
$$\iint f(x, y)\, dx\, dy$$

extendida à dada região. A ordem de integração e os limites são determinados do mesmo modo que o usado para achar a própria área da região.

249. — Momento de área e centróides. Este problema foi tratado no § 177 por integração simples. A integral dupla é, contudo, muitas vezes mais conveniente.

Vamos seguir a regra do parágrafo precedente. Os momentos de área do elemento retangular de área são

$x\, \Delta x\, \Delta y$, em relação a OY,

$y\, \Delta x\, \Delta y$, em relação a OX.

Logo, o momento em relação à área tôda é, usando a notação do § 177,

$$(C) \quad M_x = \iint y\, dx\, dy\,, \qquad M_y = \iint x\, dx\, dy\,.$$

O centróide da área é dado por

$$(D) \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{\text{área}}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{\text{área}}.$$

Em (C) as integrais dão os valores das integrais duplas das funções

$$f(x, y) = y \quad \text{e} \quad f(x, y) = x,$$

respectivamente, extendidas à área (§ 245).

Para uma área lim tada por uma curva, o eixo dos xx e duas paralelas ao eixo dos yy ("área sob uma curva"), deduzimos de (C)

$$(1) \qquad M_x = \int_a^b \int_0^y y\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,$$

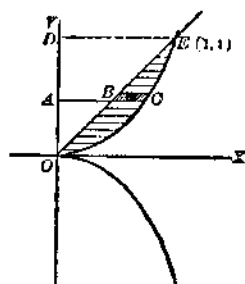
$$M_y = \int_a^b \int_0^y x\,dy\,dx = \int_a^b xy\,dx.$$

Estas conferem com (2), § 177. Note que em (1) y é a ordenada de um ponto da curva e seu valor em termos de x deve ser obtido da equação da curva e substituído no integrando antes da integração.

Exemplo ilustrativo. Achar o centróide da área no primeiro quadrante limitada pela parábola semi-cúbica $y^2 = x^3$ e a reta $y = x$.

SOLUÇÃO. A ordem e os limites de integração foram obtidos no EXEMPLO ILUSTRATIVO 1, § 246. Logo, usando (C),

$$M_x = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} y\,dx\,dy = \int_0^1 (y^{\frac{5}{3}} - y^2)\,dy = \frac{1}{24}.$$

$$M_y = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} x\,dx\,dy = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (y^{\frac{3}{4}} - y^2)\,dy = \frac{1}{21}.$$

Sendo $\qquad A = \text{área} = \dfrac{1}{10},$

temos, por (D), $\qquad \bar{x} = \dfrac{10}{21} = 0{,}48, \qquad \bar{y} = \dfrac{5}{12} = 0{,}42.$ *Resp.*

250. — Teorema de Pappus. Uma relação entre centróides e volumes dos sólidos de revolução é expressa pelo seguinte teorema:

Se uma região plana gira em torno de um eixo que está no plano da região e não a corta, o volume do sólido de revolução que a região gera é igual ao produto da área da região pelo comprimento da circunferência descrita pelo centróide da área.

Demonstração. Façamos a área da figura girar em torno do eixo dos xx. O elemento retangular de área interno à região S, ver figura, gera um cilindro circular oco, cujo volume ΔV é dado por

$$\Delta V = \pi\,(y + \Delta y)^2\,\Delta x - \pi y^2\,\Delta x\,.$$

Fatorando e simplificando, obtemos

$$\Delta V = 2\,\pi\,(y + \tfrac{1}{2}\,\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y\,.$$

Ora, em (1), § 245, (x, y) em $f(x, y)$ é um ponto qualquer pertencente ao retângulo PQ, ver figura. Como $(x, y + \frac{1}{2}\,\Delta y)$ é um ponto de PQ, podemos tomar $f(x, y) = 2\,\pi\,y$; logo, sendo ΔV da forma $f(x, y)\,\Delta z\,\Delta y$, vem, por (1), § 245, e (C)

$$(1) \qquad V_x = 2\,\pi \iint\limits_S y\,\Delta x\,\Delta y = 2\,\pi\,M_x\,.$$

Finalmente, usando (D), obtemos

$$(2) \qquad V_x = 2\,\pi\,\bar{y}\cdot A\,,$$

onde A é a área da região S. O segundo membro é o produto da área pelo comprimento da circunferência descrita pelo centróide. Com isto fica demonstrado o teorema.

Ponhamos o resultado sob a forma

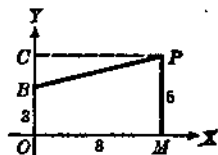
$$(3) \qquad V = 2\,\pi\,\bar{y}\cdot A$$

Se duas das grandezas V, $\bar{y}$, A são conhecidas, a outra pode ser achada por (3).

Exemplo ilustrativo. Achar o centróide do trapésio $OMPB$ da figura, pelo teorema de Pappus.

Solução. Área $OMPB = \frac{1}{2}\,(3 + 5)\,8 = 32$. Fazendo a figura girar em torno de OX, o sólido formado é um tronco de cone de revolução. Logo, por (12), § 1, sendo $a = 8$, $R = 5$, $r = 3$, temos

$$V_x = \frac{8\,\pi}{3}\,(25 + 9 + 15) = \frac{392}{3}\,\pi\,.$$

Logo, por (3), $\qquad \bar{y} = \dfrac{V_x}{2\,\pi A} = \dfrac{392}{192} = 2{,}04\,.$

Fazendo a figura girar em torno de OY, o volume gerado é a diferença entre os volumes do cilindro gerado por $OCPM$ e o cone gerado pelo triângulo BCP Logo

$$V_x = 320\,\pi - \frac{128\,\pi}{3} = \frac{832}{3}\,\pi.$$

Portanto, pelo teorema, $\bar{x} = \dfrac{V_y}{2\,\pi A} = \dfrac{832}{192} = 4\dfrac{1}{3}$.

O centróide é, pois, $(4\frac{1}{3}, 2{,}04)$. *Resp.*

EXERCÍCIOS

Achar o centróide da área limitada por cada uma das seguintes curvas.

1. $y = x^3, y = 4\,x$. (Área no primeiro quadrante) *Resp.* $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$.

2. $y = 6\,x - x^2, y = x$. $(\frac{5}{2}, 5)$.

3. $y = 4\,x - x^2, y = 2\,x - 3$. $(1, \frac{3}{5})$.

4. $x^2 = 4\,y, x - 2\,y + 4 = 0$. $(1, \frac{8}{5})$.

5. $y = x^2, 2\,x - y + 3 = 0$. $(1, \frac{17}{5})$.

6. $y = x^2 - 2\,x - 3, y = 2\,x - 3$. $(2, -\frac{3}{5})$.

7. $y^2 = x, x + y = 2, y = 0$. (Primeiro quadrante) $(\frac{32}{35}, \frac{5}{14})$.

8. $y^2 = x, x + y = 2, x = 0$. $(\frac{8}{25}, \frac{11}{10})$.

9. $y^3 = x^2, 2\,y = x$. $(\frac{10}{3}, \frac{40}{21})$.

10. $4\,y = 3\,x^2, 2\,y^2 = 9\,x$. $(\frac{9}{10}, \frac{27}{20})$.

11. $y^2 = 2\,x, y = x - x^2$. $(\frac{14}{15}, -\frac{11}{15})$.

12. $y^2 = 8\,x, x + y = 6$. $(\frac{34}{5}, -4)$.

13. $y^2 = 4\,x, y^2 = 5 - x$. $(\frac{11}{5}, 0)$.

14. $y = 6\,x - x^2, x + y = 6$. $(\frac{7}{2}, 5)$.

15. $x = 4\,y - y^2, y = x$. $(\frac{12}{5}, \frac{3}{2})$.

16. $y = 4\,x - x^2, y = 5 - 2\,x$. $(3, \frac{3}{5})$.

17. $y^2 = 4\,x, 2\,x - y = 4$. $(\frac{8}{5}, 1)$.

18. $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 6x - x^2 - 3.$ $(2, 1)$.

19. $x^2 + y^2 = 1,\ x + y = 1.$ $(0{,}585,\ 0{,}585)$.

20. $x^2 + y^2 = 32,\ y^2 = 4x.$

21. $y^2 = 4x,\ 2x + y = 4.$

22. $x^2 + y^2 - 10x = 0,\ x^2 = y.$

23. $x^2 = y,\ 2y = 6x - x^2.$

24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Área do primeiro quadrante) $\left(\frac{256\,a}{315\,\pi}, \frac{256\,a}{315\,\pi}\right)$.

25. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}},\ x = 0,\ y = 0.$ $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$.

26. Achar o centróide da área sob um arco da ciclóide

$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta),\ y = a(1 - \cos\theta).$ *Resp.* $\left(\pi a, \frac{5\,a}{6}\right)$.

27. Usando o teorema de Pappus, achar o centróide de um semicírculo. *Resp.* Distância ao diâmetro $= \frac{4\,r}{3\,\pi}$.

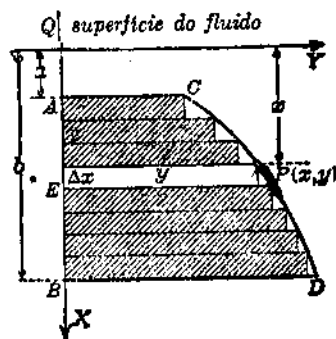
28. Usando o teorema de Pappus, achar o centróide da área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que esta no primeiro quadrante.

Resp. $\left(\frac{4\,a}{3\,\pi}, \frac{4\,b}{3\,\pi}\right)$.

29. Usando o teorema de Pappus, achar o volume do toro gerado pela revolução do círculo $(x - b)^2 + y^2 = a^2\ (b > a)$ em torno do eixo dos yy. *Resp.* $2\,\pi^2 a^2 b$.

30. Um retângulo gira em torno de um eixo que esta no seu plano e é perpendicular a uma diagonal do retângulo numa de suas extremidades. Achar o volume do sólido gerado.

251. — Centro de pressão de um fluido. O problema de calcular a pressão de um fluido sobre uma parede vertical foi estudado no § 179.

As pressões sobre o elemento retangular da figura constituem um sistema de forças paralelas, pois elas são perpendiculares ao plano da área XOY. A resultante deste sistema de fôrças é a pressão total do fluido P,

dada por (D), § 179,

$$(1) \qquad P = \overline{W} \int_a^b yx\,dx\,.$$

O ponto de aplicação de P diz-se o *centro de pressão do fluido.* Vamos achar a abscissa ($= x_0$) deste ponto. Para isto, usamos o princípio dos momentos de força. Este pode ser assim formulado:

A soma dos momentos de um sistema de fôrças paralelas em relação a um eixo é igual ao momento da resultante em relação ao eixo.

Ora, a pressão do fluido dP sobre o elemento retangular EP é, pelo § 179,

$$(2) \qquad dP = \overline{W}\, xy\, \Delta x\,.$$

O momento desta força em relação a OY é o produto de dP por $OE\,(= x)$, ou, usando (2),

$$(3) \qquad \text{Momento de } dP \text{ em relação a } OY = x\,dP = \overline{W} x^2 y\,\Delta x.$$

Temos, pois, para momento da pressão total do fluido,

$$(4) \qquad \text{Momento total} = \int_a^b \overline{W}\, x^2 y\,dx\,.$$

Mas o momento da resultante da pressão do fluido P é $x_0\,P$. Logo

$$(5) \qquad x_0\,P = \overline{W} \int_a^b x^2 y\,dx\,.$$

Resolvendo em relação a x_0 e usando (1), obtemos a fórmula para a profundidade do centro de pressão

$$(6) \qquad x_0 = \frac{\displaystyle\int_a^b x^2\,dA}{\displaystyle\int_a^b x\,dA}\,,$$

onde dA = elemento de área $= y\,dx$.

O denominador em (6) é o momento de área de $ABCD$ em relação a OY (ver § 177). O numerador é uma integral ainda não vista. Ela se chama *momento de inércia da área ABCD em relação a OY.*

A letra I é comumente usada para o momento de inércia em relação a um eixo, sendo que a letra é acompanhada de um índice para designar o eixo. Dêste modo, (6) pode ser posta sob a forma

$$x_0 = \frac{I_y}{M_y}. \tag{7}$$

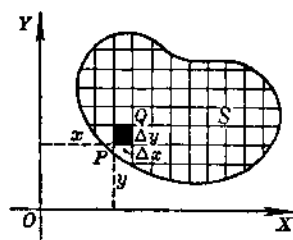
A notação usual para o momento de inércia em relação a um eixo l é

$$I_l = \int r^2\,dA, \tag{8}$$

onde

r = distância entre o elemento dA e o eixo l.

O problema dêste parágrafo é um dos muitos que conduzem a momentos de inércia. No parágrafo seguinte vamos ver como se calculam os momentos de inércia por integração dupla e integração simples. Vamos ver também algumas aplicações.

252. — Momento de inércia de uma área. É importante em mecânica o conceito de momento de inércia de uma área em relação a um eixo. Vamos ver como se calculam esses momentos. Seguiremos a regra do § 248.

Para o retângulo elementar PQ em $P(x, y)$, ver figura, o momento de inércia em relação a OX é definido por

$$y^2\,\Delta x\,\Delta y \tag{1}$$

e o momento de inércia em relação a OY por

$$x^2\,\Delta x\,\Delta y \tag{2}$$

Portanto, se I_x e I_y designam os momentos de inércia da área toda em relação a OX e OY respectivamente, temos (confronte (8), § 251).

$$(E) \qquad I_x = \iint y^2\,dx\,dy\,, \quad I_y = \iint x^2\,dx\,dy\,.$$

Os *raios de giro* r_x e r_y são dados por

$$(F) \qquad r_x^2 = \frac{I_x}{\text{área}}\,, \quad r_y^2 = \frac{I_y}{\text{área}}\,.$$

Em (E) as funções cujas integrais são extendidas à área S são, respectivamente, $f(x, y) = y^2$ e $f(x, y) = x^2$.

As fórmulas (E) tornam-se mais simples para uma área "sob uma curva", isto é, área limitada por uma curva, o eixo dos xx e duas paralelas a OY. Temos neste caso,

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
I_x &= \int_a^b \int_0^y y^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{3} \int_a^b y^3\,dx\,, \\
I_y &= \int_a^b \int_0^y x^2\,dy\,dx = \int_a^b x^2 y\,dx\,.
\end{aligned}
$$

Nestas equações y é a ordenada de um ponto da curva e seu valor em termos de x deve ser obtido da equação da curva e substituído na função integranda.

As fórmulas para momentos de inércia I são postas sob a forma

$$
(G) \qquad I = Ar^2,
$$

onde A = área e r = raio de giro. Resolvendo (F) em relação a I_x e I_y obtém-se estas sob a forma acima.

Dimensões. Se a unidade linear é uma polegada, o momento de inércia tem a dimensão (polegada)^4. Por (F), r_x e r_y são comprimentos, em polegadas.

Exemplo ilustrativo 1. Achar I_x e I_y e os correspondentes raios de giro para a área do Exemplo Ilustrativo 1, § 246.

SOLUÇÃO. Usando a mesma ordem de integração e os mesmo limites já usados, temos, por, (E),

$$
I_x = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} y^2\,dx dy = \int_0^1 (y^{\frac{8}{3}} - y^3)\,dy = \frac{1}{44}\,.
$$

$$
I_y = \int_0^1 \int_y^{y^{\frac{2}{3}}} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{3} \int_0^1 (y - y^3)\,dy = \frac{1}{36}\,.
$$

Como A = área = 0,1, achamos, por (F),

$$
r_x = 0{,}48, \quad r_y = 0{,}53. \quad \textit{Resp.}
$$

Exemplo ilustrativo 2. Achar I_x e I_y para o segmento parabólico BOC da figura da página seguinte.

SOLUÇÃO. Com eixos de coordenadas como mostra a figura, a equação da da parábola limítrofe é

$$
(4) \qquad y^2 = 2\,px\,.
$$

Como $B(a, b)$ é um ponto da curva, obtemos, pondo $x = a$, $y = b$ em (4), $b^2 = 2pa$. Resolvendo esta equação em relação a $2p$ e substituindo o valor achado em (4), vem

$$(5) \qquad y^2 = \frac{b^2x}{a}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{bx^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.$$

Os momentos de inércia da área sob a parábola OPB no primeiro quadrante serão a metade dos momentos que se quer. Logo, usando (3) e substituindo o valor de y de (5), obtemos

$$\frac{1}{2} I_x = \frac{1}{3} \int_0^a \frac{b^3}{a^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{15} ab^3 \quad \therefore \quad I_x = \frac{4}{15} ab^3.$$

$$\frac{1}{2} I_y = \int_0^a x^2 \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{7} a^3 b. \quad \therefore \quad I_y = \frac{4}{7} a^3 b.$$

Para área do segmento achamos

$$\frac{1}{2} A = \int_0^a y \, dx = \int_0^a \frac{b}{a^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{3}{2} ab. \quad \therefore \quad A = \frac{4}{3} ab.$$

Logo, por (F), $\qquad r_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1}{5} b^2, \quad \text{e} \quad I_x = \frac{1}{5} Ab^2,$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3}{7} a^2, \quad \text{e} \quad I_y = \frac{3}{7} Aa^2.$$

Os resultados estão sob a forma (G). *Resp.*

Na figura do parág. 179, o eixo OY esta sobre a superfície do fluido. Se indicarmos êste eixo, em qualquer figura, por s, então a profundidade do centro de pressão é, por (7), § 251,

$$(6) \qquad x_0 = \frac{I_s}{M_s} = \frac{r_s^2}{h_s},$$

se $\qquad r_s =$ raio de giro em relação ao eixo s,

e $\qquad h_s =$ profundidade do centróide abaixo do eixo s.

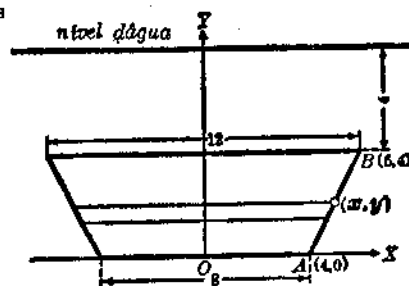
Exemplo ilustrativo 3. Achar a profundidade do centro de pressão sobre a comporta com forma de trapézio, da figura abaixo. Confronte o Exemplo Ilustrativo 2, § 179.

Solução. Escolhamos eixos OX e OY como os da figura e tracemos uma faixa horizontal elementar. Seja r a distância desta faixa ao eixo s, posto sobre o nível da água. Então,

$$r = 8 - y, \quad dA = 2x\,dy.$$

Portanto, por (8), § 251, e pela definição de momento de área § (177), temos

$$(7) \quad I_s = \int r^2\,dA = \int (8-y)^2\,2x\,dy,$$

$$(8) \quad M_s = \int r\,dA = \int (8-y)\,2x\,dy.$$

A equação de AB é $y = 2x - 8$. Resolvendo em relação a x, substituindo em (7) e (8) e integrando entre os limites $y = 0$, $y = 4$, obtemos

$$I_s = \int_0^4 (8-y)^2(8+y)\,dy = 1429\frac{1}{3},$$

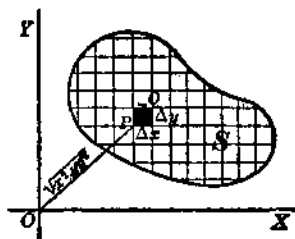
$$M_s = \int_0^4 (64 - y^2)\,dy = 234\frac{2}{3}.$$

Logo, por (7), § 251, $x = 6{,}09$. *Resp.*

253. — Momento polar de inércia. O momento de inércia do retângulo elementar PQ em relação à origem é o produto da área por $\overline{OP}^2$, isto é,

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Logo, pelo § 248, temos para toda a área

$$(2) \quad I_0 = \iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Podemos, contudo, escrever o segundo membro como soma de duas integrais, pois (2) é, evidentemente, a mesma cousa que

$$(3) \qquad I_0 = \iint x^2\,dx\,dy + \iint y^2\,dx\,dy = I_x + I_y .$$

Temos, pois, o seguinte teorema.

O momento de inércia de uma área em relação à origem é igual à soma dos momentos de inércia da área em relação aos eixos dos xx e dos yy.

PROBLEMAS

Achar I_x, I_y e I_0 para cada uma das áreas abaixo descritas.

1. Semi-círculo que está à direita do eixo dos yy e que é limitado por $x^2 + y^2 = r^2$. *Resp.* $I_x = I_y = \dfrac{Ar^2}{4}$.

2. Triângulo isósceles de altura h e base a cujos vértices são $(0, 0)$, $\left(h, \dfrac{a}{2}\right)$, $\left(h, -\dfrac{a}{2}\right)$. *Resp.* $I_x = \dfrac{Aa^2}{24}$, $I_y = \dfrac{Ah^2}{2}$.

3. Triângulo retângulo cujos vértices são $(0, 0)$, (b, a), $(b, 0)$.

Resp. $I_x = \dfrac{Aa^2}{6}$, $I_y = \dfrac{Ab^2}{2}$.

4. Elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *Resp.* $I_x = \dfrac{Ab^2}{4}$, $I_y = \dfrac{Aa^2}{4}$.

5. Área no primeiro quadrante limitada por $y^2 = 4x$, $x = 4$, $y = 0$. *Resp.* $I_x = \dfrac{16A}{5}$, $I_y = \dfrac{48A}{7}$.

6. Área compreendida entre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ e o círculo $x^2 + y^2 = 2y$.

Resp. $I_x = \dfrac{19A}{20}$, $I_y = \dfrac{53A}{20}$.

7. Área compreendida entre as elipses $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ e $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Resp. $I_x = \dfrac{5A}{2}$, $I_y = \dfrac{19A}{4}$.

8. Área compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 16$ e $x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Resp. $I_x = \dfrac{239\,A}{60}$, $I_y = \dfrac{17\,A}{4}$.

9. Área compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 36$ e $x^2 + (y + 3)^2 = 4$.

$$Resp. \quad I_x = \frac{71\,A}{8},\ I_y = 10\,A$$

10. Área compreendida entre o círculo $x^2 + y^2 = 4$ e a elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

$$Resp. \quad I_x = \frac{23\,A}{5}, \quad I_y = \frac{53\,A}{5}.$$

11. Área total limitada por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$Resp. \quad I_x = I_y = \frac{7\,Aa^2}{64}.$$

12. Achar a profundidade do centro de pressão sobre uma comporta triangular tendo o vértice abaixo da base, a qual é horizontal e esta sobre a superfície do líquido.

13. Achar a profundidade do centro de pressão sobre uma comporta retangular de 8 pés de largura e 4 pés de profundidade quando o nível da água está 5 pés acima da parte superior da comporta.

Resp. 7,19 pés abaixo da superfície da água.

14. Achar a profundidade do centro de pressão sobre uma extremidade de um tanque cilíndrico horizontal de gasolina, cujo diâmetro mede 5 pés, quando a altura da gasolina é (a) 2,5 pés; (b) 4 pés; (c) 6 pés. *Resp.* (a) $\frac{15\,\pi}{32} = 1{,}47$ pés; (b) aproximadamente 2,4 pés; (c) $\frac{221}{56} = 3{,}95$ pés.

254. — Coordenadas polares. Área plana. Quando as equações das curvas que limitam uma área são dadas em coordenadas polares, são necessárias algumas transformações para o cálculo de uma integral dupla.

Para o caso atual a área é dividida em porções elementares, como segue: traçamos arcos de circunferências com centro comum O e raios sucessivos diferindo por $\Delta\rho$. Assim, na Fig. 1, $OP = \rho$, $OS = \rho + \Delta\rho$. Depois traçamos semi-retas por O tais que

duas consecutivas formem um ângulo igual a $\Delta\theta$. Assim, na Fig. 1, ângulo POR é igual a $\Delta\theta$. Procedendo dêste modo, construímos

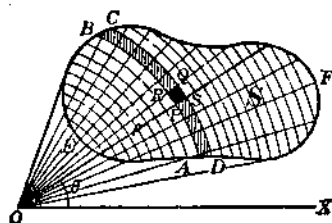



Fig. 1

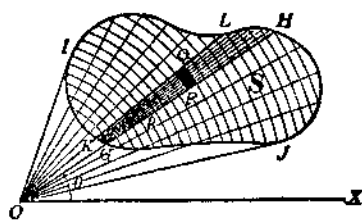



Fig. 2

uma série de porções retangulares, como $PSQR$ da Fig. 1, internas à área.

Seja ΔA a área da porção $PSQR$; ΔA é a diferença entre as áreas dos setores QOS e ROP. Portanto,

$$(1)\quad \Delta A = \tfrac{1}{2}(\rho + \Delta\rho)^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\,\rho^2\,\Delta\theta = \rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta + \tfrac{1}{2}\,\Delta\rho^2\,\Delta\theta\,.$$

A função $f(x, y)$ do § 245 deve ser substituída por uma função em que os argumentos sejam coordenadas polares. Seja $F(\rho, \theta)$ a mencionada função. Então, procedendo como no § 245, escolhemos um ponto (ρ, θ) de ΔA, formamos o produto

$$F(\rho, \theta)\,\Delta A$$

para cada ΔA interno a S, somamos estes produtos e finalmente passamos ao limite quando $\Delta\rho \to 0$ e $\Delta\theta \to 0$. Obtemos a integral dupla desejada. Precisamente,

$$(2)\qquad \lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \sum\sum F(\rho, \theta)\,\Delta A = \iint_S F(\rho, \theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,,$$

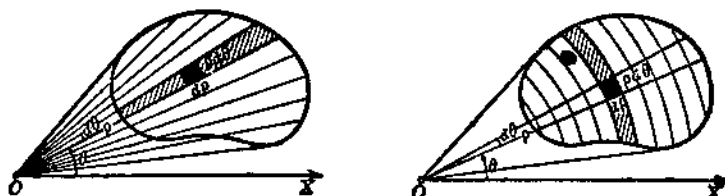
Note que em (2) o valor de ΔA foi substituído por $\rho d\rho d\theta$ e não pelo valor de ΔA dado por (1).

No § 258 mostramos que a integral dupla ora achada pode ser calculada por integrações sucessivas.

De (2) resulta que a área A da região S é expressa por

$$(H) \qquad A = \iint \rho \, d\rho \, d\theta = \iint \rho \, d\theta \, d\rho \, .$$

Estas fórmulas podem ser lembradas fàcilmente se pensarmos que os elementos de área são retângulos de dimensões $\rho d\theta$ e $d\rho$.

As figuras abaixo ilustram, de modo geral, a diferença no processo de calcular a área que é indicada pelas duas integrais acima.

Na primeira, integramos primeiro em relação a ρ, pois $d\rho$ precede $d\theta$, mantendo θ constante. Este processo cobrirá a faixa radial $KGHL$ da Fig. 2, página 650. Os limites para ρ são $\rho =$ $= OG$ e $\rho = OH$, que se acham resolvendo a equação (ou equações) da curva limítrofe (ou curvas limítrofes) em relação a ρ em têrmos de θ. Depois integra-se em relação a θ, os limites variando de $\theta =$ âng. JOX a $\theta =$ âng. IOX.

A segunda integral em (H) é feita integrando-se primeiro em relação a θ, mantendo ρ constante. Esta operação cobre a faixa circular $ABCD$ da Fig. 1, p. 650, entre dois arcos circulares consecutivos. Depois integramos em relação a ρ.

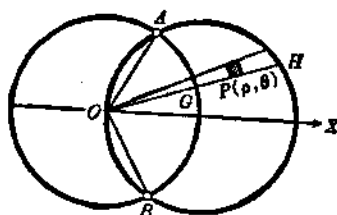
Quando a área é limitada por uma curva e dois de seus raios vetores (área descrita pelo raio vetor), obtemos da primeira das integrais (H)

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{\rho} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\theta \, ,$$

que confere com (D), § 159.

As integrais duplas em coordenadas polares tem uma das formas

$$(3) \qquad \iint F(\rho, \theta) \, \rho \, d\rho \, d\theta \quad \text{ou} \quad \iint F(\rho, \theta) \, \rho \, d\theta \, d\rho \, .$$

Exemplo ilustrativo 1. Achar os limites para uma integral dupla extendida à região que é interna ao círculo $\rho = 2\,r\cos\theta$ e externa ao círculo $\rho = r$.

Solução. Os pontos de interseção são $A\,(r,\frac{\pi}{3})$ e $B\,(r,-\frac{\pi}{3})$. Usando a primeira forma em (3), os limites para ρ são

$$\rho = OG = r\,,$$
$$\rho = OH = 2\,r\cos\theta\,;$$

para θ os limites são $-\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 2. Achar a área interna ao círculo $\rho = 2\,r\cos\theta$ e externa ao círculo $\rho = r$.

Solução. Pelo Exemplo Ilustrativo acima temos

$$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r}^{2r\cos\theta}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(4\,r^2\cos^2\theta - r^2)\,d\theta =$$

$$= r^2\,(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1{,}91\,r^2. \qquad \textit{Resp.}$$

255. — Problemas resolvidos com o uso de coordenadas polares. Não há dificuldade em estabelecer as fórmulas

$$(1) \qquad M_x = \iint \rho^2 \operatorname{sen}\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

$$(2) \qquad M_y = \iint \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

$$(3) \qquad I_x = \iint \rho^3 \operatorname{sen}^2\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

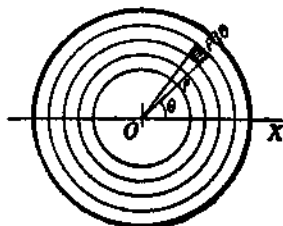
$$(4) \qquad I_y = \iint \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta\,.$$

$$(5) \qquad I_0 = \iint \rho^3\,d\rho\,d\theta\,.$$

As ordens das diferenciais devem ser permutadas se se quer efetuar primeiro a integração em relação a θ.

Exemplo ilustrativo 1. Vamos calcular agora os momentos de inércia de um círculo, em virtude das importantes aplicações destes momentos.

Seja a = raio. Então, por (5), o momento polar de inércia em relação ao centro é

$$(6) \qquad I_0 = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi a^4}{2} = \frac{A}{2} a^2,$$

onde A = área do círculo. Por outro lado, como $I_y = I_x$, por simetria, temos, por (3), § 253,

$$(7) \qquad I_x = \frac{1}{2} I_0 = \frac{A}{4} a^2.$$

Em palavras: *O momento polar de inércia de um círculo em relação ao centro é igual ao produto da metade da área do círculo pelo quadrado do raio. O momento polar de inércia em relação a qualquer diâmetro é igual ao produto da quarta parte da área pelo quadrado do raio.*

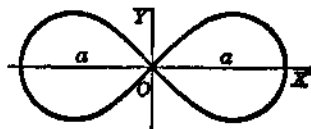
Exemplo ilustrativo 2. Achar o centróide de um laço da lemniscata

$$\rho = a^2 \cos 2\,\theta$$

Solução. Como OX é um eixo de simetria temos $\overline{y} = 0$.

$$\tfrac{1}{2} A = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\,\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4}.$$

$$\tfrac{1}{2} M_y = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \, d\theta.$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cos\theta \, d\theta \qquad \text{por (5), § 2}$$

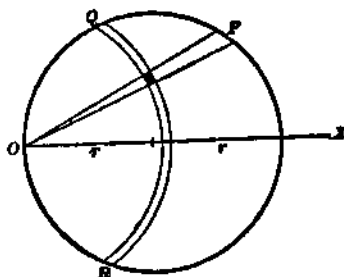
$$= \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \int_0^1 (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} \, dz \left(\text{se } \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} z\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{32} a^3 \sqrt{2}$$

Logo $\quad \overline{x} = \dfrac{M_y}{A} = \dfrac{\pi}{8} a \sqrt{2} = 0{,}55\, a$. *Resp.*

Exemplo ilustrativo 3. Achar I_0 para a região limitada pelo círculo $\rho = 2\,r\cos\theta$.

Solução. Somando os elementos da faixa de forma triangular OP, os limites de ρ são zero e $2\,r\cos\theta$ (obtidos da equação do círculo).

Somando depois os elementos de tôdas as faixas, os limites de θ são $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Logo, por (5),

$$I_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\,r\cos\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta = \frac{3\,\pi r^4}{2}. \quad \textit{Resp.}$$

Podíamos também ter somado primeiro os elementos de uma faixa circular (como QR). Assim procedendo, vem

$$I_0 = \int_0^{2\,r} \int_{-\operatorname{arc\,cos}\frac{\rho}{2r}}^{\operatorname{arc\,cos}\frac{\rho}{2r}} \rho^3\, d\rho\, d\theta = \frac{3\,\pi r^4}{2}. \quad \textit{Resp.}$$

PROBLEMAS

1. Achar a área interna ao círculo $\rho = \frac{3}{2}$ e à direita da reta $4\,\rho\cos\theta = 3$. *Resp.* $\dfrac{3\,(4\,\pi - 3\sqrt{3})}{16}$.

2. Achar a área interna ao círculo $\rho = 3\cos\theta$ e externa ao círculo $\rho = \frac{3}{2}$. *Resp.* $\dfrac{3\,(2\,\pi + 3\sqrt{3})}{8}$.

3. Achar a área interna ao círculo $\rho = 3\cos\theta$ e externa ao círculo $\rho = \cos\theta$. *Resp.* $2\,\pi$.

4. Achar a área interna à cardióide $\theta = 1 + \cos\theta$ e à direita da reta $4\,\rho\cos\theta = 3$. *Resp.* $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{16}$.

5. Achar a área interna à cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ e externa ao círculo $\rho = 1$. *Resp.* $\dfrac{\pi}{4} + 2$.

6. Achar a área interna ao círculo $\rho = 1$ e externa à cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$. *Resp.* $2 - \dfrac{\pi}{4}$.

7. Achar a área interna ao círculo $\rho = 3\cos\theta$ e externa à cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$. *Resp.* π.

8. Achar a área interna ao círculo $\rho = 1$ e externa à parábola $\rho(1 + \cos\theta) = 1$. *Resp.* $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

9. Achar a área interna à cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ e externa à parábola $\rho(1 + \cos\theta) = 1$. *Resp.* $\frac{3\pi}{4} + \frac{4}{3}$.

10. Achar a área interna ao círculo $\rho = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ e externa ao círculo $\rho = 1$. *Resp.* $\frac{1}{2}$.

11. Achar a área interna ao círculo $\rho = \operatorname{sen}\theta$ e externa à cardióide $\rho = 1 - \cos\theta$. *Resp.* $1 - \frac{\pi}{4}$.

12. Achar a área interna à lemniscata $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$ e externa ao círculo $\rho = a$. *Resp.* $0{,}684\, a^2$.

13. Achar a área interna à cardióide $\rho = 4(1 + \cos\theta)$ e externa à parábola $\rho(1 - \cos\theta) = 3$. *Resp.* $5{,}504$

14. Achar a área interna ao círculo $\rho = 2a\cos\theta$ e externa ao círculo $\rho = a$. Achar o centróide da área e I_x e I_y.

$$Resp.\ A = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2, \quad \bar{x} = \frac{(8\pi + 3\sqrt{3})\,a}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}.$$

$$I_x = \left(\frac{\pi}{12} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\right)a^4,\ I_y = \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{11\sqrt{3}}{16}\right)a^4$$

15. Achar o centróide da área limitada pela cardióide $\rho = a(1 + \cos\theta)$. *Resp.* $\bar{x} = \frac{5a}{6}$.

16. Achar o centróide da área limitada por um laço da curva $\rho = a\cos 2\theta$. *Resp.* $\bar{x} = \frac{128\sqrt{2}\,a}{105\pi}$.

17. Achar o centróide da área limitada por um laço da curva $\rho = a\cos 3\theta$. *Resp.* $\bar{x} = \frac{81\sqrt{3}\,a}{80\pi}$.

18. Achar I_y para a lemniscata $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$.

Resp. $\frac{A}{48}(3\pi + 8)\,a^2$.

19. Achar I_x para a cardióide $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

20. Achar I_x e I_y para um laço da curva $\rho = a\cos 2\theta$.

21. Prove, por (1), § 254, que

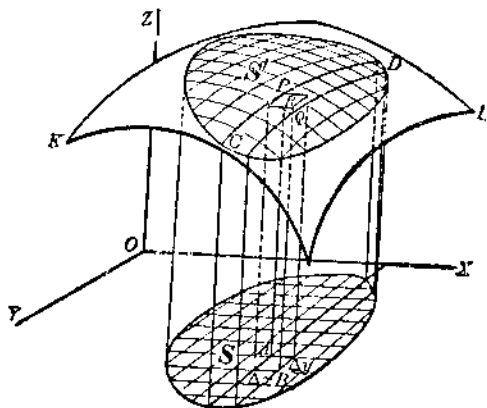
$$\lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \frac{\Delta A}{\rho\Delta\rho\,\Delta\theta} = 1\,,$$

e portanto ΔA difere de $\rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta$ por um infinitésimo de ordem superior (§ 99). Consequentemente, ΔA do primeiro membro de (2), § 254, pode ser substituído por $\rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta$ (A demonstração é omitida).

256. — Método geral para achar as áreas das superfícies curvas. O método dado no § 164 foi aplicado só à area da superfície de um sólido de revolução. Vamos agora dar um método mais geral para o cálculo de áreas curvas. Seja

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

a equação de uma superfície KL, ver figura abaixo, e suponhamos que se quer calcular a área da região S' que esta sobre a superfície.

Indiquemos por S a região do plano XOY que é a projeção ortogonal de S' sôbre XOY. Decomponhamos os intervalos que são projeções sôbre OX e OY da região S em subintervalos de amplitudes Δx e Δy respectivamente. Pelos pontos de decomposição tracemos planos paralelos a YOZ e XOZ respectivamente. Como vimos no § 244, êstes planos formam troncos de prismas (como PB), limitados superiormente por uma porção da superfície (como PQ) e cujas projeções sobre XOY são retângulos de áreas $\Delta x\,\Delta y$ (como AB), os quais são também bases dos prismas.

Consideremos o plano tangente à superfície KL em P, ponto de coordenadas x, y e z. Evidentemente, o mesmo retângulo AB

é a projeção sôbre o plano XOY da porção do plano tangente (PR) que é interceptada pelo prisma PB. Chamando de γ o ângulo que o plano tangente faz com o plano XOY, temos

$$\text{Área } AB = \text{área } PR \cdot \cos\gamma\,,$$

[A área da projeção de uma área plana sobre um segundo plano é igual à área da porção projetada multiplicada pelo coseno do ângulo compreendido entre os planos.]

ou
$$\Delta y\,\Delta x = \text{área } PR \cdot \cos\gamma\,.$$

Ora, γ é igual ao ângulo compreendido entre OZ e uma reta por O perpendicular ao plano tangente. Logo, por (H), § 237, e (2) e (3), § 4, temos

$$\cos\gamma = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Portanto
$$\text{Área } PR = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta y\,\Delta x\,.$$

Este é o elemento de área da região S'. Por definição, a área de S' é o limite duplo abaixo

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta y\,\Delta x\,,$$

sendo o somatório extendido a todas as áreas $\Delta x\,\Delta y$ da região S. Indicando com A a área da superfície S', temos, pois,

$$(I) \qquad A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy\,dx\,,$$

dependendo os limites de integração da projeção sobre o plano XOY da região da superfície curva cuja área queremos calcular. Assim, os limites de integração em (I) são obtidos das curvas limítrofes da região S do plano XOY exatamente do mesmo modo como temos feito nos parágrafos precedentes.

Antes de ser integrada, a expressão

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

deve ser reduzida a uma função só de x e y, usando-se para isso a equação da superfície sôbre a qual está a região cuja área se quer calcular.

Se for mais cômodo projetar a área sobre o plano XOZ, usaremos a fórmula

$$(J) \qquad A = \iint\limits_S \left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\, dx\,,$$

onde os limites são obtidos da fronteira da região S, que é agora a projeção da área pedida sobre o plano XOZ.

Semelhantemente, podemos usar

$$(K) \qquad A = \iint\limits_S \left[1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\, dy\,,$$

sendo os limites obtidos da projeção da área sobre o plano YOZ.

Em alguns problemas pede-se a área da porção de uma superfície que é interceptada por uma segunda superfície. Nestes casos, as derivadas parciais que intervem na fórmula são as que se obtém da equação da superfície cuja área parcial é procurada.

Como os limites de integração são obtidos da projeção da área que se procura sobre um dos planos coordenados, deve-se ter presente que

Para achar a projeção da área procurada sobre o plano XOY, elimina-se z entre as equações das superfícies cujas interseções formam a fronteira da área.

Anàlogamente, elimina-se y para achar a projeção sobre o plano XOZ e x para achar a projeção sobre o plano YOZ.

O cálculo da área de uma superfície curva mostra uma outra aplicação da integração dupla de uma função extendida a uma

dada região. Realmente, para achar a área de uma superfície curva $z = f(x, y)$, (I) mostra que se deve integrar a função

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

sôbre a projeção da superfície sobre o plano XOY.

Como se observou acima, (J) e (K) devem se reduzir a

$$\iint f(x, z)\, dz\, dx \quad \text{e} \quad \iint f(y, z)\, dy\, dz\,,$$

respectivamente, mediante o uso conveniente da equação da superfície sôbre a qual está a superfície curva cuja área se quer calcular.

Exemplo ilustrativo 1. Achar a área da superfície da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

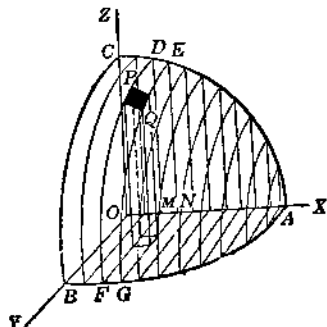
por integração dupla.

SOLUÇÃO. Seja ABC, da figura abaixo, um oitavo da superfície da esfera. Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2 - y^2}.$$

A projeção da área ABC sôbre o plano XOY é AOB, uma região limitada por $x = 0\ (= OB)$; $y = 0\ (= OA)$; $x^2 + y^2 = r^2\ (= BA)$.

Integrando primeiro em relação a y, somamos todos os elementos ao longo de uma faixa (como $DEFG$) que é projetada sôbre XOY também numa faixa (como $MNGF$), isto é, os limites para y são 0 e $MF\ (= \sqrt{r^2 - x^2})$. Integrando depois em relação a x, somamos todas as faixas que compõem a superfície ABC, isto é, os limites para x são zero e $OA\ (= r)$. Substituindo em (I), vem

$$\frac{A}{8} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r\,dy\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{\pi r^2}{2},$$

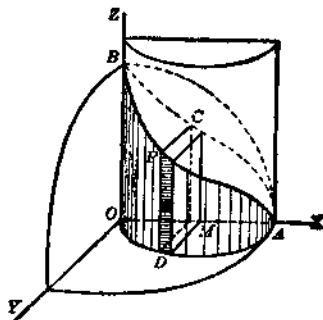
$$A = 4\pi r^2. \quad \textit{Resp.}$$

Exemplo ilustrativo 2. O centro de uma esfera de raio r está sobre a superfície de um cilindro reto, cuja base tem raio igual a $r/2$. Achar a área da superfície do cilindro interceptada pela esfera.

Solução. Tomando o centro da esfera como origem, uma geratriz do cilindro como eixo dos zz e um diâmetro de uma seção reta do cilindro para eixo dos xx, a equação da esfera é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

e a do cilindro é $x^2 + y^2 = rx$.

Um quarto da superfície cilíndrica pedida é dado por $ODAPB$. Como a projeção desta área sôbre o plano XOY é o arco de círculo ODA, não há no plano XOY área alguma da qual se possa tirar os limites de integração; logo, devemos projetar a área sobre outro plano coordenado, digamos sobre XOZ. Neste caso a região sobre a qual devemos integrar é $OACB$, a qual é limitada por $z = 0\ (= OA)$, $x = 0$ $(= OB)$ e $z^2 + rx = r^2\ (= ACB)$, sendo a última equação obtida pela eliminação de y entre as equações das duas superfícies.

Integrando primeiro em relação a z, isto é, somando todos os elementos de uma faixa vertical (como PD), os limites para z são zero e $\sqrt{r^2 - rx}$. Integrando depois em relação a x, isto é, somando todas as faixas, os limites para x são 0 e r.

Como a superfície cuja área é procurada está sobre o cilindro, as derivadas parciais a serem substituídas na fórmula (J) devem provir da equação do cilindro. Temos, pois,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - 2x}{2y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

Substituindo em (J),

$$\frac{A}{4} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \left[1 + \left(\frac{r - 2x}{2y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\, dx.$$

Substituindo o valor de y em termos de x que se obtém da equação do cilindro, vem

$$A = 2r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \frac{dz\, dx}{\sqrt{rx - x^2}} = 2r \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{rx - x^2}}\, dx = 2r \int_0^r \sqrt{\frac{r}{x}}\, dx = 4r^2.$$

PROBLEMAS

1. No exemplo precedente achar a superfície da esfera interceptada pelo cilindro. *Resp.* $4r \int_0^r \int_0^{\sqrt{rx - x^2}} \frac{dy\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} = 2(\pi - 2)r^2.$

2. Os eixos de dois cilindros circulares retos cortam-se ortogonalmente. Sabendo que o raio da base de cada um dos cilindros é r, achar a área da superfície interceptada sobre um dos cilindros pêlo outro.

Sugestão. Tome $x^2 + z^2 = r^2$ e $x^2 + y^2 = r^2$ como equações dos cilindros.

$$Resp.\quad 8\,r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 8\,r^2.$$

3. Achar a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,ay$ interceptada por uma folha do cone $x^2 + z^2 = y^2$. *Resp.* $2\,\pi\,a^2$.

4. Achar a área da porção do cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ compreendida entre o plano $z = mx$ e o plano XOY. *Resp.* $4\,r^2 m$.

5. Achar a área da porção do plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ que é interceptada pelos planos coordenados. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$.

6. Achar a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2\,ay$ que está dentro do parabolóide $by = x^2 + z^2$. *Resp.* $2\,\pi\,ab$.

7. No exemplo precedente achar a área da porção do parabolóide que está dentro da esfera.

8. Achar a área da superfície do parabolóide $y^2 + z^2 = 4\,ax$ interceptada pelo cilindro parabólico $y^2 = ax$ e o plano $x = 3\,a$.

Resp. $\frac{56}{9}\,\pi\,a^2$.

9. No problema precedente achar a área da superfície do cilindro interceptada pelo parabolóide e o plano.

Resp. $(13\sqrt{13} - 1)\,\frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

10. Achar a superfície do cilindro $z^2 + (x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)^2 = r^2$ que está situada no quadrante de coordenadas positivas.

Sugestão. O eixo deste cilindro é a reta $z = 0$, $x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = 0$ e o raio da base é r.

Resp. $\frac{r^2}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$.

11. Achar a área da porção da superfície do cilindro $y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ limitada por uma curva cuja projeção sobre o plano XOY é $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Resp.* $\frac{12}{5}\,a^2$.

12. Achar, por integração, a area da porção da superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ que está compreendida entre os planos paralelos $x = -8$ e $x = 6$.

257. — Volumes obtidos por integração tripla. Em muitos casos o volume de um sólido limitado por superfícies, cujas equações são dadas, pode ser calculado mediante três sucessivas integrações, sendo o processo uma mera extensão do método empregado nos parágrafos precedentes deste capítulo (ver também § 247).

Suponhamos que o sólido em questão seja dividido por planos paralelos aos planos coordenados em paralelepípedos retângulos tendo dimensões Δx, Δy e Δz. O volume de um destes paralelepípedos é

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

e nós o escolhemos como elemento de volume.

Somemos todos esses volumes que estejam contidos no interior do sólido R limitado pelas dadas superfícies, somando primeiro todos os elementos de uma coluna paralela a um dos eixos coordenados e somando depois todas as colunas que estejam numa faixa paralela a um dos planos coordenados que contém o eixo coordenado acima mencionado e finalmente somando todas as faixas contidas no sólido em questão, ver figura na pág. seguinte. O volume V do sólido será o limite desta soma tripla quando Δx, Δy e Δz tendem a zero, isto é,

$$(1) \qquad V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum\sum_R\sum \Delta z \, \Delta y \, \Delta x \, ,$$

sendo o somatório extendido a toda a região R ocupada pelo sólido. Este limite é indicado por

$$(L) \qquad V = \iiint_R dz \, dy \, dx \, .$$

Por extensão do princípio do § 245, dizemos que (L) é a integral tripla da função $f(x, y, z) = 1$, extendida à região R.

Muitos problemas requerem a integração de uma função de x, y e z sobre uma região R. Se $f(x, y, z)$ é a função, indica-se essa operação por

$$(2) \qquad \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx\,,$$

a qual é, naturalmente, o limite de uma soma tripla análoga às somas duplas que já examinamos. Nos tratados mais avançados mostra-se que a integral tripla (2) é calculada por integrações sucessivas, sendo os limites de integração obtidos de modo análogo ao usado para (L).

Exemplos simples de (2) são as fórmulas para o centróide $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ (centro de gravidade) de um sólido homogêneo:

$$V\bar{x} = \iiint x\, dx\, dy\, dz,\ V\bar{y} = \iiint y\, dx\, dy\, dz,\ V\bar{z} = \iiint z\, dx\, dy\, dz\,.$$

Estas fórmulas são obtidas raciocinando como no § 249, usando momentos de volume. O centróide esta em todo plano de simetria para o sólido.

Exemplo ilustrativo 1. Achar o volume da porção do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

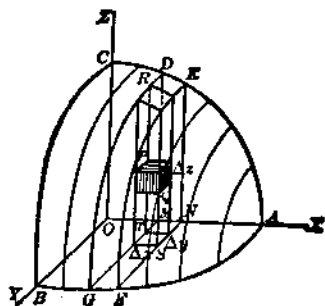
que está no primeiro oitante.

Solução. Seja $OABC$ a porção do elipsóide cujo volume se quer. As equações das superfícies limítrofes são

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ (= ABC),$$

$$(4) \qquad z = 0\ (= OAB),$$

$$(5) \qquad y = 0\ (= OAC),$$

$$(6) \qquad x = 0\ (= OBC).$$

PQ é um elemento, sendo um dos paralelepípedos retangulares com dimensões Δx, Δy e Δz nos quais a região foi dividida por planos paralelos aos planos coordenados.

Integrando primeiro em relação a z, somamos todos os elementos de uma coluna (como RS), sendo os limites, para z, 0 (por (4)) e $TR = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ (por (3), resolvendo em relação a z).

Integrando depois em relação a y, somamos todas as colunas de uma faixa (como $DEMNGF$), sendo 0 (por (5)) e $MG = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ (pela equação da curva AGB, precisamente, pela solução de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em relação a y), os limites para y. Finalmente, integrando em relação a x, somamos todas as faixas compreendidas na região $OABC$, sendo, pois, 0 (por (6)) e $OA = a$ os limites para x.

Portanto
$$V = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\,dy\,dx$$

$$= \frac{\pi cb}{4a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{\pi abc}{6}.$$

Logo, o volume de todo o elipsóide é $\frac{4\pi abc}{3}$.

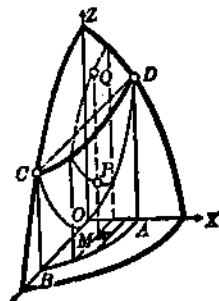
Exemplo ilustrativo 2. Achar o volume do sólido limitado pelas superfícies

(7) $$z = 4 - x^2 - \tfrac{1}{4}y^2,$$

(8) $$z = 3x^2 + \tfrac{1}{4}y^2.$$

SOLUÇÃO. As superfícies são os parabolóides elíticos da figura. Eliminando z entre (7) e (8), achamos

(9) $$4x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = 4,$$

que é a equação do cilindro $ABCD$ (ver figura) passando pela curva interseção de (7) e (8) e cujas geratrizes são paralelas a OZ.

Temos

(10) $$V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2(1-x^2)}} \int_{3x^2+\frac{1}{4}y^2}^{4-x^2-\frac{1}{4}y^2} dz\,dy\,dx.$$

Obtém-se os limites como segue: integrando em relação a z, somamos os elementos de volume $dxdydz$ de uma coluna de base $dx\,dy$ dêsde a superfície (8) até a superfície (7) (MP a MQ na figura). Os limites para z, são, pois, dados pelos segundos membros daquelas equações. Temos, assim,

$$(11) \qquad V = 4 \int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2(1-x^2)}} (4 - 4x^2 - \tfrac{1}{2}y^2)\, dy\, dx\,.$$

Os limites nesta integral dupla são os da região OAB, porção da área da base do cilindro (9) que está no primeiro quadrante. Desenvolvendo (11), achamos $V = 4\pi\sqrt{2} = 17{,}77$ unidades cúbicas. *Resp.*

O problema dado pode ser tal que a primeira integração deva ser feita em relação a x ou y e não em relação a z, como acima. Os limites devem então ser determinados de acôrdo com a análise precedente.

258. — Volumes, usando coordenadas cilíndricas. Em muitos problemas de integração o trabalho é simplificado com o uso das coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), definidas em (7), § 4. As equações em coordenadas cilíndricas das superfícies limítrofes podem muitas vezes ser obtidas diretamente das definições dessas superfícies. Em qualquer caso, se as superfícies são dadas por equações retangulares, podemos escreve-las em coordenadas cilíndricas, fazendo uso das substituições

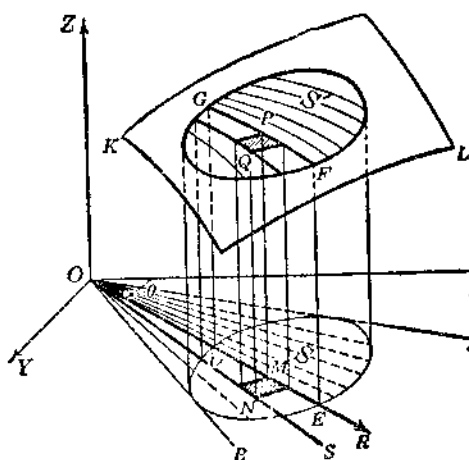
$$(1) \qquad x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta\,.$$

As coordenadas cilíndricas são particularmente úteis quando uma superfície limítrofe é de revolução. Realmente, a equação de uma tal superfície é, quando o eixo OZ é o de revolução, $z = f(\rho)$, isto é, neste caso não figura a coordenada θ.

Volume sob uma superfície. Seja

$$(2) \qquad z = F(\rho, \theta)$$

a equação, em coordenadas cilíndricas, de uma superfície, como KL da figura. Queremos achar o volume do sólido limitado supe-

riormente por esta superfície, inferiormente pelo plano XOY e lateralmente pela superfície de um cilindro cuja seção reta pelo plano XOY é a região S. Este cilindro intercepta sobre a superfície (2) a região S'.

Dividamos o sólido em elementos de volume como segue: decomponhamos S em elementos de área ΔA traçando semi-retas da origem O e arcos de circunferência com centro em O, como no § 254. Pelas semi-retas e OZ tracemos planos, pelos arcos de círculo internos a S, superfícies cilíndricas de revolução em torno de OZ. Procedendo assim, dividimos o sólido em colunas como $MNPQ$, onde área $MN = \Delta A$ e $MP = z$. O elemento de volume é então um prisma reto com base ΔA e altura z. Portanto

$$\Delta V = z\,\Delta A. \tag{3}$$

Fazendo-se a soma de todos os prismas (3) cujas bases são internas a S e passando depois esta soma ao limite quando o número de semiretas e arcos circulares cresce indefinidamente de modo tal que $\Delta\rho \to 0$ e $\Delta\theta \to 0$, obtemos o volume V do sólido. Portanto

$$V = \lim_{\substack{\Delta\rho\to 0\\ \Delta\theta\to 0}} \sum\sum z\Delta A. \tag{4}$$

Vamos mostrar agora que o limite (4) pode ser obtido com integração sucessiva (confronte § 244). Para isto vamos achar o volume aproximado de uma parte do sólido compreendido entre dois planos radiais como ROZ e SOZ e depois tomar o limite da soma de tôdas estas partes.

Seja $DEFG$ a seção do sólido no plano ROZ. Os valores de z ao longo da curva GPF são dados por (2) quando θ (= ângulo XOR) é mantido fixo. No plano ROZ tomemos OR e OZ como

eixos retangulares e (ρ, z) como coordenadas. Seja $(\overline{\rho}, \overline{z})$ o centróide da área $DEFG$. Então, por (2) e (3), § 177,

$$\overline{\rho} \cdot \text{área } DEFG = \int_{OD}^{OE} \rho z \, d\rho = \int_{OD}^{OE} \rho F(\rho, \theta) \, d\rho \, .$$

O intervalo de integração é uma função de θ.

Façamos a área $DEFG$ girar em torno de OZ. Pelo § 250, o volume do sólido de revolução assim gerado é $2\pi \overline{\rho}$. área $DEFG$. Os planos ROZ e SOZ cortam uma parte deste sólido de revolução cujo volume é $\Delta\theta \, \overline{\rho}$. área $DEFG$, pois ângulo $ROS = \Delta\theta$ (radianos). Portanto

$$\text{(5)} \qquad \Delta\theta \int_{OD}^{OE} \rho \, F(p, \theta) \, d\rho$$

é igual, aproximadamente, ao volume da parte do sólido compreendida entre os planos ROZ e SOZ. O limite da soma das partes (5) quando $\Delta\theta \to 0$ é o volume procurado. Tem-se pois

$$\text{(6)} \qquad V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho, \theta) \, \rho \, d\rho \, d\theta,$$

onde $\alpha =$ âng. XOA, $\beta =$ âng.XOB, $\rho_1 = OD = f_1(\theta)$, $\rho_2 = OE = f_2(\theta)$, valores a serem achados das equações polares das curvas que limitam S.

O elemento da integral em (6), precisamente,

$$F(\rho, \theta) \, \rho \, d\rho \, d\theta = z\rho \, d\rho \, d\theta \, ,$$

pode ser tomado como volume de um prisma reto de altura z e base de área $\rho \, d\rho \, d\theta$. Assim, ΔA em (3) é substituído por $\rho \, \Delta\rho \, \Delta\theta$, como no § 254.

Temos pois a fórmula*

$$(M) \qquad V = \iint\limits_{S} z\rho \, d\rho \, d\theta = \iint\limits_{S} F(\rho, \theta) \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

* A ordem de integração é indiferente. Omitimos a demonstração.

para o cálculo do volume sob a superfície (2), sendo os limites obtidos como no § 254 para o cálculo da área da região S.

De (M) e (4) podemos deduzir (2), § 254.

Exemplo ilustrativo 1. Mostrar que o volume do sólido limitado pelo elipsóide de revolução $b^2(x^2+y^2)+a^2z^2=a^2b^2$ e a superfície cilíndrica x^2+ $+y^2-ax=0$ é dado por

$$(7)\qquad V=4\frac{a}{b}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\rho d\rho d\theta.$$

Calcular esta integral.

Solução. Por (1), a equação, em coordenadas cilíndricas, do elipsóide é $b^2\rho^2+a^2z^2=a^2b^2$. Logo

$$(8)\qquad z=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

A equação polar do círculo x^2+y^2- $-ax=0$ no plano XY, limitando S é, por (1),

$$(9)\qquad \rho=a\cos\theta.$$

Para o semi-círculo os limites para ρ são zero e $a\cos\theta$, quando se mantém fixo θ, e para θ, zero e $\frac{1}{2}\pi$. Substituindo em (M) o valor de z dado por (8) e os limites acima, obtemos (7). Integrando,

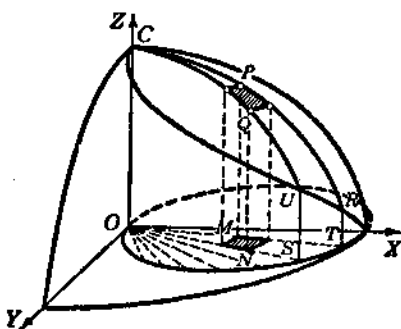
$$V=\frac{2}{9}a^2b\,(3\pi-4)=1{,}206\,a^2b.$$

Volume por integração tripla. O elemento de volume ΔV será agora um *elemento* do prisma reto usado acima em (3), isto é, um prisma reto com base ΔA e altura Δz. Decompõe-se o sólido em tais elementos mediante planos radiais e superfícies cilíndricas como no princípio dêste parágrafo, e mais planos paralelos ao plano XOY à distância Δz um do outro. Temos agora

$$(10)\qquad \Delta V=\Delta z\,\Delta A\,.$$

Somando e tomando o limite da soma quando $\Delta z\to 0$, $\Delta\rho\to 0$ e $\Delta\theta\to 0$, temos

$$(N)\qquad V=\iiint\rho\,dz\,d\rho\,d\theta,$$

pois ΔA pode ser substituído por $\rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta$, como anteriormente.

As fórmulas (3) do § 257 para o centróide tornam-se pois

$$V\bar{x} = \iiint \rho^2 \cos\theta \, dz \, d\rho \, d\theta, \quad V\bar{y} = \iiint \rho^2 \operatorname{sen}\theta \, dz \, d\rho \, d\theta,$$

$$V\,\bar{z} = \iiint \rho z \, dz \, d\rho \, d\theta\,,$$

quando se usam coordenadas cilíndricas.

Exemplo ilustrativo 2. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera

(11) $x^2 + y^2 + z^2 = 8$

e inferiormente pela superfície do parabolóide de revolução

(12) $x^2 + y^2 = 2z$.

SOLUÇÃO. A figura mostra a esfera e o parabolóide no primeiro oitante. A curva interseção AB está no plano $z = 2$. Sua projeção DE sobre o plano XOY é o círculo

(13) $x^2 + y^2 = 4$.

As equações em coordenadas cilíndricas são, por (1),

(14) $\rho^2 + z^2 = 8$ (a esfera (11));

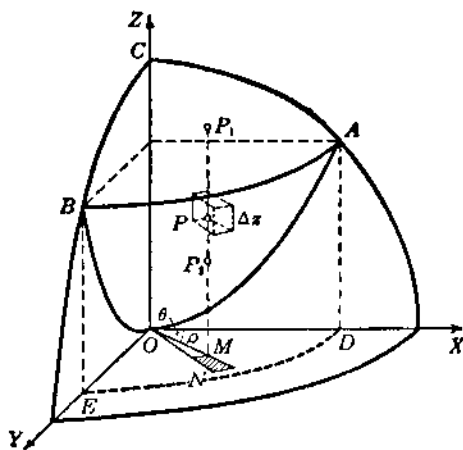
(15) $\rho^2 = 2z$ (o parabolóide (12)):

(16) $\rho = 2$ (o círculo (13).

Um elemento de área ΔA no círculo (16) está traçado em $M(\rho, \theta)$ na figura. Um elemento de volume ΔV está traçado em $P(\rho, \theta, z)$.

Temos, por (N),

$$(17) \qquad V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{\sqrt{8-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta.$$

Obtém-se os limites como segue: integrando em relação a z (mantendo fixos ρ e θ), somamos os elementos de volume (10) de uma coluna da superfície (15) até a superfície (14) (MP_2 a MP_1 na figura). De (15) vem $z = MP_2 = \frac{1}{2}\rho^2$; de (14), $z = MP_1 = \sqrt{8 - \rho^2}$. Estes são os limites para z. Os limites para ρ e θ são os relativos à área do círculo (16). Integrando em relação a ρ somamos

as colunas da faixa compreendida entre o plano passando por OZ e OM e o plano passando por OZ e ON. A última integração soma estas faixas.

Integrando em (17),

$$V = \frac{4}{3}\pi(8\sqrt{2} - 7) = 18{,}1\,. \quad \textit{Resp.}$$

Nos problemas seguintes, as fórmulas (M) e (N) devem ser usadas quando as equações das superfícies limítrofes estão em coordenadas cilíndricas. Se as equações em coordenadas retangulares forem necessárias para o traçado da figura, elas podem ser obtidas com as transformações

$$(18) \qquad \rho^2 = x^2 + y^2\,, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,,$$

às quais pode-se acrescentar

$$(19) \qquad \operatorname{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}\,.$$

PROBLEMAS

1. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela superfície $x^2 + z = 4$, inferiormente pelo plano $x + z = 2$ e compreendido entre os planos $y = 0$, $y = 3$.

$$\textit{Res}\,. \quad V = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_{2-x}^{4-x^2} dz\,dx\,dy = 13\tfrac{1}{2}$$

2. Desenvolva o Exemplo Ilustrativo 2, § 247, usando coordenadas cilíndricas. *Resp.* $V = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2a\cos\theta} \frac{\rho^3}{a}\,d\rho\,d\theta = \frac{3}{2}\pi a^3$.

3. Achar o volume do sólido limitado superiormente pelo cilindro $z = 4 - x^2$ e inferiormente pelo parabolóide elítico $z = 3x^2 + y^2$.

$$\textit{Resp.} \quad V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} \int_{3x^2+y^2}^{4-x^2} dz\,dy\,dx = 4\pi.$$

4. Dois planos encontram-se sobre uma reta que contém o diâmetro de uma esfera de raio a. Sabendo que os planos formam um ângulo de α radianos, achar o volume da cunha esférica compreendida entre os planos, usando coordenadas cilíndricas.

Resp. $\frac{2}{3}\alpha\, a^3$.

5. Achar o volume abaixo do plano $z = x$ e acima do parabolóide elítico $z = x^2 + y^2$.

6. Resolva o problema 5 usando coordenadas cilíndricas.

$$Resp.\quad V = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\cos\theta}\int_{\rho^2}^{\rho\cos\theta} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \tfrac{1}{32}\pi$$

7. Achar o volume limitado pela esfera $\rho^2 + z^2 = a^2$ e contido no cilindro $\rho = a\cos\theta$. *Resp.* $\frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

8. Achar o volume acima de $z = 0$, abaixo do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e contido no cilindro $x^2 + y^2 = 2\,ax$, usando coordenadas cilíndricas

Resp. $\frac{32}{9}a^3$.

9. Achar o volume do sólido limitado por $z = x + 1$ e $2\,z = x^2 + y^2$. *Resp.* $\frac{9}{4}\pi$.

10. No problema 3, mostrar que a integração em relação a z dá (sem integração ulterior) $V = 4\,A - 4\,I_y - I_x$, onde A é a área da elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$ e I_x e I_y são momentos de inércia desta elipse (dados em (E), § 252).

11. Achar o volume abaixo do plano $2\,z = 4 + \rho\cos\theta$, acima de $z = 0$ e contido no cilindro $\rho = 2\cos\theta$. *Resp.* $\frac{5}{2}\pi$.

12. Um sólido é limitado pelo parabolóide de revolução $az = \rho^2$ e o plano $z = c$. Achar o centróide. *Resp.* $(0, 0, \frac{2}{3}c)$.

13. Um sólido é limitado pelo hiperbolóide $z^2 - a^2 = \rho^2$ e a fôlha superior do cone $z^2 = 2\,\rho^2$. Achar o volume.

14. Achar o centróide do sólido do Problema 13.

Resp. $(0, 0, \frac{3}{8}a(\sqrt{2} + 1))$.

15. Achar o centróide do sólido do Problema 1.

Resp. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{12}{5})$.

16. Achar o centróide do sólido do Problema 2.

Resp. $(\frac{4}{3}\,a, 0, \frac{10}{9}\,a)$

17. Achar o centróide do sólido do Problema 8.

18. Achar o volume do sólido limitado inferiormente por $z = 0$, superiormente pelo cone $z = a - \rho$ e lateralmente por $\rho = a \cos \theta$.

Resp. $\frac{1}{36} a^3 (9\pi - 16)$

19. Achar o centróide do sólido do problema precedente.

20. Achar o volume do sólido abaixo da superfície esférica $\rho^2 + z^2 = 25$ e acima da fôlha superior da superfície cônica $z = \rho + 1$.

21. Confronte os Exemplos Ilustrativos 3, § 165 e 1, § 257, e deduza (N), § 165, de (L), § 257.

22. Deduza a fórmula (2), § 178, da primeira fórmula (3), § 257.

OUTROS PROBLEMAS

1. Achar o volume do sólido limitado superiormente por $\rho^2 + z^2 = r^2$, inferiormente pelo cone $z = \rho \operatorname{ctg} \phi$ e compreendido entre os planos $\theta = \beta$, $\theta = \beta + \Delta\beta$, sendo ϕ e β ângulos agudos. (O sólido é parte de uma cunha esférica, como $OSQN$ na figura do § 222 quando se trace OQ).

Resp. $\frac{1}{3} r^3 \Delta\beta (1 - \cos \phi)$.

2. Achar (sem integração) o volume limitado pela esfera $\rho^2 + z^2 = r^2$, os cones $z = \rho \operatorname{ctg} \phi$, $z = \rho \operatorname{ctg} (\phi + \Delta\phi)$ e os planos $\theta = \beta$, $\theta = \beta + \Delta\beta$, usando o resultado do problema precedente. (O sólido é como $OP_1\ RQS$ na figura do § 222 quando OR e OQ sejam traçadas). *Resp.* $\frac{2}{3} r^3 \Delta\beta \operatorname{sen} (\phi + \frac{1}{2} \Delta\phi) \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta\phi$.

3. Achar (sem integração) o volume limitado por $z = \rho \operatorname{ctg} \phi$, $z = \rho \operatorname{ctg} (\phi + \Delta\phi)$, $\theta = \beta$, $\theta = \beta + \Delta\beta$, e compreendido entre as esferas $\rho^2 + z^2 = r^2$, $\rho^2 + z^2 = (r + \Delta r)^2$, usando a resposta do Problema 2.

Resp. $2 \Delta\beta \Delta r \operatorname{sen} (\phi + \frac{1}{2} \Delta\phi) \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta\phi (r^2 + r \Delta r + \frac{1}{3} \Delta r^2)$
(O sólido é obtido da figura do § 222 prolongando cada um dos raios OP_1, OR, OQ, OS de uma distância Δr até P_1', R', Q', S' sôbre a esfera $\rho^2 + z^2 = (r + \Delta r)^2$. Os cones interceptam esta esfera nos arcos circulares $P_1' R'$ e $Q'S'$ e os planos nos arcos de círculo máximo $P_1'S'$, $R'Q'$. O sólido tem os vértices $P_1RQS - P_1'R'Q'S'$).

4. O sólido do Problema 3 é o elemento de volume ΔV quando se usam coordenadas esféricas (8), § 4. Substitua β por θ. Então

um vértice P de ΔV tem as coordenadas esféricas (r, ϕ, θ). Prove, pelo Problema 3, que

$$\lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ \Delta \theta \to 0 \\ \Delta \phi \to 0}} \frac{\Delta V}{r^2 \operatorname{sen} \phi \, \Delta r \, \Delta \phi \, \Delta \theta} = 1.$$

Portanto ΔV difere de $r^2 \operatorname{sen} \phi \, \Delta r \, \Delta \phi \, \Delta \theta$ por um infinitésimo de ordem superior (§ 99).

5. No sólido do problema precedente prove que as arestas de ΔV que se encontram num vértice são perpendiculares e que os comprimentos das que se cortam em (r, ϕ, θ) são, respectivamente, Δr, $r\Delta\phi$, $r \operatorname{sen} \phi\Delta\theta$.

6. Descreva os três sistemas de superfícies (esferas, cones, planos) que devem ser traçados para dividir um sólido R em elementos de volume ΔV (Problema 4) quando se usam coordenadas esféricas. Seja (r, ϕ, θ) um ponto de ΔV. Temos

$$\lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ \Delta \theta \to 0 \\ \Delta \phi \to 0}} \sum\sum\sum F(r, \phi, \theta) \, \Delta V = \iiint_R F(r, \phi, \theta) \, r^2 \operatorname{sen} \phi \, dr \, d\phi \, d\theta.$$

No primeiro membro, ΔV pode ser substituído por $r^2 \operatorname{sen} \phi \, \Delta r \, \Delta \phi \, \Delta \theta$ (ver Problema 4), isto é, pelo produto das três arestas mencionadas no Problema 5. O segundo membro é calculado por integração sucessiva. (Omite-se a demonstração).

7. Calcule a integral do problema precedente se $F(r, \phi, \theta) = r$ e R é a esfera $r = 2a \cos \phi$, isto é, $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

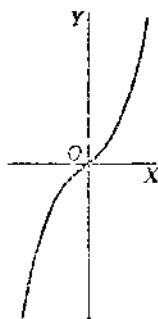
$$\textit{Resp.} \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2a \cos \phi} r^3 \operatorname{sen} \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \tfrac{8}{5} \pi a^4 .$$

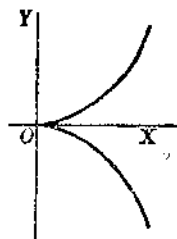
8. Calcule a integral do Problema 6 se $F(r, \phi, \theta) = r^2 \cos \phi$ e R é a região $r = 2a \cos \phi$. *Resp.* $\dfrac{64}{35} \pi a^5$.

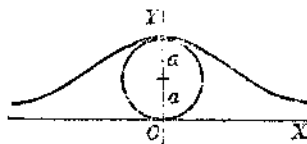
Capítulo XXVI

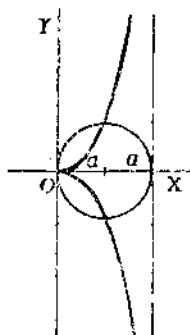
CURVAS DE REFERÊNCIA

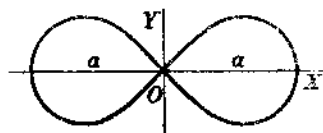
Para a comodidade do leitor damos neste capítulo algumas das curvas mais comuns usadas no texto.

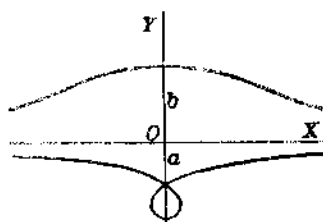
Parábola Cúbica

$y = ax^3$.

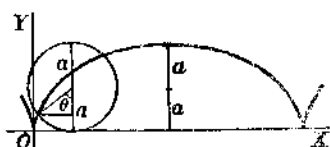
Parábola Semicúbica

$y^2 = ax^3$.

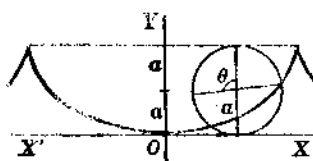
A Versiera de Agnesi

$x^2y = 4\,a^2\,(2\,a - y)$.

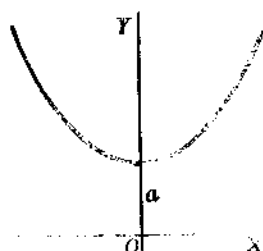
A Cissóide de Diocles

$y^2\,(2\,a - x) = x^3$.

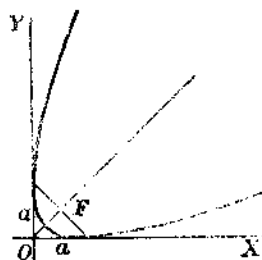
A Lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

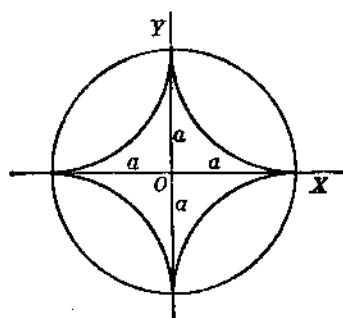
A Conchóide de Nicomedes

$$x^2 y^2 = (y + a)^2 (b^2 - y^2).$$
(Na figura, $b > a$).

Ciclóide, Caso Ordinário

$$x = a \text{ arc vers } \frac{y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$
$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

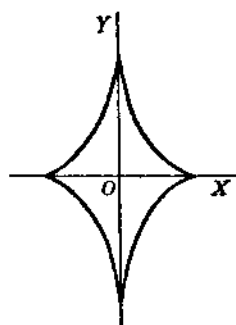
Ciclóide, Vértice na Origem

$$x = a \text{ arc vers } \frac{y}{a} + \sqrt{2ay - y^2}$$
$$\begin{cases} x = a(\theta + \operatorname{sen}\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases}$$

Catenária

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \cosh \frac{x}{a}.$$

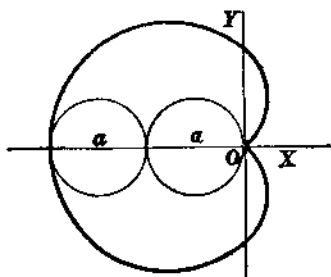
Parábola

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

HIPOCICLÓIDE DE QUATRO CÚSPIDES (ASTRÓIDE)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

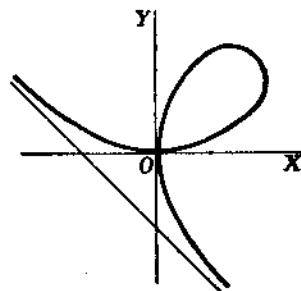
$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \operatorname{sen}^3 \theta. \end{cases}$$

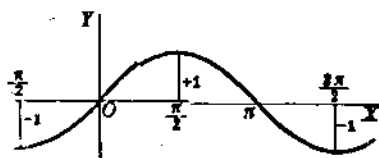
EVOLUTA DA ELIPSE

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

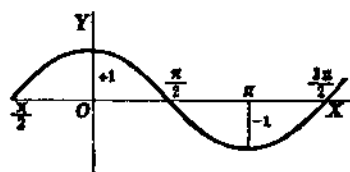
$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = b \operatorname{sen}^3 \theta. \end{cases}$$

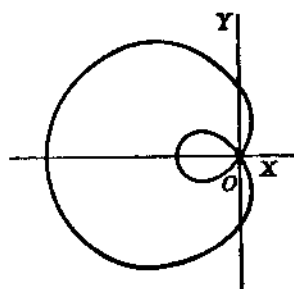
CARDIÓIDE

$$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\rho = a(1 - \cos\theta).$$

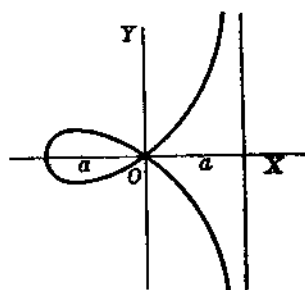
FOLIUM DE DESCARTES

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$$

SENÓIDE

$$y = \operatorname{sen} x.$$

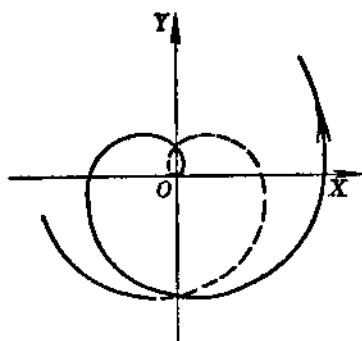
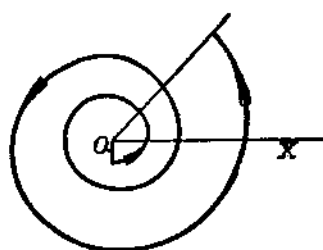
COSSENÓIDE

$$y = \cos x.$$

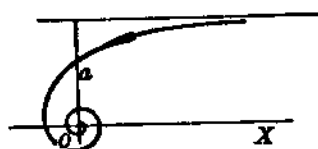
Limaçon

$$\rho = b - a\cos\theta.$$

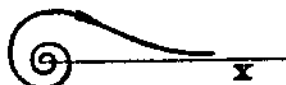
(Na figura, $b < a$).

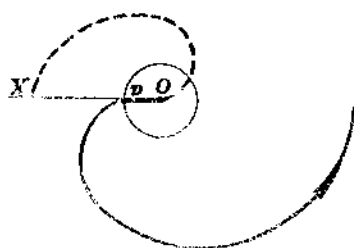
Estrofóide

$$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x}.$$

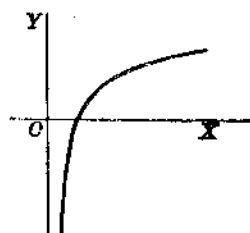
Espiral de Archimedes

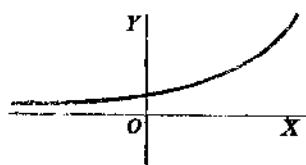
$$\rho = a\theta.$$

Espiral Logarítmica

$$\rho = e^{a\theta}, \text{ ou}$$
$$\log\rho = a\theta.$$

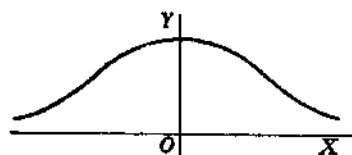
Espiral Hiperbólica

$$\rho\theta = a.$$

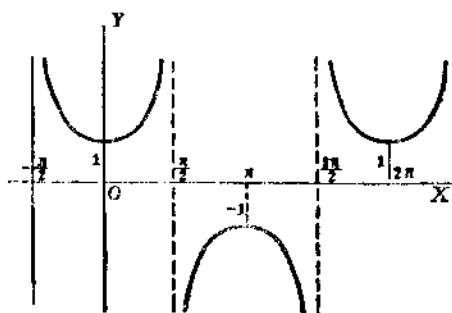
Lituus

$$\rho^2\theta = a^2.$$

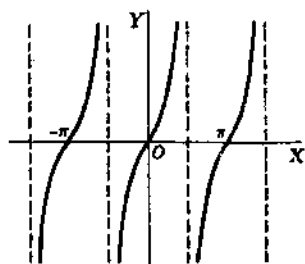
Espiral Parabólica

$(\rho - a)^2 = 4\, ac\theta.$

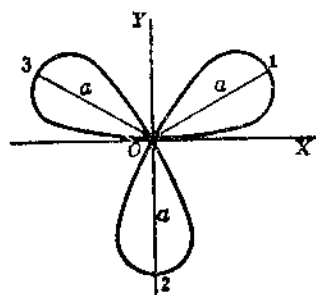
Curva Logarítmica

$y = \log x.$

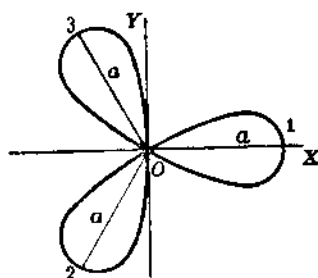
Curva Exponencial

$y = e^x.$

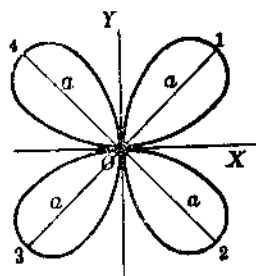
Curva das Probabilidades

$y = e^{-x^2}.$

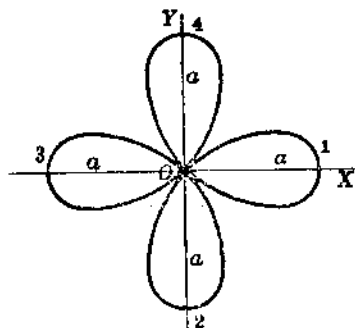
Curva Secante

$y = \sec x.$

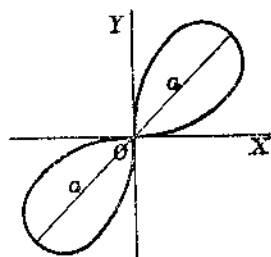
Tangentóide

$y = \operatorname{tg} x.$

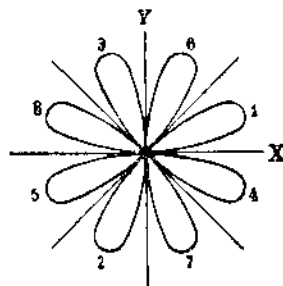
Rosa de Três Folhas

$\rho = a \operatorname{sen} 3\theta.$

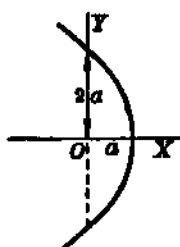
Rosa de Três Folhas

$\rho = a \cos 3\theta.$

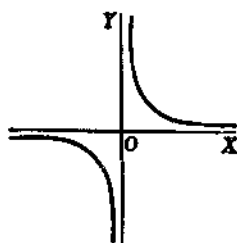
Rosa de Quatro Folhas

$\rho = a \operatorname{sen} 2\theta.$

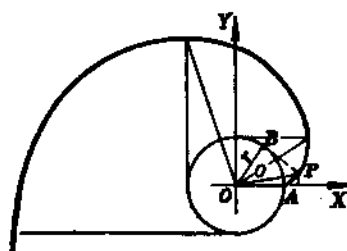
Rosa de Quatro Folhas

$\rho = a \cos 2\theta.$

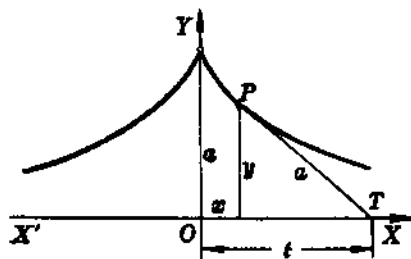
Rosa de Duas Folhas

$\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta.$

Rosa de Oito Folhas

$\rho = a \operatorname{sen} 4\theta.$

Parábola

$$\rho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}.$$

Hipérbole Equilátera

$$xy = a.$$

Involuta de Um Círculo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + r\theta \operatorname{sen}\theta, \\ y = r \operatorname{sen}\theta - r\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Tratória

$$x = a \operatorname{sech}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

$$\begin{cases} x = t - a \operatorname{tgh}\dfrac{t}{a}, \\ y = a \operatorname{sech}\dfrac{t}{a}. \end{cases}$$

Capítulo XXVII

TABELA DE INTEGRAIS

Algumas integrais imediatas

1. $\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C.$

2. $\int a\,du = a\int du.$

3. $\int (du \pm dv \pm dw \pm \ldots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \ldots$

4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$ $\quad (n \neq -1)$

5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$

Funções racionais contendo $a + bu$

Ver também as fórmulas de redução das binomiais 96–104.

6. $\int (a+bu)^n\,du = \frac{(a+bu)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$ $\quad (n \neq -1)$

7. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b}\ln(a+bu) + C.$

8. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}[a + bu - a\ln(a+bu)] + C.$

9. $\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^3}[\frac{1}{2}(a+bu)^2 - 2a(a+bu) + a^2\ln(a+bu)] + C.$

10. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bu} + \ln(a+bu)\right] + C.$

11. $\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln(a+bu)\right] + C.$

12. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bu} + \frac{a}{2(a+bu)^2}\right] + C.$

13. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$

14. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$

15. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$

Funções racionais contendo $a^2 \pm b^2u^2$

16. $\int \frac{du}{a^2+b^2u^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{bu}{a} + C.$

17. $\int \frac{du}{a^2-b^2u^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{a+bu}{a-bu}\right) + C. \qquad (a^2 > b^2u^2)$

$\int \frac{du}{b^2u^2-a^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left(\frac{bu-a}{bu+a}\right) + C. \qquad (a^2 < b^2u^2)$

18. $\int u(a^2 \pm b^2u^2)^n\,du = \frac{(a^2 \pm b^2u^2)^{n+1}}{\pm 2b^2(n+1)} + C. \qquad (n \neq -1)$

19. $\int \frac{u\,du}{a^2 \pm b^2u^2} = \frac{1}{\pm 2b^2}\ln(a^2 \pm b^2u^2) + C.$

20. $\int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{u^{m-1}}{\pm b^2(m-2p+1)(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$

$- \frac{a^2(m-1)}{\pm b^2(m-2p+1)}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p}.$

21. $\int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{u^{m+1}}{2a^2(p-1)(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$

$- \frac{m-2p+3}{2a^2(p-1)}\int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}.$

22. $\int \frac{du}{u(a^2 \pm b^2u^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{u^2}{a^2 \pm b^2u^2}\right) + C.$

23. $\int \frac{du}{u^m(a^2 \pm b^2u^2)^p} = -\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$

$- \frac{\pm b^2(m+2p-3)}{a^2(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-2}(a^2 \pm b^2u^2)^p}.$

24. $$\int \frac{du}{u^m (a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{1}{2\,a^2\,(p-1)\,u^{m-1}\,(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}} + \frac{m+2\,p-3}{2\,a^2\,(p-1)} \int \frac{du}{u^m\,(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}\,.$$

Funções racionais contendo $\sqrt{a+bu}$

A integração pode ser conduzida à integração de uma função racional mediante a substituição $a + bu = v^2$. Ver também as fórmulas de redução das binomiais 96–104.

25. $$\int u \sqrt{a+bu}\,du = -\frac{2\,(2\,a - 3\,bu)\,(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{15\,b^2} + C.$$

26. $$\int u^2 \sqrt{a+bu}\,du = \frac{2\,(8\,a^2 - 12\,abu + 15\,b^2u^2)\,(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{105\,b^3} + C.$$

27. $$\int u^m \sqrt{a+bu}\,du = \frac{2\,u^m\,(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{b\,(2\,m+3)} - \frac{2\,am}{b\,(2\,m+3)} \int u^{m-1} \sqrt{a+bu}\,du.$$

28. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = -\frac{2\,(2\,a - bu)\sqrt{a+bu}}{3\,b^2} + C.$$

29. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2\,(8\,a^2 - 4\,abu + 3\,b^2u^2)\sqrt{a+bu}}{15\,b^3} + C.$$

30. $$\int \frac{u^m du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2\,u^m \sqrt{a+bu}}{b\,(2\,m+1)} - \frac{2\,am}{b\,(2\,m+1)} \int \frac{u^{m-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}\,.$$

31. $$\frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}}\right) + C, \text{ para } a > 0.$$

32. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ para } a < 0$$

33. $$\int \frac{du}{u^m \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a\,(m-1)\,u^{m-1}} - \frac{b\,(2\,m-3)}{2\,a\,(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{a+bu}}\,.$$

34. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}\,.$$

35. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^m} = -\frac{(a+bu)^{\frac{3}{2}}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(2m-5)}{2a(m-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{m-1}}.$$

Funções racionais contendo $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

Neste grupo de fórmulas podemos substituir

$$\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a},$$

$$\ln(u+\sqrt{u^2-a^2}) \text{ por } \cosh^{-1}\frac{u}{a},$$

$$\ln\left(\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{u}.$$

36. $$\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

37. $$\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \frac{u(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du. \quad (n \neq -1)$$

38. $$\int u(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C. \qquad (n \neq -2)$$

39. $$\int u^m (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \frac{u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} - \frac{\pm a^2(m-1)}{n+m+1}\int u^{m-2}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du.$$

40. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = \ln(u+\sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

41. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\pm a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$$

42. $$\int \frac{u\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{1-\frac{n}{2}}}{2-n} + C.$$

43. $$\int \frac{u^2\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C.$$

44. $$\int \frac{u^2\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C.$$

45. $$\int \frac{u^m\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m-1}}{(m-n+1)(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{\pm a^2(m-1)}{m-n+1}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

46. $$\int \frac{u^m\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{\pm a^2(n-2)(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{\pm a^2(n-2)}\int \frac{u^m\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

47. $$\int \frac{du}{u(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C.$$

48. $$\int \frac{du}{u(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{a}\,\text{arc sec}\,\frac{u}{a} + C.$$

49. $$\int \frac{du}{u^2(u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C.$$

50. $$\int \frac{du}{u^3(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C.$$

51. $$\int \frac{du}{u^3(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{2a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\,\text{arc sec}\,\frac{u}{a} + C.$$

52. $$\int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{\pm a^2(m-1)\,u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m+n-3}{\pm a^2(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-2}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

53. $$\int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\pm a^2(n-2)\,u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{\pm a^2(n-2)}\int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

54. $$\int \frac{(u^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}\,du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C.$$

55. $$\int \frac{(u^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\,du}{u} = \sqrt{u^2 - a^2} - a \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{a} + C.$$

56. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{1}{2}}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\,(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

57. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = -\frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{\pm a^2\,(m-1)\,u^{m-1}} -$$
$$- \frac{m-n-3}{\pm a^2(m-1)} \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^{m-2}}.$$

58. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)\,u^{m-1}} +$$
$$+ \frac{\pm a^2 n}{n-m+1} \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du}{u^m}.$$

Funções racionais contendo $\sqrt{a^2 - u^2}$

59. $$\int (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C.$$

60. $$\int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \frac{u\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} +$$
$$+ \frac{a^2 n}{n+1} \int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du. \qquad (n \neq -1)$$

61. $$\int u\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du = -\frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C. \qquad (n \neq -2)$$

62. $$\int u^m\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du = -\frac{u^{m-1}\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} +$$
$$+ \frac{a^2(m-1)}{n+m+1} \int u^{m-2}\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du.$$

63. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{a} + C.$$

64. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C.$$

65. $$\int \frac{u\,du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(a^2 - u^2)^{1-\frac{n}{2}}}{n-2} + C.$$

66. $$\int \frac{u^2\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{u}{a} + C.$$

67. $$\int \frac{u^2\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} - \text{arc sen}\,\frac{u}{a} + C.$$

68. $$\int \frac{u^m du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{u^{m-1}}{(m-n+1)\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{a^2(m-1)}{m-n+1}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

69. $$\int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{a^2(n-2)\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{a^2(n-2)}\int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

70. $$\int \frac{du}{u\,(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C.$$

71. $$\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C.$$

72. $$\int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2\,a^2u^2} - \frac{1}{2\,a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2\,a^2u^2} - \frac{1}{2\,a^3}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C.$$

73. $$\int \frac{du}{u^m\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{a^2(m-1)\,u^{m-1}\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2\,(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-2}\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}$$

74. $$\int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{a^2\,(n-2)\,u^{m-1}\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2\,(n-2)}\int \frac{du}{u^m\,(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

75. $$\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\, du}{u} = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right) + C =$$
$$= \sqrt{a^2 - u^2} - a \cosh^{-1} \frac{a}{u} + C.$$

76. $$\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\, du}{u^2} = - \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \text{arc sen}\, \frac{u}{a} + C.$$

77. $$\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = - \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m - 1)\, u^{m-1}} +$$
$$+ \frac{m - n - 3}{a^2(m - 1)} \int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^{m-2}}.$$

78. $$\int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} du}{u^m} = \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}{(n - m + 1)\, u^{m-1}} +$$
$$+ \frac{a^2 n}{n - m + 1} \int \frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1} du}{u^m}.$$

Funções racionais contendo $\sqrt{2\,au \pm u^2}$

As fórmulas de redução das binomiais 96-104 podem ser apli cadas pondo-se: $\sqrt{2\,au \pm u^2} = u^{\frac{1}{2}}\,(2\,a \pm u)^{\frac{1}{2}}$.

79. $$\int \sqrt{2\,au - u^2}\, du = \frac{u - a}{2} \sqrt{2\,au - u^2} +$$
$$+ \frac{a^2}{2} \text{arc cos} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C.$$

80. $$\int u \sqrt{2\,au - u^2}\, du = - \frac{3\,a^2 + au - 2\,u^2}{6} \sqrt{2\,au - u^2} +$$
$$+ \frac{a^3}{2} \text{arc cos} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C.$$

81. $$\int u^m \sqrt{2\,au - u^2}\, du = - \frac{u^{m-1}\,(2\,au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{m + 2} +$$
$$+ \frac{a\,(2\,m + 1)}{m + 2} \int u^{m-1} \sqrt{2\,au - u^2}\, du.$$

82. $$\int \frac{\sqrt{2\,au - u^2}\, du}{u} = \sqrt{2\,au - u^2} + a\, \text{arc cos} \left(1 - \frac{u}{a} \right) + C.$$

83. $$\int \frac{\sqrt{2\,au - u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2\,au - u^2}}{u} - \operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

84. $$\int \frac{\sqrt{2\,au - u^2}\,du}{u^3} = -\frac{(2\,au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{3\,au^3} + C.$$

85. $$\int \frac{\sqrt{2\,au - u^2}\,du}{u^m} = -\frac{(2\,au - u^2)^{\frac{3}{2}}}{a\,(2\,m - 3)\,u^m} + \frac{m - 3}{a\,(2\,m - 3)} \int \frac{\sqrt{2\,au - u^2}\,du}{u^{m-1}}.$$

86. $$\int \frac{du}{\sqrt{2\,au - u^2}} = \operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

87. $$\int \frac{du}{\sqrt{2\,au + u^2}} = \ln\,(u + a + \sqrt{2\,au + u^2}) + C.$$

88. $$\int F\,(u, \sqrt{2\,au + u^2})\,du = \int F\,(z - a,\ \sqrt{z^2 - a^2})\,dz,$$

onde $z = u + a$.

89. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{2\,au - u^2}} = -\sqrt{2\,au - u^2} + a\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

90. $$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2\,au - u^2}} = -\frac{(u + 3\,a)\sqrt{2\,au - u^2}}{2} + \frac{3\,a^2}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{u}{a}\right) + C.$$

91. $$\int \frac{u^m\,du}{\sqrt{2\,au - u^2}} = -\frac{u^{m-1}\sqrt{2\,au - u^2}}{m} + \frac{a\,(2\,m - 1)}{m} \int \frac{u^{m-1}\,du}{\sqrt{2\,au - u^2}}.$$

92. $$\int \frac{du}{u\sqrt{2\,au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2\,au - u^2}}{au} + C.$$

93. $$\int \frac{du}{u^m\sqrt{2\,au - u^2}} = -\frac{\sqrt{2\,au - u^2}}{a(2\,m - 1)\,u^m} + \frac{m - 1}{a\,(2\,m - 1)} \int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{2\,au - u^2}}.$$

94. $$\int \frac{du}{(2\,au - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u - a}{a^2 \sqrt{2\,au - u^2}} + C.$$

95. $$\int \frac{u\,du}{(2\,au - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a\sqrt{2\,au - u^2}} + C.$$

Fórmulas de redução das binomiais

96. $$\int u^m (a + bu^q)^p\,du = \frac{u^{m-q+1}(a + bu^q)^{p+1}}{b(pq + m + 1)} - \frac{a\,(m - q + 1)}{b\,(pq + m + 1)} \int u^{m-q} (a + bu^q)^p\,du$$

97. $$\int u^m (a + bu^q)^p\,du = \frac{u^{m+1}(a + bu^q)^p}{pq + m + 1} + \frac{apq}{pq + m + 1} \int u^m (a + bu^q)^{p-1}\,du.$$

98. $$\int \frac{du}{u^m (a + bu^q)^p} = -\frac{1}{a\,(m - 1) u^{m-1} (a + bu^q)^{p-1}} - \frac{b\,(m - q + pq - 1)}{a\,(m - 1)} \int \frac{du}{u^{m-q} (a + bu^q)^p}.$$

99. $$\int \frac{du}{u^m (a + bu^q)^p} = \frac{1}{aq\,(p - 1)\,u^{m-1} (a + bu^q)^{p-1}} + \frac{m - q + pq - 1}{aq\,(p - 1)} \int \frac{du}{u^m (a + bu^q)^{p-1}}.$$

100. $$\int \frac{du}{u\,(a + bu^q)} = \frac{1}{aq} \ln\left(\frac{u^q}{a + bu^q}\right) + C.$$

101. $$\int \frac{(a + bu^q)^p\,du}{u^m} = -\frac{(a + bu^q)^{p+1}}{a\,(m - 1)\,u^{m-1}} - \frac{b\,(m - q - pq - 1)}{a\,(m - 1)} \int \frac{(a + bu^q)^p\,du}{u^{m-q}}.$$

102. $$\int \frac{(a + bu^q)^p\,du}{u^m} = \frac{(a + bu^q)^p}{(pq - m + 1)\,u^{m-1}} + \frac{apq}{pq - m + 1} \int \frac{(a + bu^q)^{p-1}\,du}{u^m}.$$

103. $$\int \frac{u^m\,du}{(a+bu^q)^p} = \frac{u^{m-q+1}}{b\,(m-pq+1)\,(a+bu^q)^{p-1}} - \\ - \frac{a\,(m-q+1)}{b\,(m-pq+1)}\int \frac{u^{m-q}\,du}{(a+bu^q)^p}.$$

104. $$\int \frac{u^m\,du}{(a+bu^q)^p} = \frac{u^{m+1}}{aq\,(p-1)\,(a+bu^q)^{p-1}} - \\ - \frac{m+q-pq+1}{aq\,(p-1)}\int \frac{u^m\,du}{(a+bu^q)^{p-1}}.$$

Funções contendo $a + bu \pm cu^2$ $(c > 0)$

A expressão $a + bu + cu^2$ pode ser reduzida a uma binomial, pondo $u = z - \frac{b}{2c}$, $k = \frac{b^2 - 4ac}{4c^2}$.

Então $$a + bu + cu^2 = c\,(z^2 - k).$$

A expressão $a + bu - cu^2$ pode ser reduzida a uma binomial pondo $u = z + \frac{b}{2c}$, $k = \frac{b^2 + 4ac}{4c^2}$.

Então $$a + bu - cu^2 = c\,(k - z^2).$$

105. $$\int \frac{du}{a+bu+cu^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,\text{arc tg}\left(\frac{2cu+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + \\ + C, \text{ quando } b^2 < 4ac.$$

106. $$\int \frac{du}{a+bu+cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left(\frac{2cu+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cu+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C, \\ \text{quando } b^2 > 4ac.$$

107. $$\int \frac{du}{a+bu-cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\left(\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cu+b}\right) + C.$$

108. $$\int \frac{(Mu+N)\,du}{a+bu\pm cu^2} = \frac{\pm M}{2c}\ln(a+bu\pm cu^2) + \\ + \left(N \mp \frac{bM}{2c}\right)\int \frac{du}{a+bu\pm cu^2}.$$

109. $$\int \sqrt{a+bu+cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} - \\ - \frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\ln\left(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right) + C.$$

$$110.\ \int \sqrt{a+bu-cu^2}\,du = \frac{2cu-b}{4c}\sqrt{a+bu-cu^2} + \frac{b^2+4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc sen}\left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)+C.$$

$$111.\ \int \frac{du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right)+C.$$

$$112.\ \int \frac{du}{\sqrt{a+bu-cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{arc sen}\left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)+C.$$

$$113.\ \int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{\sqrt{a+bu+cu^2}}{c} - \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\ln\left(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right)+C.$$

$$114.\ \int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu-cu^2}} = -\frac{\sqrt{a+bu-cu^2}}{c} + \frac{b}{2c^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc sen}\left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)+C.$$

Outras funções algébricas

$$115.\ \int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}}\,du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b)\,\text{lg.}\left(\sqrt{a+u}+\sqrt{b+u}\right)+C.$$

$$116.\ \int \sqrt{\frac{a-u}{b+u}}\,du = \sqrt{(a-u)(b+u)} + (a+b)\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{u+b}{a+b}}+C.$$

$$117.\ \int \sqrt{\frac{a+u}{b-u}}\,du = -\sqrt{(a+u)(b-u)} - (a+b)\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{b-u}{a+b}}+C.$$

$$118.\ \int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du = -\sqrt{1-u^2} + \text{arc sen}\,u + C.$$

$$119.\ \int \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{u-a}{b-a}}+C.$$

Funções exponenciais e logarítmicas

120. $\int e^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a} + C.$

121. $\int b^{au}\,du = \frac{b^{au}}{a \ln b} + C.$

122. $\int ue^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C.$

123. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au}\,du.$

124. $\int u^n b^{au}\,du = \frac{u^n b^{au}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int u^{n-1} b^{au}\,du + C.$

125. $\int \frac{b^{au}\,du}{u^n} = -\frac{b^{au}}{(n-1)\,u^{n-1}} + \frac{a \ln b}{n-1}\int \frac{b^{au}\,du}{u^{n-1}}.$

126. $\int \ln u\,du = u \ln u - u + C.$

127. $\int u^n \ln u\,du = u^{n+1}\left[\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

128. $\int u^m \ln^n u\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\ln^n u - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1} u\,du.$

129. $\int e^{au} \ln u\,du = \frac{e^{au} \ln u}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{au}}{u}\,du.$

130. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln(\ln u) + C.$

Funções trigonométricas

Nas funções contendo $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, $\sec u$, $\operatorname{cossec} u$, que não figuram abaixo, use primeiro as relações

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}, \quad \operatorname{ctg} u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}, \quad \sec u = \frac{1}{\cos u},$$

$$\operatorname{cossec} u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}.$$

131. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C.$

132. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C.$

133. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln \cos u + C = \ln \sec u = C.$

134. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln \operatorname{sen} u + C.$

135. $\int \sec u\, du = \int \frac{du}{\cos u} = \ln(\sec u + \operatorname{tg} u) + C =$

$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

136. $\int \operatorname{cossec} u\, du = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \ln(\operatorname{cossec} u - \operatorname{ctg} u) + C =$

$= \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + C.$

137. $\int \sec^2 u\, du = \operatorname{tg} u + C.$

138. $\int \operatorname{cossec}^2 u\, du = -\operatorname{ctg} u + C.$

139. $\int \sec u \operatorname{tg} u\, du = \sec u + C.$

140. $\int \operatorname{cossec} u \operatorname{ctg} u\, du = -\operatorname{cossec} u + C.$

141. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C.$

142. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C.$

143. $\int \cos^n u \operatorname{sen} u\, du = -\frac{\cos^{n+1} u}{n+1} + C.$

144. $\int \operatorname{sen}^n u \cos u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u}{n+1} + C.$

145. $\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} +$

$+ \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C.$

146. $\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\text{sen}\,(m+n)\,u}{2\,(m+n)} + \frac{\text{sen}\,(m-n)\,u}{2\,(m-n)} + C.$

147. $\int \text{sen}\, mu \cos nu \, du = -\frac{\cos\,(m+n)\,u}{2\,(m+n)} - \frac{\cos\,(m-n)\,u}{2\,(m-n)} + C.$

148. $\int \frac{du}{1+\cos a \cos u} = 2 \,\text{cossec}\, a \,\text{arc tg}\,(\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, a\, \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, u) + C.$

149. $\int \frac{du}{\cos a + \cos u} = \text{cossec}\, a \ln\left(\frac{1+\text{tg}\,\frac{1}{2}\, a\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\, u}{1-\text{tg}\,\frac{1}{2}\, a\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\, u}\right) + C$
$(\text{tg}^2\,\tfrac{1}{2}\, u < \text{ctg}^2\,\tfrac{1}{2}\, a)$
$= 2\,\text{cossec}\, a \,\text{tgh}^{-1}\,(\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, u) + C$
$(\text{tg}^2\,\tfrac{1}{2}\, u < \text{ctg}^2\,\tfrac{1}{2}\, a).$

150. $\int \frac{du}{1+\cos a\, \text{sen}\, u} = 2\,\text{cossec}\, a \,\text{arc tg}\,(\text{cossec}\, a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, u + \text{ctg}\, a) + C.$

151. $\int \frac{du}{\cos a + \text{sen}\, u} = \text{cossec}\, a \ln\left(\frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\,\frac{1}{2}\, u - \sec a}{\text{tg}\, a + \text{tg}\,\frac{1}{2}\, u + \sec a}\right) + C$
$[(\text{ctg}\, a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, u + \text{cossec}\, a)^2 < 1]$
$= -2\,\text{cossec}\, a\,\text{tgh}^{-1}\,(\text{ctg}\, a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, u + \text{cossec}\, a) + C$
$[(\text{ctg}\, a\,\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\, u + \text{cossec}\, a)^2 < 1]$

152. $\int \frac{du}{a^2\cos^2 u + b^2\,\text{sen}^2\, u} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\left(\frac{b\,\text{tg}\, u}{a}\right) + C.$

153. $\int e^{au}\,\text{sen}\, nu\, du = \frac{e^{au}\,(a\,\text{sen}\, nu - n\cos nu)}{a^2+n^2} + C.$

154. $\int e^{au}\cos nu\, du = \frac{e^{au}\,(n\,\text{sen}\, nu + a\cos nu)}{a^2+n^2} + C.$

155. $\int u\,\text{sen}\, u\, du = \text{sen}\, u - u\cos u + C.$

156. $\int u\cos u\, du = \cos u + u\,\text{sen}\, u + C.$

Fórmulas de redução trigonométricas

157. $$\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du.$$

158. $$\int \cos^n u\, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du.$$

159. $$\int \frac{du}{\operatorname{sen}^n u} = -\frac{\cos u}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\operatorname{sen}^{n-2} u}.$$

160. $$\int \frac{du}{\cos^n u} = \frac{\operatorname{sen} u}{(n-1)\cos^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^{n-2} u}.$$

161. $$\int \cos^m u \operatorname{sen}^n u\, du = \frac{\cos^{m-1} u \operatorname{sen}^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} u \operatorname{sen}^n u\, du.$$

162. $$\int \cos^m u \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m u \operatorname{sen}^{n-2} u\, du.$$

163. $$\int \frac{du}{\cos^m u \operatorname{sen}^n u} = \frac{1}{(m-1)\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{du}{\cos^{m-2} u \operatorname{sen}^n u}.$$

164. $$\int \frac{du}{\cos^m u \operatorname{sen}^n u} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^m u \operatorname{sen}^{n-2} u}.$$

165. $$\int \frac{\cos^m u\, du}{\operatorname{sen}^n u} = -\frac{\cos^{m+1} u}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} u} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m u\, du}{\operatorname{sen}^{n-2} u}.$$

166 $$\int \frac{\cos^m u\, du}{\operatorname{sen}^n u} = \frac{\cos^{m-1} u}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} u} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} u\, du}{\operatorname{sen}^n u}.$$

167. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^n u\,du}{\cos^m u} = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u}{(m-1)\cos^{m-1} u} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\operatorname{sen}^n u\,du}{\cos^{m-2} u}.$

168. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^n u\,du}{\cos^m u} = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u}{(n-m)\cos^{m-1} u} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-2} u\,du}{\cos^m u}.$

169. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n u\,du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\,du.$

170. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^n u\,du = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} u\,du.$

171. $\displaystyle\int e^{au}\cos^n u\,du = \frac{e^{au}\cos^{n-1} u\,(a\cos u + n\operatorname{sen} u)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{au}\cos^{n-2} u\,du.$

172. $\displaystyle\int e^{au}\operatorname{sen}^n u\,du = \frac{e^{au}\operatorname{sen}^{n-1} u\,(a\operatorname{sen} u - n\cos u)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{au}\operatorname{sen}^{n-2} u\,du.$

173. $\displaystyle\int u^m \cos au\,du = \frac{u^{m-1}}{a^2}(au\operatorname{sen} au + m\cos au) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int u^{m-2}\cos au\,du.$

174. $\displaystyle\int u^m \operatorname{sen} au\,du = \frac{u^{m-1}}{a^2}(m\operatorname{sen} au - au\cos au) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int u^{m-2}\operatorname{sen} au\,du.$

Funções trigonométricas inversas

175. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} u\,du = u\operatorname{arc\,sen} u + \sqrt{1-u^2} + C.$

176. $\displaystyle\int \operatorname{arc\,cos} u\,du = u\operatorname{arc\,cos} u - \sqrt{1-u^2} + C.$

177. $\int \text{arc tg}\, u\, du = u\, \text{arc tg}\, u - \ln \sqrt{1 + u^2} + C,$

178. $\int \text{arc ctg}\, u\, du = u\, \text{arc ctg}\, u + \ln \sqrt{1 + u^2} + C.$

179. $\int \text{arc sec}\, u\, du = u\, \text{arc sec}\, u - \ln (u + \sqrt{u^2 - 1}) + C.$
$= u\, \text{arc sec}\, u - \cosh^{-1} u + C.$

180. $\int \text{arc cossec}\, u\, du = u\, \text{arc cossec}\, u + \ln (u + \sqrt{u^2 - 1}) + C$
$= u\, \text{arc cossec}\, u + \cosh^{-1} u + C.$

Funções hiperbólicas

181. $\int \text{senh}\, u\, du = \cosh u + C.$

182. $\int \cosh u\, du = \text{senh}\, u + C.$

183. $\int \text{tgh}\, u\, du = \ln \cosh u + C.$

184. $\int \text{ctgh}\, u\, du = \ln \text{senh}\, u + C.$

185. $\int \text{sech}\, u\, du = \text{arc tg}\, (\text{senh}\, u) + C = \text{gd}\, u + C.$

186. $\int \text{cossech}\, u\, du = \ln \text{tg}\, h \frac{1}{2} u + C.$

187. $\int \text{sech}^2 u\, du = \text{tg}\, h\, u + C.$

188. $\int \text{cossech}^2 u\, du = -\, \text{ctgh}\, u + C.$

189. $\int \text{sech}\, u\, \text{tg}h\, u\, du = -\, \text{sech}\, u + C.$

190. $\int \text{cossech}\, u\, \text{ctgh}\, u\, du = -\, \text{cossech}\, u + C.$

191. $\int \text{senh}^2 u\, du = \frac{1}{4} \text{senh}\, 2u - \frac{1}{2} u + C.$

192. $\int \cosh^2 u\, du = \frac{1}{4} \text{senh}\, 2u + \frac{1}{2} u + C.$

193. $\int \operatorname{tgh}^2 u\,du = u - \operatorname{tgh} u + C.$

194. $\int \operatorname{ctgh}^2 u\,du = u - \operatorname{ctgh} u + C.$

195. $\int u \operatorname{senh} u\,du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + C.$

196. $\int u \cosh u\,du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + C.$

197. $\int \operatorname{senh}^{-1} u\,du = u \operatorname{senh}^{-1} u - \sqrt{1 + u^2} + C.$

198. $\int \cosh^{-1} u\,du = u \cosh^{-1} u - \sqrt{u^2 - 1} + C.$

199. $\int \operatorname{tgh}^{-1} u\,du = u \operatorname{tgh}^{-1} u + \frac{1}{2} \ln (1 - u^2) + C.$

200. $\int \operatorname{ctgh}^{-1} u\,du = u \operatorname{ctgh}^{-1} u + \frac{1}{2} \ln (1 - u^2) + C.$

201. $\int \operatorname{sech}^{-1} u\,du = u \operatorname{sech}^{-1} u + \operatorname{gd} (\operatorname{tgh}^{-1} u) + C =$
$= u \operatorname{sech}^{-1} u + \operatorname{arc\,sen} u + C\,.$

202. $\int \operatorname{cossech}^{-1} u\,du = u \operatorname{csch}^{-1} u + \operatorname{cossech}^{-1} u + C.$

203. $\int \operatorname{senh} mu \operatorname{senh} nu\,du = \frac{\operatorname{senh} (m + n) u}{2 (m + n)} -$
$- \frac{\operatorname{senh} (m - n) u}{2 (m - n)} + C. \left(m \gtrless n\right)$

204. $\int \cosh mu \cosh nu\,du = \frac{\operatorname{senh} (m + n) u}{2 (m + n)} +$
$+ \frac{\operatorname{senh} (m - n) u}{2 (m - n)} + C. \left(m \gtrless n\right)$

205. $\int \operatorname{senh} mu \cosh nu\,du = \frac{\cosh (m + n) u}{2 (m + n)} +$
$+ \frac{\cosh (m - n) u}{2 (m - n)} + C. \left(m \gtrless n\right)$

206. $\displaystyle\int \frac{du}{\cosh a + \cosh u} = 2 \operatorname{cossech} a \operatorname{tgh}^{-1} (\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} a) + C.$

207. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos a + \cosh u} = 2 \operatorname{cossec} a \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a) + C.$

208. $\displaystyle\int \frac{du}{1 + \cos a \cosh u} = 2 \operatorname{cossec} a \operatorname{tgh}^{-1} (\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a) + C$

$(\operatorname{tgh}^2 \tfrac{1}{2} u < \operatorname{ctg}^2 \tfrac{1}{2} a)$

209. $\displaystyle\int e^{au} \operatorname{senh} nu\, du = \frac{e^{au} (a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu)}{a^2 - n^2} + C.$

210. $\displaystyle\int e^{au} \cosh nu\, du = \frac{e^{au} (a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu)}{a^2 - n^2} + C.$

ÍNDICE

(os números referem-se aos parágrafos)